

基于 Wigner 变换的非涅耳衍射光场的算法

曹玉茹 韦 穗

(安徽大学智能计算与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

摘要 通过建立在一定约束条件下的非涅耳衍射光场与分数阶傅里叶变换的等效性,以及在新的非涅耳衍射系统(即球面波照射下的无透镜光学衍射系统)下,利用非涅耳远场衍射和近场衍射的相关性,提出了一种基于 Wigner 变换的非涅耳衍射光场的新算法,并用计算机模拟了相应的结论。较之传统算法,该算法更加简单明了,而且为进一步研究光场的分布特征提供了新的途径。

关键词 Wigner 变换 非涅耳衍射 分数傅里叶变换

中图分类号: O438 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)10-1420-06

An Algorithm for Fresnel-diffraction Light Based-on Wigner Distribution

CAO Yu-ru, WEI Sui

(Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing of Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract In this paper, by making use of the equivalent relation between free-space fresnel diffraction illuminated by the spherical wave and fractional fourier transform and the correlation between long distance and short distance diffraction, we proposed a new algorithm for Fresnel-diffraction based on the Wigner transform and simulated the conclusion by computer. Compared to traditional algorithm, the new one is not only more simple but also proposes a new way to study the distribution character of light space.

Keywords Wigner transform, Fresnel diffraction, fractional Fourier transform

1 引言

近年来,关于非涅耳衍射传播的计算机模拟计算出现了许多算法^[1,2],除了直接由非涅耳衍射公式计算外,比较典型的有快速傅里叶变换直接计算非涅耳衍射公式;角谱的方法;分数傅里叶变换方法。这些算法虽然有一定程度的改进,但还是存在缺点。非涅耳衍射积分可以看作输入复振幅分布与二次位相因子乘积的傅里叶变换。因此在合适的采样条件下,可以用快速傅里叶变换对衍射作数值计算。但是文献[3]证明了在整个非涅耳衍射光场中,用统一的采样频率来离散衍射积分是不成立的,用上面的方法直接估算非涅耳衍射积分只适用于非

涅耳中、远场的条纹强度计算,而当衍射距离较小时,由于二次相位因子的震动非常剧烈,仍用远场时的采样频率就会导致估计不准确。为了不增加计算复杂度,此时可以采用角谱的方法来计算,这种算法通过一次快速傅里叶变换和一次快速逆傅里叶变换抵消了二次相位因子,根据 Nyquist 抽样条件,这种算法只适用于非涅耳近场计算。因此没有一个统一的方法来描述整个非涅耳衍射光场的分布情况。到了 20 世纪 90 年代初, Lohmann 等人将分数阶傅里叶变换引入信息光学中,分数傅里叶变换成为求解衍射问题的一个新的数学工具^[4-8],随后 Lohmann 又利用 Wigner 相空间旋转的概念给出了分数阶傅里叶变换的积分形式。分数傅里叶变换通过分数阶的连续变化可以计算任意距离的非涅耳衍射光场,

基金项目: 国家自然科学基金项目(60473120)

收稿日期: 2005-02-02; **改回日期**: 2005-08-16

第一作者简介: 曹玉茹(1978 ~),女。安徽大学计算机应用技术专业博士研究生。研究方向为全息显示技术及图像处理。E-mail: caoyuru2003@yahoo.com.cn

解决了上面算法不统一的问题。但是计算公式太复杂,如果直接进行离散化处理仍然受到二次相位因子振荡的影响从而无法对远场进行估计。

鉴于 Wigner 变换旋转角度与分数傅里叶变换阶数之间的关系。在新的约束条件及新的非涅耳衍射系统(即球面波照射下的无透镜光学衍射系统)下,建立非涅耳衍射光场与分数阶傅里叶变换的等效性以及非涅耳远场衍射和近场衍射的相关性,从而提出一种基于 Wigner 变换的非涅耳衍射光场的新算法。这种算法不仅避免了非涅耳衍射数值计算的算法不统一以及使用复杂的分数傅里叶变换公式,而且不需要将衍射距离分为近场和远场分别讨论,只通过一个连续的变换建立 Wigner 变换的旋转角度与任意的非涅耳衍射距离之间的一种对应关系就能得到任意非涅耳衍射距离上的光场分布的数值估计。

2 非涅耳衍射

在全息图的记录和重现过程中,光波从物面到全息面,再从全息面到像面的传播都可以理解为非涅耳衍射,因此对非涅耳衍射的研究具有相当重要的意义。

首先,给出非涅耳衍射积分公式。与以往不同,这里给出的系统是球面波照射,而不是过去的平面波照射。事实上,用球面波照射物体等价于紧贴物体的一侧放置一个透镜,因此,无穷远平面将被成像到有限的焦平面上。如图 1 所示,假设利用波长为 λ ,单位振幅的单色球面波照明物体 $u(x_0, y_0)$,且点光源与物面的距离为 R ,则与物面相距 d 处的观察面上的光场分布为

$$\begin{aligned}
 u(x, y) &= \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left[-jk \frac{x_0^2 + y_0^2}{2R}\right] \times \\
 &\quad \exp\left[jk \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2d}\right] dx_0 dy_0 \\
 &= \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \times \exp\left\{j\pi \left[\left(\frac{R-d}{\lambda d R}\right)(x_0^2 + y_0^2) + \right.\right. \\
 &\quad \left.\left. \frac{x^2 + y^2}{\lambda d}\right]\right\} \times \exp\left[-2j\pi \frac{xx_0 + yy_0}{\lambda d}\right] dx_0 dy_0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

其中, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ 为波数。根据 Kerr 的定义^[5],对物体 $u(x_0, y_0)$ 进行 p 阶分数阶傅里叶变换可以表示为

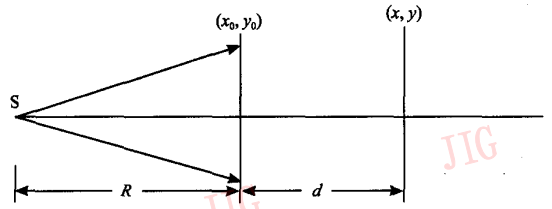


图 1 球面波照射的非涅耳衍射装置

Fig. 1 Fresnel diffraction device by spherical wave

$$\begin{aligned}
 F^p(u) &= C \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left(j\pi \frac{x_0^2 + y_0^2 + x_1^2 + y_1^2}{\tan(\varphi)}\right) \times \\
 &\quad \exp\left[\frac{-2j\pi(x_1 x_0 + y_1 y_0)}{\sin(\varphi)}\right] dx_0 dy_0 \\
 &= C \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left(j\pi \frac{x_0^2 + y_0^2}{\tan(\varphi)}\right) \times \\
 &\quad \exp\left\{\frac{(x_1 \cos(\varphi))^2 + (y_1 \cos(\varphi))^2}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{2[(x_1 \cos(\varphi))x_0 + (y_1 \cos(\varphi))y_0]}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)}\right\} dx_0 dy_0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 C &= \frac{\exp\left[-j\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)\right]}{\sqrt{2\pi \sin(\varphi) \cos(\varphi)}} \\
 \varphi &= \frac{p\pi}{2}
 \end{aligned}$$

显然,当 $p = 1$ 时,分数傅里叶变换就变成了傅里叶变换,事实上,傅里叶变换只是分数傅里叶变换的一种特殊情况。

由于任意复杂波场的主要特征都集中体现在波前函数的位相因子中(即所谓的波前相因子判别法^[9]),于是对比式(1)和式(2)的位相因子,并进行如下变换:

$$\frac{1}{\tan(\varphi)} = \frac{1}{\lambda d} - \frac{1}{\lambda R} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin(\varphi) \cos(\varphi)} = \frac{1}{\lambda d} \quad (4)$$

$$x_1 \cos(\varphi) = x \quad (5)$$

联立上面 3 式得到

$$d = R \sin^2(\varphi) \quad (6)$$

将式(3),(4),(5)代入式(2)可得

$$\begin{aligned}
 F^p(u) &= C \iint_{-\infty}^{\infty} u(x_0, y_0) \exp\left[j\pi \left(\frac{1}{\lambda d} - \frac{1}{\lambda R}\right)(x_0^2 + y_0^2)\right] \times \\
 &\quad \exp\left(\frac{x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0}{\lambda d}\right) dx_0 dy_0 \quad (7)
 \end{aligned}$$

将式(7)与式(1)比较得出:自由空间的菲涅耳衍射光场可以看成是 p 阶分数傅里叶变换与一个二次相位因子的乘积,只不过衍射在观察面上坐标发生了缩放变化,而这种缩放变化及二次相位因子又都是由分数阶等参数决定,因此分数傅里叶变换全息图可以认为是被分数阶调制的菲涅耳全息图。正是由于这种缩放的性质得到衍射图像的大小、位置和变换的阶数密切相关,从而可以通过改变分数阶来灵活地控制图像尺度的大小^[4],这是普通的菲涅耳全息图难以实现的。

根据式(6)可知,当确定了照明光源到物面的距离 R 时,衍射的距离 d 和分数阶 p 之间就有一个对应关系:

$$p = \frac{2}{\pi} \arcsin^{\frac{1}{2}} \left(\frac{d}{R} \right) \quad (8)$$

显然当 $d = R$ 时, $p = 1$, 即为标准的傅里叶变换,换句话说,对于任意平面波照射下的物体的菲涅耳衍射距离 z 都对应于一个球面波照射下衍射距离 d , 且这种对应是将无穷远对应到有限距离上来,即将菲涅耳衍射的远场变为近场来考虑。这样,就建立了菲涅耳衍射和分数傅里叶变换之间的一个对应关系。

3 Wigner 分布函数

光场的分布常常通过菲涅耳衍射积分公式求解,信号的夫琅和费衍射光场分布就是求其傅里叶变换,它将信号从空间域变换到频率域,即将空间域与频率域割裂开来讨论,而 Wigner^[6] 变换则是把信号的空间域与频率域结合到一起讨论。Lohmann 利用 Wigner 分布函数的旋转定义了分数傅里叶变换,使得分数傅里叶变换的求解变得简洁,从而光的衍射问题的求解也将变得简洁。

首先,给出 2 维信号的 Wigner 分布函数的定义。

$$W(x, u; y, v) = \iint f \left(x + \frac{x'}{2}, y + \frac{y'}{2} \right) f^* \left(x - \frac{x'}{2}, y - \frac{y'}{2} \right) \times \exp[-2i\pi(x'u + y'v)] dx' dy' \quad (9)$$

$$W(x, u; y, v) = \iint F \left(u + \frac{u'}{2}, v + \frac{v'}{2} \right) F^* \left(u - \frac{u'}{2}, v - \frac{v'}{2} \right) \times \exp[2i\pi(u'x + v'y)] du' dv' \quad (10)$$

其中, x, y 表示空间域坐标, u, v 表示频率域坐标, $F(u, v)$ 是 $f(x, y)$ 的傅里叶变换, f^* 表示 f 的共轭。

在式(9)中令

$$x = x - \frac{x'}{2} \quad y = y - \frac{y'}{2}$$

则有

$$x + x' = x + \frac{x'}{2} \quad y + y' = y + \frac{y'}{2}$$

从而得到

$$\begin{aligned} W(x, u; y, v) &= \iint f(x + x', y + y') f^*(x, y) \times \\ &\quad \exp[-2i\pi(x'u + y'v)] dx' dy' \\ &= f^*(x, y) \exp[2i\pi(xu + yv)] F(u, v) \quad (11) \end{aligned}$$

同理可得到

$$W(x, u; y, v) = F^*(u, v) f(x, y) \times \exp[-2i\pi(ux + vy)] \quad (12)$$

从式(11)、(12)可以看出, Wigner 分布函数同时描述了信号的空间域分布和频率域分布。

对于任意一个信号可以求其 Wigner 分布函数,当然也可以从 Wigner 分布函数恢复信号本身及其频谱。

对式(11)进行傅里叶变换可以得到

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(x, u; y, v) \exp[-2i\pi(ux + vy)] dudv \\ = f^*(x, y) f(0, 0) \quad (13) \end{aligned}$$

同理对式(12)进行傅里叶逆变换得到:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{W}(x, u; y, v) \exp[2i\pi(ux + vy)] dx dy \\ = F^*(u, v) F(0, 0) \quad (14) \end{aligned}$$

根据 Lohmann 的定义^[6]可以推出:当对信号进行 p 维分数傅里叶变换时,其对应的 Wigner 分布函数在时间频率联合分布平面内旋转的角度为 $\varphi = p\pi/2$, 相应的旋转矩阵为

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

经过 p 阶分数傅里叶变换后信号的 Wigner 分布为^[9]

$$W_p(x, u; y, v) = W(x \cos(\varphi) - u \sin(\varphi), u \cos(\varphi) + x \sin(\varphi); y \cos(\varphi) - v \sin(\varphi), v \cos(\varphi) + y \sin(\varphi)) \quad (15)$$

然后再通过 $W_p(x, u; y, v)$ 恢复变换后的信号及其频谱。这样就将菲涅耳衍射和分数傅里叶变换的计算转化为求解 Wigner 变换及 Wigner 反变换问题。

4 算法原理

根据上面的讨论,结合式(8),可以得出一种新

的计算物体的菲涅耳衍射光场算法,对于球面波照明的物体的菲涅耳衍射的光场分布,对于任意的球面照明系统中球面波的半径 R ,它对应于平面波照射的非涅耳衍射中的无穷远距离,从而对于任意给定的衍射距离 $d(d \leq R)$,可以将给定距离上的菲涅耳衍射转化为物函数的 p 阶分数傅里叶变换,由此确定 Wigner 变换的旋转角度,并由 Wigner 反变换求得衍射后的光场分布,即有下面的算法原理 $f(x, y) \rightarrow W(x, u; y, v) \rightarrow W_p(x, u; y, v) \rightarrow f_d(x, y)$ (16)

具体算法如下:

(1) 先将物函数 $f(x, y)$ 离散化,将式(11)离散化为

$$W(n, s; m, t) = f^*(n, m) F(s, t) \exp\left[2i\pi\left(\frac{sn}{N} + \frac{tm}{M}\right)\right] \quad (17)$$

其中, N, M 分别为 x, y 方向上的采样点数, n, m 为位置离散点的序号, s, t 为频率离散点的序号。

(2) 将 $W(n, s; m, t)$ 经过一次旋转得到

$$W_p(n, s; m, t) = W(ncos(\varphi) - ssin(\varphi), scos(\varphi) + nsin(\varphi); mcos(\varphi) - tsin(\varphi), tcos(\varphi) + msin(\varphi)) \quad (18)$$

(3) 将式(13)离散为

$$f(0,0)f^*(n, m) = \sum_s \sum_t W_p(n, s; m, t) \times \exp\left[-2i\pi\left(\frac{sn}{N} + \frac{tm}{M}\right)\right] \quad (19)$$

从而得到衍射以后的离散的光场分布情况,同样的方法,可以得到离散的频率分布情况

$$F(0,0)F^*(s, t) = \sum_n \sum_m W_p(n, s; m, t) \times \exp\left[2i\pi\left(\frac{sn}{N} + \frac{tm}{M}\right)\right] \quad (20)$$

5 实验结果与分析

首先以 1 维为例,选用缝宽为 2mm 的单缝为衍射屏,入射波长为 0.63μm 的单位振幅均匀的球面波,且 R 取 5m,样本点取 $N = 256$,用上述算法利用 Matlab 语言得到不同衍射距离所得到的 Wigner 分布及其相应的光场分布。图 2 分别表示衍射距离为 $d = 0, d = 0.008m$ (近场), $d = 3.55m$ (中场) 以及 $d = 5m$ (远场) 时分别对应的不同阶数的 Wigner 分布。而图 3 分别表示在不同的衍射距离(相应与上面的距离)上球面波照射单缝时的衍射图样。它和直接由菲涅耳积分公式得到的结果相符。

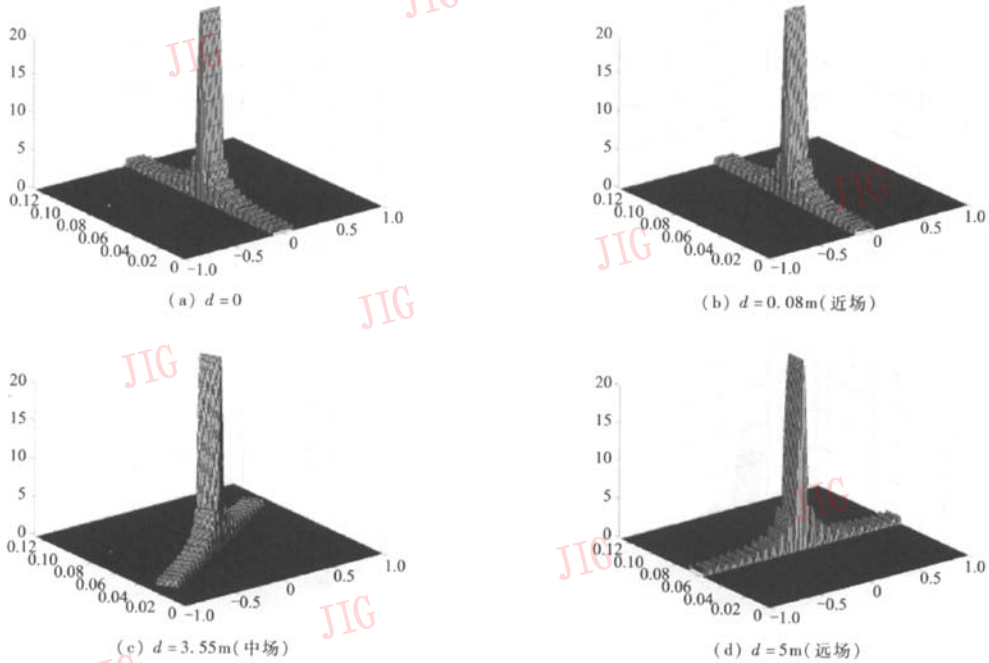


图 2 不同衍射距离对应的 Wigner 分布
Fig. 2 Wigner distribution from different distance

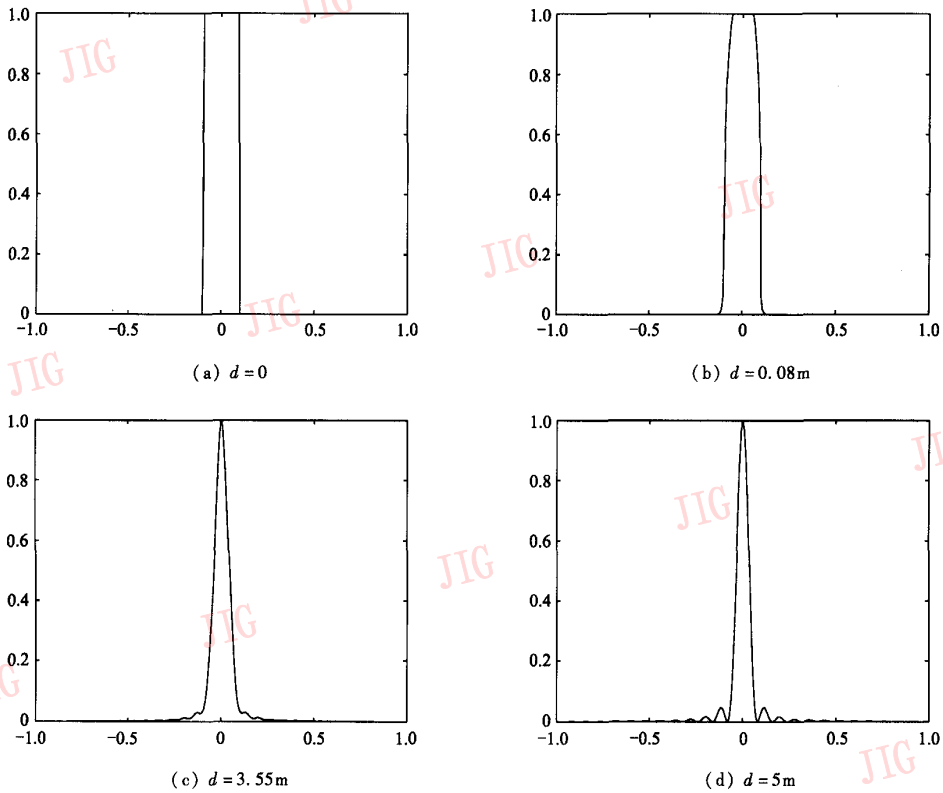


图 3 不同 Wigner 分布对应的光场分布
 Fig. 3 Fresnel distribution from different Wigner distribution

2 维信号衍射光场的理论和计算方法与 1 维相似,但由于 2 维信号的 Wigner 分布是 4 维函数,必须通过计算 2 维切片来显示分布函数,从而重构原来的光场。选用半径为 3mm 的孔作为衍射屏,入射球面波的波长仍为 $0.63\mu\text{m}$, R 取 5m,两个方向上的样本数都取 $N = 128$,由于此时的分布 $W(x, u; y, v)$ 是 4 维的,无法直接显示,然而可以通过显示不同位

置坐标的 $W(u, v)$ 来达到显示的目的,图 4 是用 Matlab 语言给出了坐标位置分别为 (64, 64), (65, 65) 的分布图。

根据上面的算法原理,利用 Matlab 语言得到图 5 中衍射距离分别为 $d = 0, d = 0.008\text{m}$ (近场), $d = 3.55\text{m}$ (中场) 以及 $d = 5\text{m}$ (远场) 时的圆孔的衍射光场,它和直接由菲涅耳积分公式得到的结果相符。

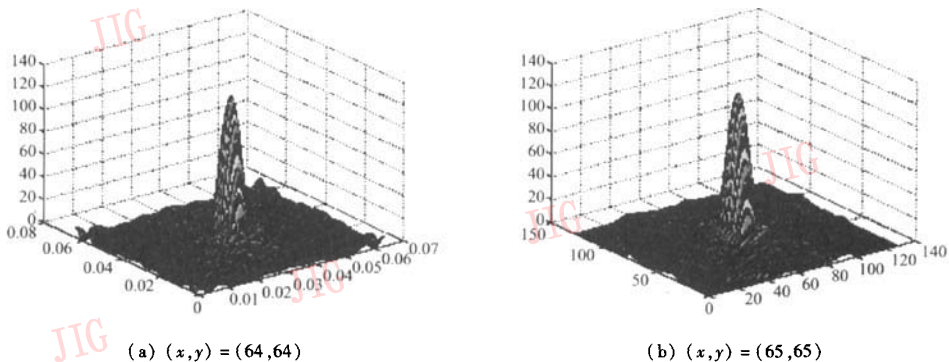


图 4 不同坐标位置对应的 Wigner 分布
 Fig. 4 Wigner distribution from different location

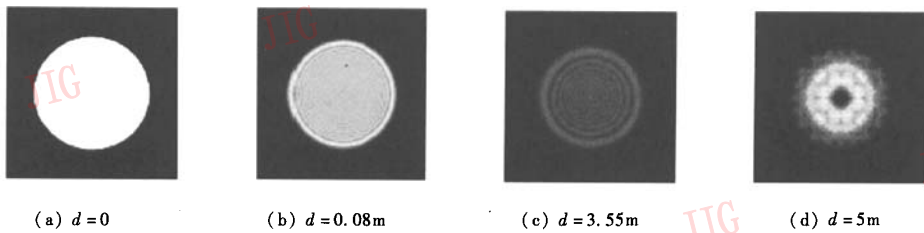


图 5 圆孔在不同衍射距离对应的光场分布

Fig. 5 Fresnel distribution of aperture in different distance

6 结 论

鉴于球面波照射物体的自由空间菲涅耳衍射的光场分布与分数傅里叶变换的等效性,利用 Wigner 分布来得到计算菲涅耳衍射光场的一种新算法,实验结果表明,该算法比原来的直接由菲涅耳积分公式等算法更简单明了,非常适用于 1 维衍射物的光场计算。而且,还可以利用 Wigner 分布来同时分析时域和频域的变化与光强的关系,以便于进一步研究光场的分布特征。

参考文献 (References)

- Mas D, Perez J, Cernandez C. Fast numerical calculation of Fresnel patterns in convergent systems[J]. Optical Communications, 2003, 27(19): 245 ~ 258.
- Mas D, Garcia J, Ferreira C, et al. Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation[J]. Optical Communications, 1999, 164: 233 ~ 245.
- Martin J, Bastiaans, Tatiana Alieva. Rotation-type input-output-relationships for Wigner distribution moments in fractional Fourier transform systems [J]. Optical Communications, 1995, 22(6): 238 ~ 249.
- Hone-Ene Hwang. Approximately analytical optimization of the fractional Fourier transform for the free-space Fresnel diffraction[J]. Optical Communications, 2003, 223: 47 ~ 53.
- Lohmann A. Image rotation Wigner rotation and the fractional Fourier transform[J]. Optical Soc. Am(A), 1993, 10(10): 2181 ~ 2186.
- Yang Hu, Zhang Yi-fang. The equality of fractional Fourier transform and Fresnel diffraction[J]. Optoelectronics Laser, 2001, 12(1): 92 ~ 93. [杨虎,张艺芳. 分数傅里叶变换与菲涅耳衍射的等效性[J]. 光电子激光, 2001, 12(1): 92 ~ 93.]
- Yang Hu, Yang Pei-lin. Non-lens Fractional Fourier Transform Hologram[J]. Optoelectronics Laser, 1999, 6(10): 551 ~ 552. [杨虎, 杨培林. 无透镜分数傅里叶变换全息图[J]. 光电子激光, 1999, 6(10): 551 ~ 552.]
- Cheng Jia-bi, Su Xian-yu. The Theory and Application of Optical information technology [M]. Beijing: High Education Publication, 2002: 17 ~ 35. [陈家璧, 苏显渝. 光学信息技术原理及应用[M]. 北京: 高等教育出版社, 2002: 17 ~ 35.]
- Jianwen Hua, Liren Liu, Guoqiang Li. Performing fractional Fourier transform by one Fresnel diffraction and one lens [J]. Optical Communications, 1997, 137(23): 11 ~ 12.