第 12 卷　第 1 期
2007 年 1 月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 12, No. 1
Jan., 2007

基于二叉树的曲线描述方法

陈孝春　叶懋冬　倪臣敏
（浙江大学数学系，杭州　310027）

摘　要　为了更好地描述曲线，引入了一种有效的曲线编码和描述方法——曲线树。这种曲线树是采用树的结构来描述曲线，其内部元素是有向相对高度。由于任何一种曲线都与一个曲线树一一对应，因此从树的根部开始，取其前几层得到的树，都是对该曲线的粗略的描述，而且随着层数的增加，刻画曲线的精度就越高。这种方法最大的一个优点是它不随曲线平移、拉伸和旋转而变化。在这种曲线描述的基础上，可进一步定义两曲线的距离，以便用来衡量曲线间的相似程度。

关键词　曲线描述　曲线树　二叉树　有向相对高度　曲线距离

中图法分类号：TP391.41　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1006-8961(2007)01-0116-05

A Method for Curve Representation Based on Binary Tree

CHEN Xiao-chun, YE Mao-dong, NI Chen-ming
(*Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou* 310027)

Abstract　A novel approach, curve tree, is proposed for curve representation and encoding. Binary trees composed of directed relative height are adopted to describe curves. Any curve corresponds to a curve tree. We may take the first n levels of the curve tree, which compose a binary tree roughly describing the curve. The more levels we get, the finer it describes the curve. The representation is invariant to rotation, scaling, and translation. Based on this descriptor, curve distance is defined to weigh the similarity between curves.

Keywords　curve representation, curve tree, binary tree, directed relative height, curve distance

1　引　言

曲线是图像中物体的重要特征，它蕴含着图像的本质结构，因此如何来描述曲线是图像识别的重要环节，而且描述方法的优劣也会直接影响到曲线编码的繁简及其识别的效果。在机器视觉领域中，一种比较理想的曲线描述方法应具有平移、旋转和拉伸的不变性，且对于边界小的扰动不敏感。到目前为止，已出现了很多种曲线的描述方式，大致可分为基于全局的特征和基于局部的特征两类。

链码是目前最常见的一种基于全局特征的曲线描述方法，它是沿着物体的轮廓记录边缘表的一种表达方法。链码的最大优点是表示形式简洁，很容易实现物体的 $45°\times n(n\in N)$ 的旋转，但由于其是采用指定的方向和长度的直线段相连的线段来表征曲线的，因此对边界扰动很敏感，且不能保证旋转和拉伸不变。另外，无论是 Park 提出用规定化的链码直码直方图[1]，还是 Li 和 Dai 分别改进的传统的链码[2,3]都因构造链码选用的格子的大小固定而在实际应用中受到限制。

基于局部特征的曲线描述方法主要是抓住曲线的局部的特征（关键点），如拐角、洞、突起、高曲率的点等来进行描述。这样基于这种描述方法的曲线匹配事实上就转化为特征的匹配。这种方法的优点是在描述物体时由于并不需要提取出完整的物体的轮廓，从而节省了计算的时间，但同时它也丢失了物体轮廓中平滑部分的有用信息。Cosmin 提出了用

收稿日期：2005-09-16；**改回日期**：2006-01-04

第一作者简介：陈孝春（1980～　），女。2003 年获浙江师范大学理学学士学位，现为浙江大学理学院应用数学硕士研究生。主要研究方向为数字图像处理、机器视觉等。E-mail：cxc8036@163.com

距离集来描述曲线，进而匹配并识别曲线的方法[4]，Zhang 用形状曲线上极点列来表示物体的形状以构成形状空间，从而将物体的识别问题转化为形状空间中极点列的匹配问题[5]。由于这些方法忽略了边界的大部分信息，因此事实上它只能鉴别具有某些特征的曲线。

本文提出的是一种新的曲线描述和匹配方法。它是采用数据结构中二叉树来描述曲线，这里将该树称之为曲线树，其树中的元素是与曲线曲率相联系的有向相对高度。这种方法在实际应用中可以根据曲线描述与匹配精度的需要来调整树的层数，对同一曲线来说，曲线树的层数越多，对曲线刻画越精细。同时这种描述方法不仅关于平移、旋转、拉伸以及对称变换有很好的不变性，而且对曲线上小的扰动不敏感。最后在这种曲线描述法的基础上引进了刻画曲线相似度的曲线距离，并将其应用于形状的匹配，取得了很好的效果。

2 曲线描述

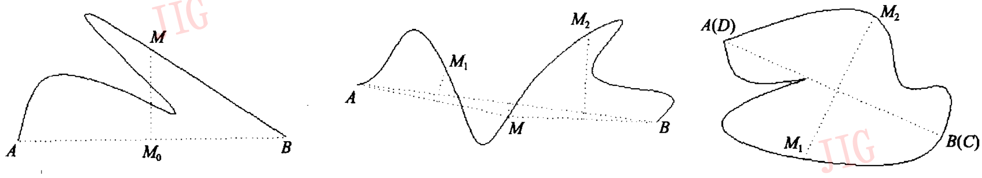
由于任何曲线都与某一曲线树对应，因此在构造某一曲线的曲线树时，应首先确定曲线的走向，也即确定曲线的起始点，由于起始点的不同会使构造的曲线树大不相同。同时需确定的是曲线树的层数。

2.1 曲线走向的确定

通常曲线可以用 $x(t)$，$y(t)$ 来描述，但由于选取的起始点不同，致使曲线的描述形式也不同。而且由不同的描述形式构造的曲线树往往差异较大，所以需要确定曲线的走向，即确定曲线的起始点。

对于如图 1(a)所示的开曲线，A，B 分别是它的两端点，AB 的中垂线必与曲线相交，设 M 是离线段 AB 最远的交点，则取曲线轨迹上离 M 较远的曲线端点 A 为曲线的起始点。实际上可能会遇到 AM 与 BM 的曲线轨迹长度相等的情况(如图 1(b)所示)，此时分别在曲线 AM，BM 上重复上述操作，即可得 M_1，M_2，若 M_1A 曲线的轨迹长于 M_2B，则取点 A 为起始点，若 M_1A 曲线的轨迹小于 M_2B，则取点 B 为起始点，否则继续分割曲线，直至 $L/N<\varepsilon$，其中 N 为分割次数，L 为曲线长，然后取任意端点作为起始点。

对于如图 1(c)所示的封闭曲线，首先用的是曲线上距离最大的两点 A，B 将其分割成两条开曲线。再按照开曲线选取交点的规则，在两开曲线上得到交点 M_1，M_2，若 M_1A 的曲线轨迹大于 M_1B，M_2A，M_2B 的曲线轨迹，则选定下方的曲线 AB 为第 1 条曲线，且以 A 为起点，而上方的曲线 CD 则为第 2 条曲线，C 为起点，具体如图 1(c)所示；若曲线 M_1A，M_1B，M_2A，M_2B 都相等，则将封闭曲线分割为 4 条曲线，然后分别在这 4 条开曲线上寻找起始点。



(a)　　(b)　　(c)

图 1　开曲线与封闭曲线起始点的选取

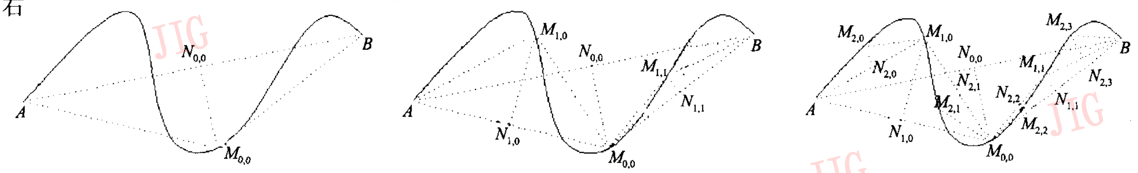
Fig. 1　The selection of start point of both of open curve and closed curve

2.2 构造曲线树

定义 1　如果图 1(a)曲线上的点 A、B、M 组成等腰三角形，即 $AM=BM$，则 $h=(-1)^a MM_0/AM_0$ 称为线段 AB 上的有向相对高度，其中 M_0 为线段 AB 上的中点，且满足 $MM_0\perp AB$。其中 $a\in\{0,1\}$，它决定着有向相对高度的正负。a 的值由 B，M，A 3 点的位置决定。若向量 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{MM_0}$ 与垂直于该三角形所在平面垂直向上的向量 Z 满足右手定则，则 $a=1$，否则 $a=-1$。

如图 2 中的开曲线所示，A，B 为其两端点，设其起点为 A，AB 的中垂线与曲线交于 M_0，则 AM_0，BM_0，AB 构成一个等腰三角形 $\triangle M_0AB$，其中 AM_0，BM_0，AB 是该三角形的 3 条边，记 $\triangle M_0AB$ 底边 AB 上的有向相对高度为 $h_{0,0}$，并存入曲线树的根结点。构造曲线树时，首先用 M_0 将曲线分割成两条开曲线，然后对这两条开曲线分别重复上述操作，即得到两个等腰三角形，接着选取离原曲线起始点较近的等腰三角形的底边上的有向相对高为上边结点 $h_{0,0}$ 的左孩子 $h_{1,0}$，另一等腰三角形的底边上的有向相对高为上边结点 $h_{0,0}$ 的右孩子 $h_{1,1}$。这里得到的左、

右



(a) 根结点的提取　　(b) 第 2 层结点的提取　　(c) 第 3 层结点的提取

图 2　曲线树的构造

Fig. 2　The construction of curve tree

孩子分别为接下去子树的根结点，在分割得到的每一曲线上分别重复上述操作，直至得到的曲线几乎成一直线为止。由于曲线经过对称等变换后所构造的曲线树与原先的曲线树相反（两曲线树中的对应的每一元素都互为相反数），所以需将上面的结点值做如下修正：若曲线树的根结点值为负值，则对曲线树中的每一元素值取其负，否则，对曲线树的结点值不做任何修改。图 2 显示了一条开曲线的曲线树的构造过程（前 3 层），图 3 为图 2 的曲线树。

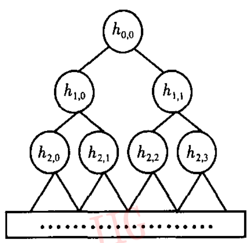


图 3　曲线树

Fig. 3　Curve tree

对于封闭曲线，则先将其分割成两条开曲线（见 2.1 节中介绍），然后由这两条开曲线分别得到两个曲线树，再以与第 1 条曲线对应的曲线树为左子树，以另一曲线树为右子树，根结点取值为 ∞，即得到一曲线树，可将此树称之为该封闭曲线的曲线树。

2.3　曲线树的性质

由曲线树的构造方法可得曲线树对曲线的移动、旋转、拉伸及对称变换具有很好的不变性，因为与曲线树中每一结点对应的值是曲线两端点与曲线上另一点构成的等腰三角形底边上的相对高度，由于它不随上述的变换而改变，而且由于曲线上局部扰动在曲线树构造过程中只是对某些分曲线上的等腰三角形的高或底边的长度有较小影响，故等腰三角形底边上的相对高度的值变化较小，可见这种曲线的描述方法有较好的抗边界扰动能力。

曲线树的前几层中元素不仅能粗略地构造相应的曲线，而且随着取的层数的增加，构造的曲线将越逼近原曲线树所对应的曲线。这就提供了一种很好的曲线编码方法，数据传输从根结点开始，按照从上到下，从左到右的次序传输结点值，这不仅可不断地接近曲线，而且根据实际的需要可随时终止传输。

2.4　曲线树构造的复杂度

曲线树构造过程中的计算主要集中在起始点的选取及曲线树的计算两部分。对于开曲线，起始点的计算的复杂度为 $O(m)$，而对于封闭曲线，起始点选取的计算复杂度为 $O(m^2)$，其中 m 为曲线上的点数。在已知起始点的情况下，构造曲线树的计算复杂度与曲线本身的特征有关，若构造的曲线树为 k 层，则计算复杂度最大为 $O(km)$。

3　曲线的匹配

通过相同的曲线对应着相同的曲线树，而对于相似的曲线，则需要通过定义曲线距离来衡量曲线间的相似程度。曲线距离为曲线识别这一机器视觉中的重要任务提供了一种可行且有效的判断依据。

定义 3　曲线 C_1，C_2 对应的曲线树分别为 T_1，T_2，取曲线树的深度都为 n（即取两曲线树的前 n 层），分别将两曲线树修改为深度为 n 的完全二叉树，其中需要添加的结点都取值为 0。两曲线的距离

$$Dist(C_1, C_2) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^i} w_i f(|h_{i,j} - \hat{h}_{i,j}|) \Big/ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{2^i} w_i$$

其中，$h_{i,j}$ 为与曲线树 T_1 对应的完全二叉树中第 i 层，第 j 个（从左数起）结点的值，$\hat{h}_{i,j}$ 为与曲线树 T_2 对应的完全二叉树中的第 i 层、第 j 个结点的值。$f(x)$ 是单调递增函数，其定义如下：

$$f(x)=\begin{cases}x^2+(1-a)x & x\in[0,a)\\ x & x\in[a,b]\\ x^2+(1-2b)x+b^2 & x\in(b,\infty)\end{cases}$$

其中,$0<a\leqslant b$。事实上,$f(x)$的作用是通过将局部差异较大的形状间的距离拉大,提高识别准确度,将局部差异较小的形状距离缩小,以增强曲线距离的抗扰动能力。$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$表示曲线树元素之间的差异对距离的影响的权值数列。

这里,$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$应根据实际需要设置合适的值。若视曲线的大尺度上的曲率差异与小尺度上曲率的差异相同时,则将$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$取为常值数列;若在识别曲线时,更注重的是大尺度上的曲率差异,则$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$为递减数列,否则取$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$为递增数列。由于通过选取合理的$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$可以得到令人满意的距离,从而不仅可接近人的视觉,而且可合理反映曲线间的相似程度。

n 表示参与曲线距离计算的层数。n 的大小根据实际精度需要和曲线的曲率决定。若 n 过大,则曲线距离受曲线边界的扰动影响较大;若 n 太小,则由于曲线的距离太过粗略,因此不能很好地反映曲线之间的差异。

但上述曲线距离的计算应在同一类型的曲线间进行,同一类型是指两曲线同为开曲线,或同为封闭曲线。

4　应用与实验

本文将曲线树应用于形状的匹配问题,它不仅计算量小,而且效果较好。这部分实验是用文中介绍的方法在中国地图中寻找台湾省的位置,中国地图中不同省区具有不同的形状,而且某些形状比较相似,故这一匹配实验具有一定的挑战性。其匹配的具体步骤如下:(1)提取中国地图中不同省区的形状;(2)构造这些形状的曲线树;(3)计算这些形状与台湾省形状的距离;(4)选取与台湾省形状距离很小的一个形状,即完成了匹配。图 4(a)为要匹配的我国台湾省的形状。图 4(b)~图 4(o)显示了从中国地图中提取的部分省区的形状。表 1 列出了中国地图中的台湾省形状与这些省区的形状之间的距离,在距离的计算中,取 $a=0.02$,$b=0.8$,$\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$取值为$\{(2/5)^i\}_{i=0}^{n-1}$。

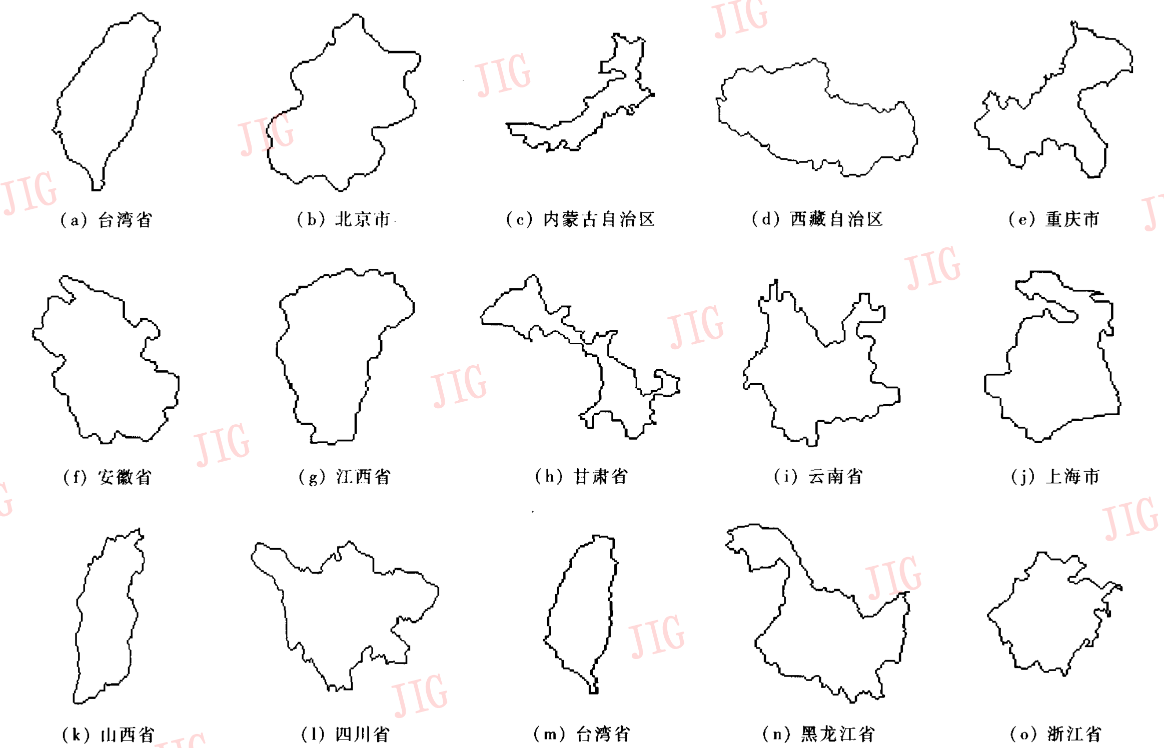


图 4　中国地图中的台湾省及部分省份的轮廓

Fig. 4　The map of Taiwan and some provinces in china map

表 1 图 4(b) ~ 图 4(o) 形状与图 4(a) 形状之间的距离

Tab. 1 Distance of shape (a) and shape (b) ~ (o)

形状	图 4(b)	图 4(c)	图 4(d)	图 4(e)	图 4(f)	图 4(g)	图 4(h)	图 4(i)	图 4(j)	图 4(k)	图 4(l)	图 4(m)	图 4(n)	图 4(o)
距离	0.3036	0.1795	0.1643	0.3373	0.2906	0.2096	0.2318	0.5057	0.2917	0.2083	0.2901	0.0463	0.1862	0.4623

两相似形状之间的距离一般小于 0.08。由表 1 可见,待识别的台湾省的形状与中国地图中台湾省的形状之间的距离显著小于它与其他地区的形状距离,而且在相似形状距离的范围内,可见利用文中提出的方法可以简单并准确地从一堆形状中识别出所需的形状。

在实验中需注意的是层数 n 与权值数列 $\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$ 的选取,因为合理选取曲线距离计算中曲线树的合适的层数 n,这直接影响到计算的复杂度和反映曲线间差异的曲线距离值。若 n 值过大,则可能使距离偏小,或会使曲线局部的扰动影响距离值,而且增加不必要的计算复杂度,如果在曲线匹配中不能显示相似曲线间的距离明显小于相差较大曲线间的距离,则将会给匹配带来困难;若 n 值过小,则不能很好地表现出两曲线局部的差异。至于权值数列 $\{w_i\}_{i=0}^{n-1}$,主要是根据人视觉识别中两曲线的局部曲率与总体曲率之间的差异和曲线差异之间的关系以及实际的识别需要而定。

5 结 论

本文通过对机器视觉领域中的重要问题——曲线的描述和匹配的探讨。提出了基于二叉树的新的曲线表示方法,其实质上是从不同的尺度描述曲线弯曲程度的方法。在这种曲线表示法的基础上定义的形状距离能够根据实际的精度需要快速、准确地寻找到相匹配的形状。

参考文献(References)

1 Park Hye Jin, Ji Min-Seak. Shape matching using the modified histogram based on chain code [J]. Proceeding of SPIE, 2002, **5283**:114 ~ 121.

2 Dai X l, Khorram S. A feature-based image registration algorithm using improved chain-code representation combined with invariant moments[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 1999, **37**(5): 2351 ~ 2362.

3 Saghri J A, Freeman H. Analysis of the precision of the generalized chain codes for the representation of planar curves [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1981, **3**(5):533 ~ 539.

4 Cosmin Grigorescu. Distance set for shape filters and shape recognition [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(10):1274 ~ 1285.

5 Zhang J, Zhang X, Krim H. Object representation and recognition in shape spaces[J]. Pattern Recognition, 2003, **36**(5):1143 ~ 1154.