

有理曲线曲面的降阶逼近

覃 廉 关履泰

(中山大学科学计算与计算机应用系, 广州 510275)

摘 要 基于齐次坐标空间, 提出了一种 NURBS 曲线曲面和有理 Bezier 曲线曲面降阶的简便方法。在齐次坐标空间中, 使降阶后的曲线曲面与原曲线曲面的差的 L2 范数达到极小, 将有理曲线曲面降阶问题转化为二次规划问题求解, 并给出了误差估计。实验结果表明, 该方法计算速度快, 降阶逼近效果好。

关键词 NURBS 有理 Bezier 降阶 二次规划

中图法分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2006)08-1062-06

Approximate Degree Reduction of Rational Curves and Surfaces

QIN Lian, GUAN Lü-tai

(Department of Scientific Computation & Computer Application, SUN YAT-SEN University, Guangzhou 510275)

Abstract Based on homogeneous coordinates, this paper presents a convenient algorithm for approximate degree reduction of NURBS and rational Bezier curves and surfaces. In homogeneous coordinates, the difference of the low degree curve/surface and high degree curve/surface is minimized. The problem of approximate multi-degree reduction of rational curves and surfaces is transformed into quadratic programming. Error estimate is presented. Experimental results show that this algorithm is very efficient.

Keywords NURBS, rational Bezier, degree reduction, quadratic programming

1 引言

曲线曲面的降阶逼近凭借其在实际应用中的背景, 成为计算机辅助设计中的一个研究热点。首先, 不同的 CAD 系统使用的多项式基的最高次数可能不同, 为了在不同 CAD 系统之间进行数据交换, 必须把高次的曲线曲面进行降阶。其次, 很多情况下原始曲线曲面是高次曲线曲面, 为了减少数据存储量和降低计算复杂性, 需要进行降阶处理。近年来, 曲线曲面降阶方面的研究有了许多研究成果, 主要集中在 Bezier 曲线降阶^[1-3], Bezier 曲面降阶^[4-7] 和 B 样条曲线降阶^[8-11]。

非均匀有理 B 样条 NURBS (non-uniform rational B-spline) 曲线曲面, 作为目前 CAGD 领域的国际标

准, 其重要地位不言而喻。但目前对于有理曲线曲面的降阶研究相对较少, 文献[12]以 Chebyshev 多项式理论为基础, 寻找最高次数为 n 的摄动多项式集, 使得分子与分母具有一个最佳线性公因子来达到有理 Bezier 曲线的降阶, 但方法计算繁琐, 无法一次降多阶。文献[13]将有理 Bezier 曲线降阶问题直接转化为非线性规划问题, 并采用遗传算法求解, 降阶效果比较好。但一般来说, 非线性规划问题的求解是非常费时的, 当有理 Bezier 曲线的控制点比较多时, 计算速度比较慢。对于 NURBS 曲线降阶问题, 文献[14]应用 NURBS 曲线的显式矩阵表示以及 Chebyshev 多项式理论进行处理, 实现了 NURBS 曲线的一次降多阶。该方法对单段 NURBS 曲线段降阶效果比较好, 但对整条曲线的降阶处理方法是, 先分段处理, 再将降阶后的各曲线段相同位

基金项目: 国家自然科学基金项目(60475042); 广东省自然科学基金重点项目(036608)

收稿日期: 2005-03-17; 改回日期: 2005-09-27

第一作者简介: 覃廉(1979 -), 男, 中山大学计算数学专业博士研究生。主要研究方向为最优化计算、计算机图形学等。E-mail: qin_lian@126.com

置上的控制点和权因子进行平均,从而得到近似最优的降阶逼近曲线。显然,该方法得到的并不是全局最优的降阶逼近曲线。对于 NURBS 曲面和 有理 Bezier 曲面的降阶问题,目前还没有找到公开发表的相关文献。

本文将 NURBS 曲线曲面和 有理 Bezier 曲线曲面放到齐次坐标空间中处理,在齐次坐标空间中求它们的最佳降阶逼近,然后再转化到仿射坐标空间。将 NURBS 曲线曲面和 有理 Bezier 曲线曲面降阶问题转化为二次规划问题,并进行误差分析,最后给出了数值算例。

2 NURBS 曲线的降阶逼近

设 P_1, P_2, \dots, P_n 为给定的 n 个数据点, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n (\omega_i \geq 0)$ 是对应的权因子,由这些控制点及其权因子定义的 r 次 NURBS 曲线为

$$f(t) = \frac{\sum_{j=1}^n P_j \omega_j N_{j,r}(t)}{\sum_{j=1}^n \omega_j N_{j,r}(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中, $N_{j,r}(t)$ 是 B 样条基函数。

在齐次坐标系中,3 维空间中的坐标 (x, y, z) 可以理解为高 1 维的齐次坐标系下的坐标 $(x\omega, y\omega, z\omega, \omega)$ 在超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影。将 NURBS 曲线放到齐次坐标系中考虑,那么 NURBS 曲线在齐次坐标系下可以表示为

$$\tilde{f}(t) = \sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中, $\tilde{P}_j = [P_j(x)\omega_j, P_j(y)\omega_j, P_j(z)\omega_j, \omega_j]$ 。即仿射坐标系中的 NURBS 曲线就是高 1 维的齐次坐标系中的 B 样条曲线在超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影。只要在齐次坐标系下寻找 $\tilde{f}(t)$ 的降阶逼近曲线 $\tilde{g}(t)$,然后作超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影变换,就可以得到降阶后的 NURBS 曲线 $g(t)$ 。

在齐次坐标系中,寻找一条 $k(k < r)$ 次 B 样条曲线

$$\tilde{g}(t) = \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j N_{j,k}(t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

其中, $\tilde{Q}_j = (Q_j(x)\bar{\omega}_j, Q_j(y)\bar{\omega}_j, Q_j(z)\bar{\omega}_j, \bar{\omega}_j)$,使得 $\tilde{g}(t)$ 尽可能地逼近 $\tilde{f}(t)$ 。定义如下目标函数,使得 $\tilde{g}(t)$ 与 $\tilde{f}(t)$ 的差在 L2 范数下达到极小,同时保证 $\bar{\omega}_i \geq 0$,

$$\begin{aligned} J &= \|\tilde{g}(t) - \tilde{f}(t)\|_2^2 = \int_0^1 [\tilde{g}(t) - \tilde{f}(t)]^2 dt \\ &= \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^m \tilde{Q}_i N_{i,k}(t) \right]^2 - 2 \left[\sum_{i=1}^m \tilde{Q}_i N_{i,k}(t) \right] \times \\ &\quad \left[\sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(t) \right] + \left[\sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(t) \right]^2 dt \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_i \tilde{Q}_j H_{ij} - 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{Q}_i P_j S_{ij} + G \end{aligned}$$

其中,

$$H_{ij} = \int_0^1 N_{i,k} N_{j,k} dt$$

$$S_{ij} = \int_0^1 N_{i,k} N_{j,r} dt$$

$$G = \int_0^1 \left[\sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(t) \right]^2 dt$$

都是已知的常数。由于 B 样条基函数是分段多项式,可以用符号计算求精确积分,也可以用数值积分方法求给定精度的积分值。

这样,NURBS 曲线降阶问题就转化为二次规划问题

$$\begin{aligned} \min J &= \min \tilde{Q}^T H \tilde{Q} - 2 \tilde{P}^T S \tilde{Q} \\ \text{s. t.} \quad &\bar{\omega}_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (1)$$

其中,

$$\tilde{Q} = [\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \dots, \tilde{Q}_m]^T$$

$$\tilde{Q}_j = [Q_j(x)\bar{\omega}_j, Q_j(y)\bar{\omega}_j, Q_j(z)\bar{\omega}_j, \bar{\omega}_j], \text{待求;}$$

$$\tilde{P} = [\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \dots, \tilde{P}_n]^T$$

$$\tilde{P}_j = [P_j(x)\omega_j, P_j(y)\omega_j, P_j(z)\omega_j, \omega_j]$$

H 为 $m \times m$ 阶矩阵; S 为 $n \times m$ 阶矩阵; G 为常数,在目标函数中可以省略。

对齐次坐标 \tilde{Q}_j 的每一个坐标分量,分别求解相应的二次规划问题式(1),即可求得齐次坐标系下的控制点 \tilde{Q}_j 的坐标。然后,将齐次坐标系坐标 \tilde{Q}_j 转化为仿射坐标系中的坐标 Q_j 和权因子 $\bar{\omega}_j$,就可以得到降阶后的 NURBS 曲线。

求解 \tilde{Q}_j 的前 3 个坐标分量 $Q_j(x)\bar{\omega}_j, Q_j(y)\bar{\omega}_j, Q_j(z)\bar{\omega}_j$,属于无约束的二次规划问题,可以直接转化为线性方程组求解。求解 \tilde{Q}_j 的最后一个坐标分量 $\bar{\omega}_j$,属于带不等式约束的二次规划问题,本文采用积极集法求解^[15],由 B 样条基函数局部支撑的特性,矩阵 H 必定是稀疏矩阵。利用这一特性,可以采用针对稀疏矩阵的更高效的求解方法。

该方法对控制网格端点插值或不插值的 NURBS 曲线降阶都适用。此外,如果要求降阶后的 NURBS 曲线插值原高阶 NURBS 曲线的端点,只需

要在二次规划问题式(1)中添加相应的约束条件

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j N_{j,k}(0) = \sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(0) \\ \sum_{j=1}^m \tilde{Q}_j N_{j,k}(1) = \sum_{j=1}^n \tilde{P}_j N_{j,r}(1) \end{cases}$$

即可。

3 NURBS 曲面的降阶逼近

由控制点 P_{ij} , 权因子 $\omega_{ij} (\omega_{ij} \geq 0) (i=1, 2, \dots, n_1, j=1, 2, \dots, n_2)$ 定义的 $r \times s$ 次 NURBS 曲面为

$$f(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} P_{ij} \omega_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v)}{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v)}$$

$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

其中, $N_{i,r}(u)$ 和 $N_{j,s}(v)$ 是 B 样条基函数。

同样, 在齐次坐标系下考虑 NURBS 曲面, NURBS 曲面在齐次坐标系下可以表示为

$$\tilde{f}(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v)}{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v)}$$

$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

其中, $\tilde{P}_{ij} = [P_{ij}(x)\omega_{ij}, P_{ij}(y)\omega_{ij}, P_{ij}(z)\omega_{ij}, \omega_{ij}]$ 。即仿射坐标系中的 NURBS 曲面就是高一维的齐次坐标系中的 B 样条曲面在超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影。只要在齐次坐标系下寻找 $\tilde{f}(u, v)$ 的降阶逼近曲面 $\tilde{g}(u, v)$, 然后进行超平面 $\omega = 1$ 上的中心投影变换, 就可以得到降阶后的 NURBS 曲面 $g(u, v)$ 。

在齐次坐标系中, 寻找一张 $k \times l (k < r, l < s)$ 次的 B 样条曲面

$$\tilde{g}(u, v) = \frac{\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}{\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v)}$$

$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$

其中, $\tilde{Q}_{ij} = (Q_{ij}(x)\bar{\omega}_{ij}, Q_{ij}(y)\bar{\omega}_{ij}, Q_{ij}(z)\bar{\omega}_{ij}, \bar{\omega}_{ij})$ 。定义如下目标函数, 使得 $\tilde{g}(u, v)$ 与 $\tilde{f}(u, v)$ 的差在 L2 范数下达到极小, 同时保证 $\bar{\omega}_{ij} \geq 0$,

$$\begin{aligned} J &= \|\tilde{g}(u, v) - \tilde{f}(u, v)\|_2^2 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [\tilde{g}(u, v) - \tilde{f}(u, v)]^2 dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \right]^2 - \\ &\quad 2 \left[\sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) \right] \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v) \right] + \\ &\left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v) \right]^2 dudv \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{g=1}^{m_1} \sum_{h=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} \tilde{Q}_{gh} H_{ijgh} - \\ &\quad 2 \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{g=1}^{m_1} \sum_{h=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} P_{gh} S_{ijgh} + G \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} H_{ijgh} &= \int_0^1 \int_0^1 N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) N_{g,r}(u) N_{h,s}(v) dudv \\ &= \int_0^1 N_{i,k}(u) N_{g,r}(u) du \int_0^1 N_{j,l}(v) N_{h,s}(v) dv \\ S_{ijgh} &= \int_0^1 \int_0^1 N_{i,k}(u) N_{j,l}(v) N_{g,r}(u) N_{h,s}(v) dudv \\ &= \int_0^1 N_{i,k}(u) N_{g,r}(u) du \int_0^1 N_{j,l}(v) N_{h,s}(v) dv \\ G &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(u) N_{j,s}(v) \right]^2 dudv \end{aligned}$$

都是已知的常数。跟曲线情况类似, 因为 B 样条基函数都是分段多项式, 可以用符号计算求精确积分, 也可以使用数值积分方法求给定精度的积分值。

如果令

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= [\tilde{Q}_{11}, \tilde{Q}_{12}, \dots, \tilde{Q}_{1m_2}, \tilde{Q}_{21}, \dots, \tilde{Q}_{2m_2}, \tilde{Q}_{31}, \dots, \tilde{Q}_{m_1, m_2}]^T \\ \tilde{P} &= [\tilde{P}_{11}, \tilde{P}_{12}, \dots, \tilde{P}_{1n_2}, \tilde{P}_{21}, \dots, \tilde{P}_{2n_2}, \tilde{P}_{31}, \dots, \tilde{P}_{n_1, n_2}]^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{(m_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)} &= \begin{bmatrix} H_{1111} & \dots & H_{1m_211} & H_{2111} & \dots & H_{m_1m_211} \\ H_{1112} & \dots & H_{1m_212} & H_{2112} & \dots & H_{m_1m_212} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{111m_2} & \dots & H_{1m_21m_2} & H_{211m_2} & \dots & H_{m_1m_21m_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{11m_1m_2} & \dots & H_{1m_2m_1m_2} & H_{21m_1m_2} & \dots & H_{m_1m_2m_1m_2} \end{bmatrix} \\ S_{(n_1 \times n_2) \times (m_1 \times m_2)} &= \begin{bmatrix} S_{1111} & \dots & S_{1m_211} & S_{2111} & \dots & S_{m_1m_211} \\ S_{1112} & \dots & S_{1m_212} & S_{2112} & \dots & S_{m_1m_212} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{111n_2} & \dots & S_{1m_21n_2} & S_{211n_2} & \dots & S_{m_1m_21n_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11n_1n_2} & \dots & S_{1m_2n_1n_2} & S_{21n_1n_2} & \dots & S_{m_1m_2n_1n_2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

\tilde{Q} 是 $(m_1 \times m_2)$ 维向量, 待求; \tilde{P} 是 $(n_1 \times n_2)$ 维向量; H 为 $(m_1 \times m_2) \times (m_1 \times m_2)$ 阶矩阵; S 为 $(n_1 \times n_2) \times (m_1 \times m_2)$ 阶矩阵; G 为常数, 在目标函数中可以省略。这样 NURBS 曲面降阶问题就可以归结为如下二次规划问题

$$\min J = \min \tilde{Q}^T H \tilde{Q} - 2 \tilde{P}^T S \tilde{Q} \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \bar{\omega}_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m_1; \quad j = 1, 2, \dots, m_2$$

同样,对齐次坐标 \tilde{Q}_{ij} 的每一个坐标分量,分别求解相应的二次规划问题式(2),即可求得齐次坐标系下的控制点 \tilde{Q}_{ij} 的坐标。然后,将齐次坐标系坐标 \tilde{Q}_{ij} 转化为仿射坐标系中的坐标 \tilde{Q}_{ij} 和权因子 $\bar{\omega}_{ij}$,就可以得到降阶后的 NURBS 曲面。

求解 \tilde{Q}_{ij} 的前 3 个坐标分量 $Q_{ij}(x) \bar{\omega}_{ij}$, $Q_{ij}(y) \bar{\omega}_{ij}$, $Q_{ij}(z) \bar{\omega}_{ij}$, 属于无约束的二次规划问题,可以直接转化为线性方程组求解。求解 \tilde{Q}_{ij} 的最后一个坐标分量 $\bar{\omega}_{ij}$, 属于带不等式约束的二次规划问题,这里采用积极集法求解^[15]。

同样,该方法对控制网格角点插值或不插值的 NURBS 曲面降阶都适用。此外,如果要求降阶后的 NURBS 曲面插值原高阶 NURBS 曲面的角点,只需要在二次规划问题式(2)中添加相应的约束条件

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(0) N_{j,l}(0) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(0) N_{j,s}(0) \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(0) N_{j,l}(1) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(0) N_{j,s}(1) \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(1) N_{j,l}(0) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(1) N_{j,s}(0) \\ \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \tilde{Q}_{ij} N_{i,k}(1) N_{j,l}(1) = \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \tilde{P}_{ij} N_{i,r}(1) N_{j,s}(1) \end{cases}$$

即可。

4 有理 Bezier 曲线曲面的降阶逼近

对于有理 Bezier 曲线

$$f(t) = \frac{\sum_{j=0}^n P_j \omega_j B_j^n(t)}{\sum_{j=0}^n \omega_j B_j^n(t)}, \quad 0 \leq t \leq 1$$

和有理 Bezier 曲面

$$f(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} P_{ij} \omega_{ij} B_i^{n_1}(u) B_j^{n_2}(v)}{\sum_{i=0}^{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \omega_{ij} B_i^{n_1}(u) B_j^{n_2}(v)}$$

$$0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$$

采用完全类似的方法,即可实现降阶逼近。只要将上述推导过程中的 B 样条基函数改为 Bernstein 基函数即可。

如果要求降阶后的有理 Bezier 曲线(曲面)插值原高阶有理 Bezier 曲线(曲面)的端点(角点),添

加约束条件

$$\begin{cases} \tilde{Q}_0 = \tilde{P}_0 \\ \tilde{Q}_m = \tilde{P}_m \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \tilde{Q}_{00} = \tilde{P}_{00} \\ \tilde{Q}_{0m} = \tilde{P}_{0m} \\ \tilde{Q}_{m0} = \tilde{P}_{m0} \\ \tilde{Q}_{mn} = \tilde{P}_{mn} \end{cases}$$

5 降阶问题误差分析

对于 NURBS 曲线降阶问题,设 \hat{Q} 是二次规划式(1)的极小点,那么在齐次坐标系中的降阶逼近误差就是

$$E = \min J = \hat{Q}^T H \hat{Q} - P^T S \hat{Q} + G$$

同理,对于 NURBS 曲面降阶问题,设 \hat{Q} 是二次规划式(2)的极小点,降阶逼近误差是

$$E = \min J = \hat{Q}^T H \hat{Q} - P^T S \hat{Q} + G$$

有理 Bezier 曲线曲面的降阶问题也有类似的逼近误差,只要将式中的 B 样条基函数改为 Bernstein 基函数即可。

6 数值算例

所有数值算例都使用 Matlab 7.0 编程,运行环境为 IBM X31 笔记本电脑,CPU 迅驰 1.3,内存 512M,操作系统 Windows XP。结果如图版 I、图版 II 图 1 ~ 图 11 所示,其中红色曲线表示原高阶曲线,黑色曲线表示降阶后的低阶曲线。

平均误差计算方法是,曲线在 $[0, 1]$ 区间等距取 100 个点,计算两曲线在相同参数 t 下的点的距离,然后取平均值;曲面则在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上等距取 50×50 个点,计算两曲面在相同参数 (u, v) 下的点的距离,然后取平均值。

例 1 (取自文献[14])已知 4 次 NURBS 曲线,控制点和权因子为 $(1, 2.5, 15)$, $(1.3, 3.2, 10)$, $(2, 4, 13)$, $(3, 5.2, 15)$, $(3.5, 5.2, 10)$; $(4, 4.8, 15)$, $(5.2, 3, 10)$, $(6, 2.7, 10)$, $(7, 2.5, 12)$, $(8.3, 3.5, 10)$, $(9, 4, 8)$, $(10, 5, 10)$ 。使用 13 个控制点,降阶为 3 次 NURBS 曲线,如图版 I 图 1 所示,平均误差为 0.005 5;使用 10 个控制点,降阶为 2 次 NURBS 曲线,如图版 I 图 2 所示,平均误差为 0.009 3;采用文献[14]的方法,降阶为 2 次 NURBS 曲线,如图版 I 图 3 所示,平均

误差为 0.022 5。由平均误差指标可以看出,本文方法得到的降阶 NURBS 曲线逼近精度更高。此外,本文方法可以根据精度要求和实际需要,灵活选取合适的控制点个数进行降阶;而文献[14]的方法得到的降阶后的 NURBS 曲线控制点个数只能固定为

原曲线控制点个数 - 降阶阶数

如果使用更多的控制点进行降阶,降阶后的 NURBS 曲线自由度更高,所以降阶逼近精度也会更高。而某些时候,对精度要求不是非常严格的情况下,又需要用更简单的方式表示降阶后的 NURBS 曲线,就可以使用较少的控制点进行降阶逼近。如图版 I 图 4 所示,使用 6 个控制点,降阶为 2 次 NURBS 曲线,平均误差为 0.059 5。因此,本文提供了比文献[14]更灵活的方式进行降阶逼近。在计算时间方面,本文方法和文献[14]的方法均非常快,耗时都不超过 0.1s。

例 2 已知有理 7 次 Bezier 曲线,控制点和权因子为(1, 1.95, 1.88), (2, 2.13, 1.68), (3, 1.49, 1.63), (4, 0.74, 1.73), (5, 0.69, 1.79), (6, 1.54, 2.18), (7, 2.67, 1.24), (8, 3.21, 1.08)。降阶为有理 6 次 Bezier 曲线,如图版 I 图 5 所示,平均误差为 0.001 3;降阶为有理 5 次 Bezier 曲线,如图版 I 图 6 所示,平均误差为 0.007 7。耗时均不超过 0.1s。采用文献[13]的方法(终止进化代数 250 代)降阶,可以得到类似的结果,平均误差分别为 0.001 0 和 0.006 5,但耗时为 0.6s。因为文献[13]使用非线性规划的方法求解,所以计算速度比较慢,特别是控制点比较多的情形。图版 II 图 7 所示为有理 31 次 Bezier 曲线,降阶为有理 25 次 Bezier 曲线,平均误差为 0.060 5,耗时 0.13s。采用文献[13]的方法(终止进化代数 250 代)降阶为有理 25 次 Bezier 曲线,平均误差为 0.055 1,耗时 1.8s。

例 3 已知 7×7 个控制点的 4×4 次 NURBS 曲面,如图版 II 图 8 所示,降阶为 5×5 个控制点的 3×3 次 NURBS 曲面,如图版 II 图 9 所示,平均误差为 0.281 5,计算时间小于 0.1s。

例 4 已知有理 6×6 次 Bezier 曲面,如图版 II 图 10 所示,降阶为有理 5×5 次 Bezier 曲面,如图版 II 图 11 所示,平均误差为 0.195 3,计算时间小于 0.1s。

7 结 论

本文提出了一种在齐次坐标空间中进行有理参

数曲线曲面降阶逼近的方法,把降阶前后曲线曲面之差的 L2 范数作为目标函数,将 NURBS 曲线曲面和有理 Bezier 曲线曲面的降阶问题转化为二次规划问题来求解,实现了一次降多阶。数值实验结果表明,本文方法降阶逼近效果好。由于目前二次规划问题已经有很成熟的理论和算法,所以计算速度很快。如果需要使降阶后的曲线曲面插值原高阶曲线曲面的某些关键点(如端点角点等),只需要添加相应的约束条件即可。此外,对于 NURBS 曲线曲面降阶问题,本文方法可以根据精度要求或实际需要,使用任意个数的控制点进行降阶。因此,对比文献[13]、[14]的方法,本文方法更灵活,更实用。并且本文方法很好解决了有理参数曲面的降阶问题。

参 考 文 献 (References)

- HU Shi-min, SUN Jia-guang, JIN Tong-guang, *et al.* Approximate degree reduction of Bezier curves [J]. *Tsinghua Science and Technology*, 1998, 3(2): 997 ~ 100.
- CHEN Guo-dong, WANG Guo-jin. Degree reduction approximation of Bezier curves by generalized inverse matrices [J]. *Journal of Software*, 2001, 12(3): 435 ~ 439. [陈国栋, 王国瑾. 基于广义逆矩阵的 Bezier 曲线降阶逼近[J]. *软件学报*, 2001, 12(3): 435 ~ 439.
- BAI Bao-gang, JIN Xiao-gang, FENG Jie-qing. Adaptive degree reduction of cubic Bezier curves [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2004, 16(11): 1600 ~ 1602. [白宝钢, 金小刚, 冯结青. 三次 Bezier 曲线的自适应降阶[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2004, 16(11): 1600 ~ 1602.
- HU Shi-min, ZHENG Guo-qin, SUN Jia-guang. Approximate degree reduction of rectangular Bezier surface [J]. *Chinese Journal of Software Research*, 1997, 4(4): 353 ~ 361.
- HU Shi-min, ZUO Zheng, SUN Jia-guang. Approximate degree reduction of triangular Bezier surfaces [J]. *Tsinghua Science and Technology*, 1998, 3(2): 1001 ~ 1004.
- ZHOU Deng-wen, LIU Fang, JU Tao, *et al.* New method of approximate degree reduction of Bezier surfaces [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2002, 14(6): 553 ~ 556. [周登文, 刘芳, 居涛等. 张量积 Bezier 曲面降阶逼近的新方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2002, 14(6): 553 ~ 556.
- GUO Qing-wei, ZHU Gong-qin. New approach to approximate multi-degree reduction of tensor product Bezier surfaces [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2004, 16(6): 778 ~ 782. [郭清伟, 朱功勤. 张量积 Bezier 曲面降多阶逼近的方法[J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2004, 16(6): 778 ~ 782.
- YONG Jun-hai, HU Shi-min, SUN Jia-guang. Degree reduction of uniform B-spline curves [J]. *Chinese Journal of Computers*, 2000, 23(5): 537 ~ 540. [雍俊海, 胡事民, 孙家广. 均匀 B 样条曲线

- 的降阶[J]. 计算机学报, 2000, 23(5): 537 ~ 540.
- 9 QIN Kai-huai, HUANG Hai-kun. New algorithm for degree reduction of B-spline curves [J]. Chinese Journal of Computers, 2000, 23(3): 306 ~ 310. [秦开怀, 黄海昆. B 样条曲线降阶新方法[J]. 计算机学报, 2000, 23(3): 306 ~ 310.
- 10 PAN Ri-jing, YAO Zhi-qiang, PAN Ri-hong. Degree reduction formula and approximate of degree reduction of B-spline curves [J]. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(10): 1254 ~ 1259. [潘日晶, 姚志强, 潘日红. B 样条曲线的降阶公式及近似降阶方法[J]. 计算机学报, 2003, 26(10): 1254 ~ 1259.
- 11 ZHANG Cai-ming, HE Jun, ZHANG Rui. Degree reduction of B-spline curves using perturbations constraint and least squares approximation [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(10): 1392 ~ 1395. [张彩明, 何军, 张锐. 扰动约束和最佳平方逼近的 B 样条曲线的降阶[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(10): 1392 ~ 1395.
- 12 Sederberg T W, Chang G Z. Best linear common divisor for approximation degree reduction [J]. Computer Aided Design, 1993, 25(3): 163 ~ 168.
- 13 KANG Bao-sheng, SHI Mao, ZHANG Jing-qiao. Degree reduction of rational Bezier Curves [J]. Journal of Software, 2004, 15(10): 1522 ~ 1527. [康宝生, 石茂, 张景峒. 有理 Bezier 曲线的降阶[J]. 软件学报, 2004, 15(10): 1522 ~ 1527.
- 14 CHENG Min, WANG Guo-jin. Multi-degree reduction of NURBS curves based on their explicit matrix representation and polynomial approximation theory [J]. Science in China, 2004, 47(1): 44 ~ 54.
- 15 YUAN Ya-xiang, SUN Wen-yu. Optimization theory and method [M]. Beijing: Science Press, 1997. [袁亚湘, 孙文瑜著. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997.

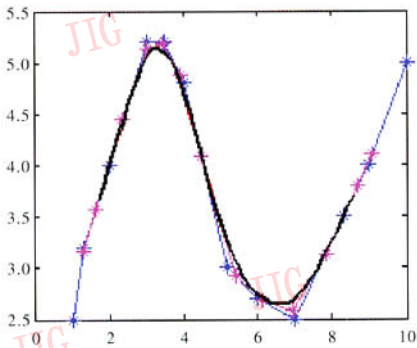


图1 NURBS曲线降1阶, 13个控制点(平均误差0.005 5)
Fig.1 1 degree reduction of NURBS curve,
13 control points(average error 0.005 5)

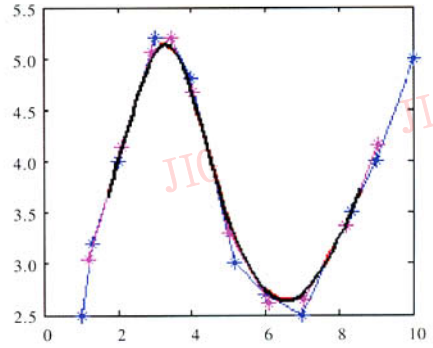


图2 NURBS曲线降2阶, 10个控制点(平均误差0.009 3)
Fig.2 2 degree reduction of NURBS curve,
10 control points(average error 0.009 3)

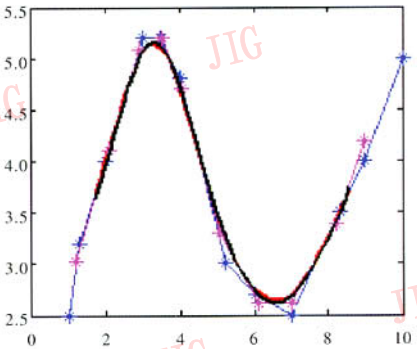


图3 文献[14]方法, NURBS曲线降2阶(平均误差0.022 5)
Fig.3 2 degree reduction of NURBS curve,
Using the method of Document[14](average error 0.022 5)

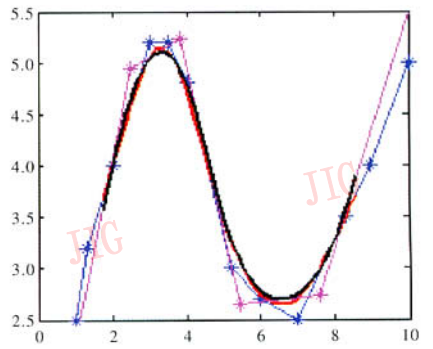


图4 NURBS曲线降2阶, 6个控制点(平均误差0.059 5)
Fig.4 2 degree reduction of NURBS curve,
6 control points(average error 0.059 5)

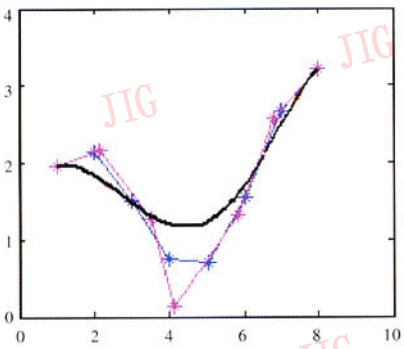


图5 有理Bezier曲线降1阶(平均误差0.001 3)
Fig.5 1 degree reduction of rational Bezier curve,
(average error 0.001 3)

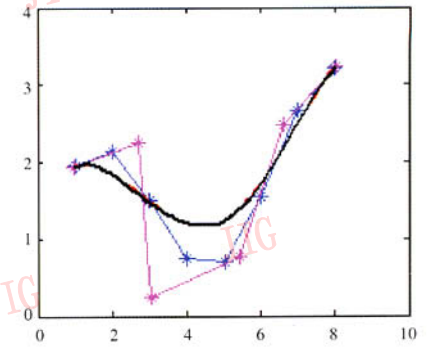


图6 有理Bezier曲线降2阶(平均误差0.007 7)
Fig.6 2 degree reduction of rational Bezier curve,
(average error 0.007 7)

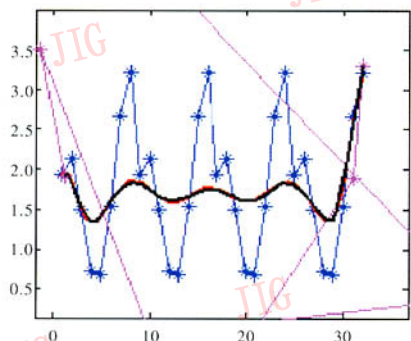


图7 有理Bezier曲线降6阶(平均误差0.0605)
Fig.7 6 degree reduction of rational Bezier curve,
(average error 0.0605)

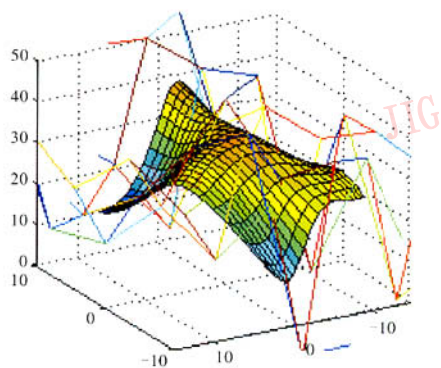


图8 4x4次NURBS曲面(原曲面)
Fig.8 4x4 degrees NURBS surface(original surface)

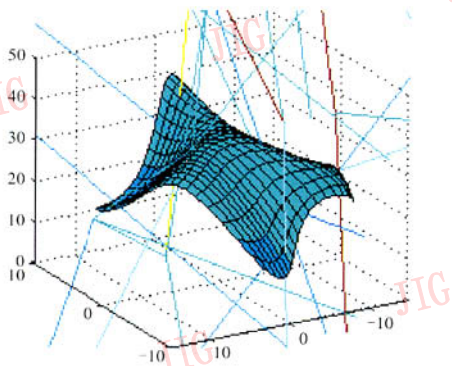


图9 3x3次NURBS曲面(平均误差0.2815)
Fig.9 3x3 degrees NURBS surface(average error 0.2815)

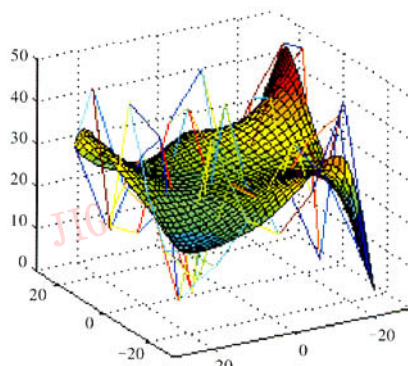


图10 有理6x6次Bezier曲面(原曲面)
Fig.10 6x6 degrees rational Bezier surface
(original surface)

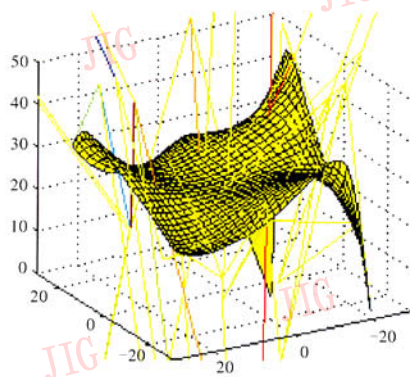


图11 有理5x5次Bezier曲面(平均误差0.1953)
Fig.11 5x5 degrees rational Bezier surface(average error 0.1953)