

基于图像特征方向的各向异性扩散滤波方法

钱伟新 刘瑞根 王婉丽 祁双喜 王伟 程晋明

(中国工程物理研究院流体物理研究所, 绵阳 621900)

摘 要 传统的各向异性扩散滤波方法都是从偏微分方程本身出发的, 理论上的分析较为复杂。本文研究了基于图像特征方向的内在正交坐标系, 分析了在此框架下的扩散滤波机制, 然后直接从该坐标系下建立各向异性扩散滤波方案。这样的扩散滤波方法更加直观, 可以简化理论分析。在此框架下, 提出了一种新的各向异性扩散滤波方法。数值实验结果表明, 新的扩散滤波方法可以更好地考虑图像的局部特性, 从而完成细节保护和噪声消除的双重功能。所以, 基于图像特征方向建立各向异性扩散滤波方法更能达到我们预期的效果, 该设计方法是有效的。

关键词 特征方向 各向异性扩散 偏微分方程(PDE)

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2006)06-0818-05

The Anisotropic Diffusion Methods Based on the Directions of the Image Feature

QIAN Wei-xin, LIU Rui-gen, WANG Wan-li, QI Shuang-xi, WANG Wei, CHENG Jin-ming

(Institute of Liquid Physics, China Academy of Engineering Physics, Mianyang 621900)

Abstract Traditional anisotropic diffusion methods always come from PDE (partial differential equation) itself. Which results in complex theoretic analysis. The inner orthogonal coordination based on the directions of the image feature is discussed in this paper. Subsequently, anisotropic diffusion methods based on the inner orthogonal coordination can be constructed directly. Which are more intuitionistic than the traditional methods, and can simplify the analysis in theory as well. A new anisotropic diffusion filtering method which is based on this framework is proposed in this paper. The numerical results show that the new method takes the local feature of the image into good account and can accomplish both detail-preserving and noise-removing. The anisotropic diffusion methods based on the direction of the image feature proposed in the paper is efficient and can get anticipate results.

Keywords direction of the image feature, anisotropic diffusion, PDE (partial differential equation)

1 引 言

基于 PDE (partial differential equation) 的图像处理方法是最近 10 年来在图像处理领域中研究较为活跃的一个发展方向。它被广泛应用于图像滤波^[1-3]、图像增强^[4,5]、边缘检测^[6]、图像分割^[7]等众多的图像处理领域。基于 PDE 的图像处理方法首先得益于高斯尺度空间^[8], 信号的高斯卷积相当于求解一步热传导方程。进一步, Perona 和

Malik^[6]提出了采用方向性分布系数代替高斯卷积的各向异性扩散滤波方法, 取得了令人振奋的效果。随后, 人们开始关注此类方法在不同场合的应用, 特别是基于非线性扩散方程的滤波方案, 更是受到了众多研究者的青睐, 也提出了许多好的算法, 具有代表性的有全变分方法^[1]、张量扩散方案^[4]。

各向异性扩散滤波方程中采用一个扩散系数函数代替了常数的系数, 而这个扩散系数是根据局部的图像信息而设计的, 一般设计成图像梯度的一个减函数。因此, 它可以考虑到图像的各向异性性质,

收稿日期: 2005-04-19; 改回日期: 2005-09-06

第一作者简介: 钱伟新 (1979 ~), 男。现为中国物理研究院光学专业硕士研究生。主要研究方向为闪光照相 CCD 光电接收系统及其图像处理方法。已发表论文 2 篇。E-mail: qwensence@etang.com

是一种自适应的非线性滤波方法。

单单从各向异性扩散滤波方程看,其扩散机制很不明显,因此要从物理数学上分析各向异性扩散滤波方程,在某种程度上只是根据所采用的偏微分方程,这样的分析问题并不直观。

从各向异性扩散方程的内在坐标系入手,分析了在内在坐标系下扩散方程产生作用的机理,并提出了在此坐标系下设计扩散滤波方程的方法。该方法比从传统的偏微分方程入手的方法更加直观,而且由此方法来设计扩散滤波方程也更有效率。提出了在内在坐标系下基于图像特征的一种新的各向异性扩散滤波方案,给出了数值实验结果。结果表明,新的各向异性扩散滤波方法可以更好地考虑图像的局部特性,从而完成细节保护和噪声消除的双重功能。

2 基于图像特征的内在坐标系

P-M 扩散方程的表达式为

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla u|) \cdot \nabla u) & t > 0 \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) & t = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中, c 为扩散程度的主控因子, $u_0(x, y)$ 为初始图像。这是偏微分方程领域内比较典型的初值问题,在不同的 t 时刻可以得到在此时刻下扩散滤波后的图像。 ∇u 表示图像的梯度,它是一个图像空间内的梯度矢量,表示为 $\nabla u = (u_x, u_y)$ 。一般来讲,梯度是反映图像特征的一个物理量; $c(|\nabla u|)$ 一般称之为扩散系数函数,它是梯度幅值的减函数,即梯度大的地方,扩散系数小;在梯度小的方向,扩散系数大,这样就形成了方向性的自适应扩散,即与图像局部梯度有关的扩散滤波。可以想象 $c(|\nabla u|)$ 的设计思路应该满足如下的 3 个原则:

- (1) $c(|\nabla u|)$ 是以 $|\nabla u|$ 为自变量的减函数,并且有 $c(|\nabla u|) > 0$;
- (2) $|\nabla u| \rightarrow \infty$ 时, $c(|\nabla u|) = 0$;
- (3) $|\nabla u| \rightarrow 0$ 时, $c(|\nabla u|) = 1$ 。

为了建立扩散方程的内在坐标形式,定义内在坐标系 (η, ε) : η 为图像梯度方向,即垂直图像特征(边缘)的方向; ε 为垂直图像梯度的方向,即 ε 为沿图像特征(边缘)的方向。在图像空间坐标系 (x, y) 下对应的 (η, ε) 有如下表示:

$$\eta = \frac{(u_x, u_y)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}}, \varepsilon = \frac{(-u_y, u_x)}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad (2)$$

然后,将 u 分别对两个方向求二阶导数,可以得到:

$$u_{\eta\eta} = \frac{u_x^2 u_{xx} + 2u_x u_y u_{xy} + u_y^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (3)$$

$$u_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{u_x^2 + u_y^2} \quad (4)$$

将 P-M 扩散方程式(1)在 (η, ε) 下展开,可得:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(|\nabla u|) \left\{ u_{\varepsilon\varepsilon} + \left[1 + \frac{|\nabla u| c'(|\nabla u|)}{c(|\nabla u|)} \right] u_{\eta\eta} \right\} \quad (5)$$

式(5)就是在内在坐标系下 (η, ε) 建立的 P-M 各向异性扩散方程。取如下的扩散系数函数^[6]:

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / K^2} \quad (6)$$

把式(6)代入到式(5)经过整理可得如下的形式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / K^2} \left(\frac{1 - |\nabla u|^2 / K^2}{1 + |\nabla u|^2 / K^2} u_{\eta\eta} + u_{\varepsilon\varepsilon} \right) \quad (7)$$

最后得到的式(7)是一个非常清晰直观的扩散关系式:当 $|\nabla u|/K \leq 1$ 时, P-M 方程是正向扩散的模型,可以使得图像变得光滑;当 $|\nabla u|/K > 1$ 时,在沿 η 方向上的扩散系数小于零,所以 P-M 方程存在着一个沿 η 方向的反向扩散过程,可以取得增强边缘的效果。但是数学理论表明反向扩散是一个不稳定的过程。因此将 P-M 扩散方程建立在内在坐标系下,很容易发现它是一个病态的方程,而不需要进行繁琐的数学推导。

为了得到没有反向扩散的各向异性扩散模型,需要修改扩散系数函数。因此,选取如下的扩散系数函数:

$$c(|\nabla u|) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2 / K^2}} \quad (8)$$

此扩散系数函数同样符合关于扩散系数函数选取的 3 个原则。将式(8)代入式(5)可以得到如下的内在坐标系下的扩散方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2 / K^2}} \left(\frac{1}{1 + |\nabla u|^2 / K^2} u_{\eta\eta} + u_{\varepsilon\varepsilon} \right) \quad (9)$$

根据式(9),进一步分析各向异性扩散方程的扩散机制:在扩散过程中存在一个总的控制扩散程度的

因子 $\frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2 / K^2}}$, 它使得在图像梯度大的地方扩散程度小,在图像梯度小的地方扩散程度大。同时,对于内在坐标系中的两个不同的方向,同样也有控制其扩散程度的因子,在 η 方向(沿梯度方向)

上,控制因子为 $\frac{1}{1+|\nabla u|^2/K^2}$,这使得在梯度大的地方的扩散系数非常小,扩散程度很小;在 ε 方向(垂直梯度方向)上,扩散程度为最大。

通过引入了基于图像特征方向的内在坐标系,使得扩散机制变得十分直观。以上分析表明,采用各向异性扩散方法来进行图像消噪符合如下的平滑原则^[9]:

(1)平滑量的控制 在图像特征多的区域平滑量应该尽可能地小甚至不平滑;在图像特征少的区域或没有图像特征的区域平滑量要大;

(2)平滑方向的控制 沿图像特征方向的扩散量大,穿越图像特征的扩散量小甚至不平滑。

3 基于图像特征方向各向异性扩散滤波方法的设计

通过上节的分析,可以得到基于图像特征方向的扩散方程的一般表达式:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(au_{\eta\eta} + bu_{\varepsilon\varepsilon}) \quad (10)$$

其中, c 为全局扩散因子,内在坐标扩散因子 a 和 b 分别控制沿内在坐标两个方向 η 和 ε 的平滑程度。选择 $a=0, b=1$,这样就使得扩散只沿着 ε 方向进行。也可以采用如下的方法来进行归一化,即使得 a 和 b 满足 $\sqrt{a^2+b^2}=1$ 。一般来说 c 的选择比较重要,一般选择扩散系数函数来计算 c, a 和 b 可以根据需要进行一些特殊的选择。

另一个问题就是 η - ε 方向的选择,采用什么样的表示方法才能正确地表示图像的特征。关于这个方面更详细的讨论可参见文献[9]。基于这点说明,在下面的讨论中,都采用梯度方法来表示图像的特征,即图像特征方向为边缘方向,梯度方向为垂直于边缘的方向。将图像特征规定为图像边缘是为了讨论的方便。

要设计以上基于图像特征方向各向异性扩散滤波方法,主要是选取控制不同扩散量的3个控制因子。前面已经得到了图像消噪的两个原则,把这两个原则引入到本文的设计方法中,设计 c 为平滑量的主控因子,则 c 可以选择P-M扩散滤波方案中的扩散系数函数 $c(|\nabla u|)$, a 和 b 是对平滑方向的控制,则应该设计的 b 要相对大得多,而 a 为一个较小的值。在本文的扩散滤波方案中,设计 $a=c(|\nabla u|)$,则相应的 b 就为 $b=\sqrt{1-c^2(|\nabla u|)}$,这样设计出来的扩散方

案就可以满足上述的要求:假设 $c(|\nabla u|)$ 很小,则待处理区域存在图像边缘信息,所以 b 就相对大一些;假设 $c(|\nabla u|)$ 很大,则待处理区域是图像的平坦区域, a 很大, b 就很小了,这样此时的扩散主要是由 η 方向的扩散来控制,所以图像的平滑度很大,达到平坦区域扩散量大的要求。

对于一般的图像滤波应用,需要保持图像最大的不失真度。所以,在实际应用中,又采取了如下的高保真项,用来保持滤波图像与原始图像之间的接近度:

$$hifi = \lambda(1 - c(|\nabla u|))(u - u_0) \quad (11)$$

其中, λ 为调整参数,一般是一个较小的值;因子 $(1 - c(|\nabla u|))$ 的作用是,如果待处理区域是在图像特征区域,则有较小的 $c(|\nabla u|)$, $c(|\nabla u|) \approx 0$, $(1 - c(|\nabla u|)) \approx 1$,从而使得滤波结果最大可能地接近原始数据,进一步保护了边缘等特征信息;如果待处理区域是在图像平坦区域,则有较大 $c(|\nabla u|)$, $c(|\nabla u|) \approx 1$, $(1 - c(|\nabla u|)) \approx 0$,从而使得扩散程度最大。

综上,得到了新的基于图像特征方向的扩散方程如下:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(|\nabla u|)(c(|\nabla u|)u_{\eta\eta} + \sqrt{1 - c^2(|\nabla u|)}u_{\varepsilon\varepsilon}) - \lambda(1 - c(|\nabla u|))(u - u_0) \quad (12)$$

4 与几类典型的非线性扩散方程的关系

在上节中,建立了基于图像特征方向各向异性扩散滤波方案的一般形式,如果选取不同的参数,可以得到几类比较典型的各向异性扩散方案。可以说大部分各向异性扩散滤波方法都可以采用基于图像特征方向各向异性扩散的一般形式来表示。因此采用典型的各向异性扩散方程的数学分析方法,也可以得到基于图像特征方向各向异性扩散滤波方法的理论结果。

在第2节中,得到了图像在 ε 方向的二阶导数 $u_{\varepsilon\varepsilon}$,此二阶导数一般可以写成如下的梯度形式:

$$\begin{aligned} u_{\varepsilon\varepsilon} &= |\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) \\ &= \Delta u - \nabla^2 u(\nabla u, \nabla u) / |\nabla u|^2 \end{aligned} \quad (13)$$

对于式(10),取 $c=1, a=0, b=1$,则可以得到如下的各向异性扩散滤波方案:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u_{\varepsilon\varepsilon} \quad (14)$$

方程式(14)的几何意义是: u 只在沿图像特征(如边缘)的方向扩散,而在其他的任何方向都不进

行扩散。因此,此方案也称之为纯粹的各向异性扩散滤波方案。

将式(13)代入方程式(14),就可得到如下的称之为“平均曲率流”的各向异性扩散滤波方案:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) \quad (15)$$

方程式(14)和式(15)在本质上是一致的。从形式上看,方程式(14)比方程式(15)可以更加直观地看出扩散的机制,而不需要复杂的理论分析。

在式(10)中,令 $c = c(|\nabla u|)$, $a = 0, b = 1$, 则可以得到另一种基于图像特征方向各向异性扩散滤波方案:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(|\nabla u|) u_{xx} \quad (16)$$

此方案的扩散机制是:在图像的特征处,由于扩散系数 $c(|\nabla u|)$ 有非常小的值,所以在沿垂直于图像梯度的方向进行的扩散也较小,保持了图像的边缘。在平坦区域,由于扩散系数 $c(|\nabla u|)$ 有较大的值,所以相应的扩散也较大,达到了平滑的目的。

再将式(13)代入式(16),就可得到称之为“选择性平滑”的各向异性扩散滤波方案^[3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c(|\nabla u|) |\nabla u| \operatorname{div}(\nabla u / |\nabla u|) \quad (17)$$

同样,扩散方程式(17)没有方程式(16)来得直观和简洁。

上面的讨论说明将各向异性扩散方程建立在基

于图像特征方向的内在坐标系下是一种简单明了的方法,扩散机制更加直观明显,易于理解。

5 数值实验结果及分析

分别进行两组数值实验。第 1 组分别沿两个方向的扩散滤波,说明平滑原则中关于对图像特征方向的控制;第 2 组说明第 3 节中提出的基于图像特征方向各向异性扩散滤波方法的有效性。

实验条件如下:迭代次数为 300 次,扩散系数函数中的边缘阈值 $K = 2$ 。

另外,采用均方误差(MSE)和信噪比改善因子(PSNR)来衡量图像消噪的效果。图像的均方误差和信噪比改善因子分别由下式给出:

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y(i, j) - s(i, j))^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N s(i, j)^2} \quad (18)$$

$$PSNR = -10 \lg \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (y(i, j) - s(i, j))^2}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (x(i, j) - s(i, j))^2} \quad (19)$$

其中, M 和 N 分别为图像的宽度和高度, $s(i, j)$ 是未加噪声的原始图像, $x(i, j)$ 是加入噪声后的图像, $y(i, j)$ 是滤波结果。

两组实验结果分别如图 1 和图 2 所示。

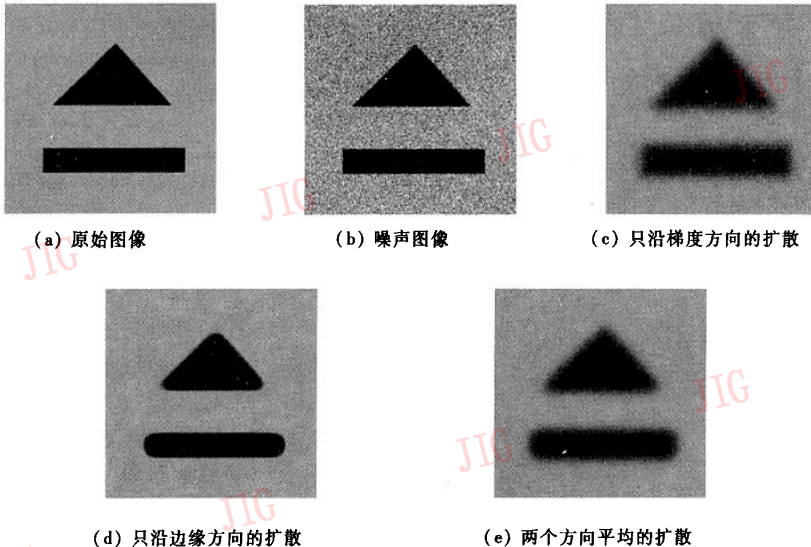


图 1 在内在坐标系中的扩散滤波

Fig. 1 Diffusion filtering based on orthogonal inner coordination

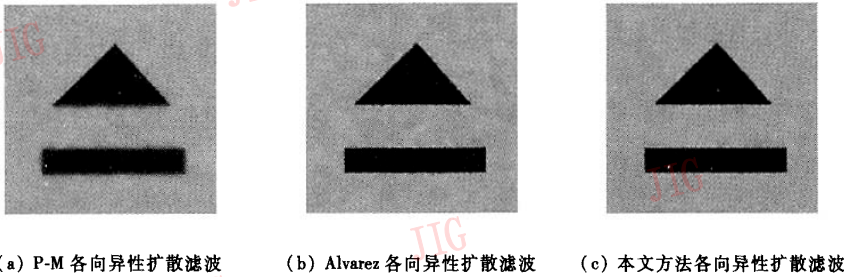


图 2 3 种扩散滤波方法的效果比较

Fig. 2 Comparison of our method with P-M's and Alvarez's

图 1 表明,在上述扩散中,沿梯度方向进行的扩散是图像产生模糊的主要因素,而沿边缘方向进行的扩散可以较好地保持边缘,并在其他区域取得平滑效果。

为了在统一的框架下比较 3 种方法的性能,修改 P-M 方程,加入高斯卷积来估计图像梯度,后两种方法也都采用了高斯卷积来估计图像梯度值。本组实验的迭代次数为 600,边缘阈值 $K=2$ 。表 1 是以上 3 种方法的滤波性能参数比较。

表 1 3 种各向异性扩散滤波方案的消噪性能参数

Tab.1 The parameters of three nonlinear diffusion filters

	良态 P-M 方法	Alvarez 方法	本文方法
信噪比改善因子 (PSNR)	7.010 495	14.216 522	14.449 765
均方误差(MSE)	0.004 871	0.000 932	0.000 884

图 2 和表 1 说明,基于图像特征方向各向异性扩散滤波方法要优于改进的 P-M 方法和 Alvarez 方法,基于图像特征方向进行各向异性扩散滤波方法的设计是有效的。

6 结 论

本文从各向异性扩散方程的内在坐标系入手,分析了在内在坐标系下方程产生各向异性扩散作用的机理和扩散滤波的自适应过程,指出了他们满足图像平滑的两个基本原则。在此框架下,提出了在内在坐标系下设计扩散滤波方程的一般方法,该方法比传统的偏微分方程更加直观地表明了扩散的机

制以及与图像平滑的两个基本原则的一致性。另外,还设计了在内在坐标系下基于图像特征的一种新的各向异性扩散滤波方法。数值实验结果表明,新的各向异性扩散滤波方法可以更好地考虑图像的局部特性,从而完成细节保护和噪声消除的双重功能。

参考文献 (References)

- Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, **60**(1~4):259~268.
- Catte F, Lions P, Morel J, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. *Science and Industry Advances with Mathematics Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(1):182~193.
- Alvarez L, Lions P, Morel J. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion II[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, *J. Numerical Analysis*, 1992, **29**(3):845~866.
- Weickert J. Coherence-enhancing diffusion filtering[J]. *International Journal of Computer Vision*, 1999, **31**(2/3):111~127.
- Gilboa G, Sochen N. Regularized shock filters and complex diffusion [A]. In: *Proceedings of Europe Conference on Computer Vision [C]*, Denmark, Copenhagen, 2002: 399~413.
- Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1990, **12**(7):629~639.
- Chen Y M, Vemuri B C, Wang L. Image denoising and segmentation via nonlinear diffusion [J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2000, **39**(5/6):131~149.
- Koenderink J. The structure of images[J]. *Biological Cybernetics*, 1984, **50**(5):363~370.
- Carmona Rene A, Zhong Sifen. Adaptive smoothing respecting feature directions [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, **7**(3):353~358.