

# 基于 Chebyshev 多项式的消除 Gibbs 伪影的快速算法

冯前进 黄鑫 冯衍秋

(南方医科大学生物医学工程学院, 广州 510515)

**摘要** 在磁共振成像中通常通过减少相位编码次数来缩短数据采集时间, 这样只能得到部分原始  $k$  空间数据, 运用傅里叶变换成像时会在图像中产生常见的 Gibbs 环状伪影。Gegenbauer 重建方法是一种能够有效消除 Gibbs 环状伪影并能保持高分辨率的图像重建方法, 但是这种方法的缺点在于重建时间长且参数选择必须满足严格的限制且对图像重建质量影响较大。本文提出的基于 Chebyshev 多项式的逆多项式重建方法是针对 Gegenbauer 方法的改进算法, 在改进原有算法不足的同时有效提高了重建精度。实验结果验证了该算法的有效性。

**关键词** 磁共振成像 Gibbs 环状伪影 部分  $k$  空间数据 逆多项式重建方法

**中图分类号**: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2006)08-1132-07

## A Fast Algorithm to Reduce Gibbs Ringing Artifact Based on the Chebyshev Polynomials

FENG Qian-jin, HUANG Xin, FENG Yan-qiu

(School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou 510515)

**Abstract** In magnetic resonance imaging, the number of phase-encoded signals is often reduced to minimize the acquisition time. The partial  $k$ -space data lead to the famous Gibbs artifact with Fourier transform method. The Gegenbauer reconstruction method has been shown to effectively eliminate the Gibbs artifact and restore high resolution. However, the disadvantages of using the Gegenbauer method are more computational time, and more constrains, where parameters must satisfy certain conditions. The paper shows that the inverse polynomial reconstruction method (IPRM) based on Chebyshev polynomials effectively improves the Gegenbauer method and reduces reconstruction error. In this paper, we discuss IPRM based on Chebyshev polynomials and experimental results. The proposed method is verified with experiments of artifact removal.

**Keywords** magnetic resonance imaging, Gibbs ringing artifact, partial  $k$ -space data, IPRM

### 1 引言

磁共振成像的主要不足在于它扫描所需时间较长, 因而对一些危重病人或不配合的病人们的检查非常困难。在临床应用中, 常常需要减少相位编码次数来缩短采集时间, 但这样只能得到部分原始数据, 对部分数据进行傅里叶变换方法重建的过程中, 会使傅里叶变换受到限制, 在重建图像中出现常见的

Gibbs 伪影, 这种截断频谱成像方法常常是丢掉某些高频数据。

本文研究目的是在 MR 重建过程中消除 Gibbs 伪影从而改进图像的成像质量。现在一些方法已经能够有效地消除 Gibbs 现象, 例如对原始数据进行滤波或是对重建后的图像进行后处理。这些方法主要通过削弱高频信息从而减少 Gibbs 伪影, 但是这样对图像分辨率损失较大, 从而不可避免地引起了重建图像的边缘模糊。Gegenbauer 重建方法是一种

基金项目: 国家“973”重点基础研究发展规划项目(203CB716102); 国家自然科学基金项目(30130180)

收稿日期: 2004-12-08; 改回日期: 2005-11-08

第一作者简介: 冯前进(1974 - ), 男, 副教授, 博士。主要研究领域为医学图像处理。E-mail: kxm@fimmu.com

能够保持图像高分辨率的重建方法,它不但能够有效消除 Gibbs 现象并且能很好地保持重建图像的边缘。Gegenbauer 重建方法的关键在于其中参数选择,参数的正确选择对重建图像质量影响较大。尽管一些文章也对其中的参数选择进行了讨论<sup>[1]</sup>,但是依然要满足严格的限制条件。本文提出逆多项式重建方法用来代替传统的傅里叶变换方法进行 MR 图像重建。逆多项式重建方法是相对于 Gegenbauer 重建方法的另一种鲁棒性更强、更新的一种改进算法。在深入讨论 Gegenbauer 重建方法的基础上引入逆多项式重建算法,用 Chebyshev 多项式代替 Gegenbauer 多项式,免去了重建过程中一个参数的选择,重建结果在提高精度的同时有效缩短了重建时间。该算法能有效地消除 Gibbs 环形伪影,提高成像质量。通过实验比较,验证了本文所提算法的优越性。

## 2 Gibbs 伪影及其表现

傅里叶变换是磁共振图像重建的主要成像方式,但是由于某些时间和技术上的限制,往往丢失掉部分高频数据,这样会使傅里叶变换受到限制而在重建后图像中产生 Gibbs 伪影。在 MR 成像中, $k$ 空间的中央区域(低频率区域)数据主要决定 MR 图像的对比度,而边缘区域(高频区域)则影响图像的空间分辨率。所以 Gibbs 伪影往往在图像边缘表现尤为明显。图像函数的成像方程为

$$f(x, y) = \sum_{l=-N}^N \sum_{k=-N}^N \tilde{f}_{l,k} e^{i\pi(lx+ky)} \quad (1)$$

其中,

$$\tilde{f}_{k,l} = \sum_{j=0}^{2N-1} \sum_{h=0}^{2N-1} f(x_j, y_h) e^{-i\pi(lx_j+ky_h)} \quad (2)$$

这就是传统的傅里叶重建方法,离散傅里叶变换的系数就是重建图像所需的  $k$  空间数据,当仅用有限频率范围的  $k$  空间数据代入式(1)成像时,就会出现 Gibbs 环状伪影。这一伪影将为组织细节的分辨带来不确定性。

## 3 基于 Chebyshev 多项式的逆多项式算法

基于 Chebyshev 多项式 IPRM (inverse polynomial reconstruction method based on chebyshev polynomials)

是针对 Gegenbauer 算法提出的一种更新的、鲁棒性更强的重建算法。

### 3.1 边缘检测

Gibbs 效应长期以来一直是利用频域数据进行图像重建时所遇到的主要障碍。现在,已经有许多重建技术用来消除 Gibbs 效应。其中 Gegenbauer 重建方法是一种能够保持图像高分辨率的重建方法,尤其在图像边缘表现良好。由于所有高分辨率的重建算法都需要检测图像边缘信息以此来确定重建图像的连续区域,并在此区域进行重建,所以边缘信息的准确提取就成了重建前重要的一步。在整个重建过程中需要首先利用频域数据检测出图像边缘,然后对每个连续子区间进行重建。

这里采用的是在文献[2]、[3]中讨论的边缘检测方法。首先确定待检测的不连续函数  $f(x)$ , 定义  $[f(x)] = f(x+) - f(x-)$ , 这里  $f(x+)$  和  $f(x-)$  分别为函数  $f(x)$  在  $x$  点处的左右极限值。可以看出  $[f(x)]$  的值在函数  $f(x)$  连续时, 值恒为 0, 而在间断点处  $[f(x)]$  为函数的跳跃, 即  $f(x_{j+1}) - f(x_j)$ 。选择集中核  $K_N^\sigma$ , 使得  $K_N^\sigma * f(x)$  具有以下特性:

$$\text{当 } N \rightarrow \infty \text{ 时 } K_N^\sigma * f(x) \rightarrow [f(x)] \quad (3)$$

这里,  $N$  为采样点数。集中核  $K_N^\sigma$  的表达式如下:

$$K_N^\sigma(x) = - \sum_{k=1}^N \sigma\left(\frac{k}{N}\right) \sin(kx)$$

$\sigma(k/N)$  是针对连续傅里叶变换所选择的集中因子, 本文中是利用离散傅里叶变换的数据进行边缘检测, 所以集中核因子应改为  $\tau(x)$

$$\tau(x) = \sigma(x) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\frac{\pi x}{2}} \quad (4)$$

进行间断点检测的公式为

$$T_N^\tau[f(x)] = i\pi \sum_{k=-N}^N \text{sgn}(k) \tau\left(\frac{|k|}{N + \frac{1}{2}}\right) \tilde{f}_k e^{inkx} \quad (5)$$

其中  $T_N^\tau[f(x)]$  满足以下特性:

$$T_N^\tau[f(x)] \rightarrow \begin{cases} [f(x^*)] & x = x^* \\ 0\left(\frac{1}{N}\right) & x \neq x^* \end{cases}$$

其中,  $\tilde{f}_k$  为由式(2)所得到的离散傅里叶变换的数据,  $x^*$  为检测函数  $f(x)$  的间断点,  $[f(x)]$  为函数在间断点处的跳跃值。

此外,  $T_N^\tau[f(x)]$  的值在间断点附近会产生一些轻微的抖动, 从而影响对于间断点的判断。为了解

决这个问题,必须引入一个阈值参数 (*Threshold*) 来消除掉那些虚假的抖动,而只有跳跃幅度大于阈值的时候才视为间断点即  $[f(x)] > \text{Threshold}$ 。阈值参数的选取至关重要,取值不当都会发生间断点的漏检和误检。一般情况阈值  $\text{Threshold} = 9\% \times \max(T_N^r[f(x)])$  [4]。在这个边缘检测的方法中,集中因子可以自由选取,依据不同情况选择不同的集中因子,具体选择标准参见文献[2]、[3]。这里选取了多项式因子,即

$$\tau^{\text{pol}}(s) = s \frac{\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\frac{\pi s}{2}} = \frac{2\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)}{\pi} \quad (6)$$

### 3.2 Gegenbauer 重建方法

Gegenbauer 重建方法 [5,6] 主要通过正交多项式  $C_l^\lambda(x)$  利用原始频域数据对函数进行逼近。但是, Gegenbauer 重建方法只能在连续子区间内进行函数重建,所以需要边缘检测的先前步骤。

Gegenbauer 多项式  $C_l^\lambda(x)$  是一个满足以下关系的  $n$  次正交多项式:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} C_k^\lambda(x) C_l^\lambda(x) dx = \begin{cases} 0 & k \neq l \\ \frac{\pi \Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-1} n! (\lambda+n) [\Gamma(\lambda)]^2} & k = l \end{cases} \quad (7)$$

对于解析的、非周期函数  $f(x)$  在  $[-1, 1]$ , 可以利用 Gegenbauer 多项式进行展开:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{f}^\lambda(l) C_l^\lambda(x) \quad (8)$$

其中的 Gegenbauer 系数定义为

$$\tilde{f}^\lambda(l) = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f(x) C_l^\lambda(x) dx \quad (9)$$

这里正则项  $h_l^\lambda = \frac{\sqrt{\pi} C_l^\lambda(1) \Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\lambda)(n+\lambda)}$ ,  $\Gamma$  为伽马函数。

Gegenbauer 多项式用 Legendre 多项式表示成为

$$C_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \Gamma(n+2\lambda)}{n! \Gamma(2\lambda)} \cdot \left[ \frac{1}{4}(x^2-1) \right]^{\frac{1}{4}-\frac{\lambda}{2}} P_{n+\lambda-1}^{\frac{1}{2}-\lambda}(x) \quad (10)$$

这里  $P$  为勒让德 (Legendre) 多项式。

在实际中只能用  $m+1$  项和来近似, 所以 Gegenbauer 部分和展开式为

$$f_m^\lambda(x) = \sum_{l=0}^m \tilde{f}^\lambda(l) C_l^\lambda(x) \quad (11)$$

在重建过程中,使用了部分  $k$  空间数据,  $f_N(x)$  就是利用部分  $k$  空间数据经过傅里叶变换利用式(1)重建的函数,所以 Gegenbauer 系数式(9)应用下式代替

$$\begin{aligned} \tilde{g}^\lambda(l) &= \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} f_N(x) C_l^\lambda(x) dx \\ &= \tilde{f}^\lambda(0) + \Gamma(\lambda) i^l (l+\lambda) \times \\ &\quad \sum_{0 < |k| \leq N} J_{l+\lambda}(\pi k) \left(\frac{2}{\pi k}\right)^\lambda \tilde{f}^\lambda(k) \end{aligned} \quad (12)$$

$J$  为第 1 类贝塞耳 (Bessel) 函数。

相应的 Gegenbauer 展开式为

$$g_m^\lambda(x) = \sum_{l=0}^m \tilde{g}^\lambda(l) C_l^\lambda(x) \quad (13)$$

应用 Gegenbauer 方法最大的问题在于参数  $\lambda$  和  $m$  必须满足确定条件,这样才能使频域数据快速收敛从而消除 Gibbs 现象。参数选择不当,可能会增大重建误差。实验结果表明它们是与连续子区间间隔以及采样点数  $N$  都有关系的参数 [1]。

### 3.3 逆多项式重建方法

应用 Gegenbauer 方法进行重建所产生的误差为

$$E_1(x) = g_m^\lambda(x) - f_N(x) \quad (14)$$

根据 Gegenbauer 多项式的正交性式(7),有

$$\begin{aligned} \tilde{g}^\lambda(l) &= (f_N(x), C_l^\lambda(x))_c \\ &= \left( \sum_{k=-N}^N \tilde{f}_k^\lambda(k) \exp(ik\pi x), C_l^\lambda(x) \right)_c \\ &= \sum_{k=-N}^N \tilde{f}_k^\lambda(k) \bar{W}_{kl} \end{aligned} \quad (15)$$

这里变换矩阵  $\bar{W}$  为

$$\bar{W}_{kl} = \frac{1}{h_l^\lambda} \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}} e^{ik\pi x} C_l^\lambda(x) dx \quad (16)$$

直接应用 Gegenbauer 重建方法涉及到由原始的未知函数  $f(x)$  先投影到傅里叶空间,然后再通过频域数据投影到 Gegenbauer 空间对未知函数进行重建,但是两个空间上的数据不能完全匹配存在一定误差,随着  $N$  的增大,这种误差也将随之减少,当  $N \rightarrow \infty$  时就能获得准确的重建,这也就是 Gegenbauer 重建方法存在误差的原因。IPRM 算法 [7,8] 与 Gegenbauer 算法主要的不同在于它寻找有限项  $m$  来使重建误差达到最小。

首先,可以把待重建的未知函数  $f_m(x)$  用有限项 Gegenbauer 多项式利用式(13)展开来近似表达,然后通过式(1)和式(2)再把函数  $f_m(x)$  投影到傅里

叶空间,用傅里叶级数表示为

$$f_m^N(x) = \sum_{k=-N}^N (f_m(x), \exp(ik\pi x))_F e^{ik\pi x} \quad (17)$$

这里  $(f(x), \exp(ik\pi x))_F$  表示为函数  $f(x)$  的傅里叶变换,即

$$\tilde{f}_k = (f(x), \exp(ik\pi x))_F = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(x) \exp(ik\pi x) dx$$

这样重建结果与直接利用频域数据进行傅里叶变换重建所产生误差为

$$E_2(x) = f_m^N(x) - f_N(x) \quad (18)$$

由于误差函数  $E_2(x)$  在傅里叶空间上满足正交性,它与每一组基函数  $\exp(ik\pi x)$  都是正交的,即

$$(E_2(x), \exp(ik\pi x))_F = 0 \quad (19)$$

由式(18)、(19)可以得出

$$(f_m^N(x) - f_N(x), \exp(ik\pi x))_F = 0 \quad (20)$$

通过式(2)和式(17)可以得到

$$(f_m^N(x), \exp(ik\pi x))_F = \tilde{f}_k \quad (21)$$

通过式(17)和式(21)可以得到

$$\left( \sum_{k=-N}^N \left( \sum_{l=0}^m \tilde{g}^\lambda(l) C_l^\lambda(x), \exp(ik'\pi x) \right)_F \exp(ik'\pi x), \exp(ik\pi x) \right)_F = \tilde{f}_k \quad (22)$$

这里定义变换矩阵  $W$

$$\begin{aligned} W_{kl} &= (C_l^\lambda(x), \exp(ik'\pi x))_F \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C_l^\lambda(x) e^{-ik'\pi x} dx \end{aligned} \quad (23)$$

因为正交性,有  $(\exp(ik'\pi x), \exp(ik\pi x))_F = \delta_{kk'}$ 。所以,可以得到

$$\sum_{l=0}^m W_{kl} \tilde{g}^\lambda(l) = \tilde{f}_k \quad (24)$$

通过式(1)和式(24),可以得到展开式的系数表达式为

$$\tilde{g}^\lambda(l) = \sum_{k=-N}^N (W^{-1})_{lk} \tilde{f}_k \quad (25)$$

式(25)给出了 IPR 求解展开式系数的方法。通过式(24)可以知道  $m$  的取值要满足  $m \leq 2N$ , 这是因为误差函数  $E_2(x)$  在傅里叶空间满足正交性,所以它只有  $2N+1$  个自由度。而对于直接应用 Gegenbauer 方法,  $m$  的取值可以  $m \rightarrow \infty$ , 这样通过 IPRM, 通过有限项  $m$ , 就可以使重建函数误差达到最小。此外展开式的系数  $\tilde{g}^\lambda(l)$  中的参数  $\lambda$  不必再受连续子区间间隔以及采样点数  $N$  的限制。

如果选用基于 Gegenbauer 多项式的 IPRM 进行函数重建,参数  $\lambda$  虽然限定条件减少,但依然需要

人为选择参数  $\lambda$  的数值以保证最优的收敛速度。针对这个问题,在此引入了 Chebyshev 多项式,因为 Chebyshev 正交多项式也可以使频域数据产生快速收敛,而且 IPRM 通用性很强,适用于任何正交多项式<sup>[8]</sup>。所以,选取 Chebyshev 多项式来代替 Gegenbauer 多项式来进行图像重建。

Chebyshev 多项式的正交性满足:

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_m(x) U_n(x) dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases} \quad (26)$$

Chebyshev 多项式的表达式为

$$U_n(x) = \frac{(-1)^n (n+1)}{\sqrt{1-x^2} (2n+1)!!} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}] \quad (27)$$

这样函数展开式的系数为

$$\tilde{g}^\lambda(l) = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} f(x) U_l(x) dx \quad (28)$$

现在已经得到了 Chebyshev 多项式和函数展开式的系数,用 IPRM 的思想,利用式(23),变换矩阵  $W$  将改为

$$\begin{aligned} W_{kl} &= (U_l(x), \exp(ik'\pi x))_F \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U_l(x) e^{-ik'\pi x} dx \end{aligned} \quad (29)$$

按式(25)计算展开式的系数

$$\tilde{g}^\lambda(l) = \sum_{k=-N}^N (W^{-1})_{lk} \tilde{f}_k \quad (30)$$

最终图像的成像方程为

$$g_m(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^m \tilde{g}_k \tilde{g}_l U_l(x) U_l(y)$$

用该式来代替传统的傅里叶成像方程式(1)。

从图 1 中可以清楚地看到采用基于 Chebyshev 多项式的逆向重建算法利用部分频域数据重建的函

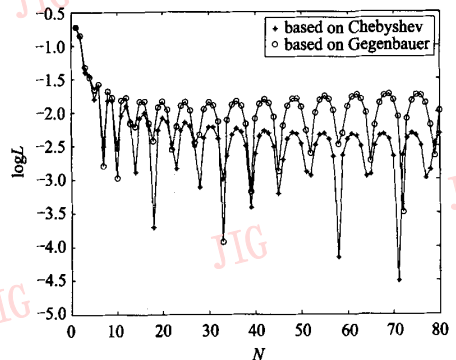


图 1 函数  $f(x) = \sin(2.4\pi(x+3))$  的重建误差

Fig. 1 The error of the reconstruction for  $f(x) = \sin(2.4\pi(x+3))$

数误差要明显小于基于 Gegenbauer 多项式所重建的误差。

定义重建误差函数为

$$L = |f(x) - g_m(x)| \tag{31}$$

在  $m$  的取值上,定义截断误差为

$$R(m) = \left| \sum_{i=0}^m |\tilde{g}_i| - \sum_{i=0}^{m-1} |\tilde{g}_i| \right| \tag{32}$$

由图 2 可以看出,  $N = 128$  时,  $m$  的最佳取值为  $m = 30$ 。实验结果表明选取  $m = N/4$  时收敛速度最快。

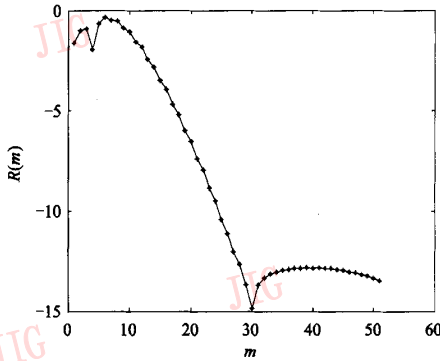
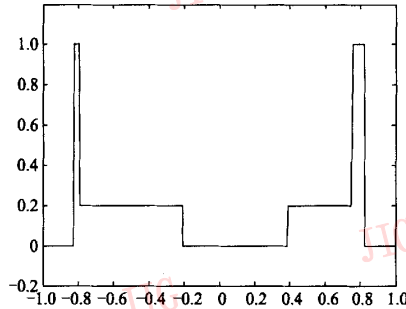


图 2  $f(x) = \sin(2.4\pi(x+3))$  的截断误差

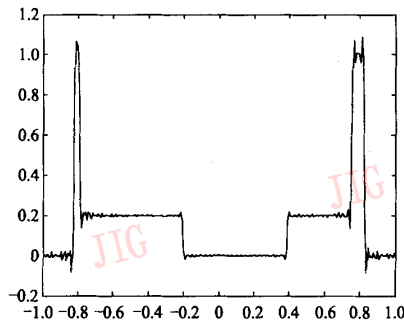
Fig. 2 The residue of the truncated sum in coefficients for  $f(x) = \sin(2.4\pi(x+3))$

### 4 结果与讨论

采用仿真部分  $k$  空间数据(对  $256 \times 256$  数据对称截断)进行重建体模图像来检验基于 Chebyshev 多项式的 IPRM 的有效性,同时也给出了常用的滤波法重建的结果对比实验。在图 3 中对 4 幅重建图像进行了比较,图 3(a)为不含 Gibbs 伪影的仿真 MR 图像,图 3(b)为用模拟部分  $k$  空间数据采用傅里叶变换法重建的图像,在图像中可以清楚地看到含有 Gibbs 伪影。图 3(c)给出了 Gegenbauer 方法重建的结果。图 3(d)为本文提出的基于 Chebyshev 多项式的 IPRM 的重建结果。对比可以看出重建图像效果有了明显的改善,Gibbs 伪影几乎被完全消除,而相对于滤波重建法,图像的边缘也保持了很高的分辨率,细节部分表现很好。图 4 也给出了利用式(31)计算的重建误差,由图可以看出重建误差已经达到了指数级,基本可以忽略。可以看出,使用 IPR 方法重建可以大大提高图像分辨率,减少重建误差。最后还对 Gegenbauer 方法和 IPRM 基于 Chebyshev 两种重建方法在正则化均方误差(NMSE)和重建时间上进行了对比。对比结果如表 1 所示。



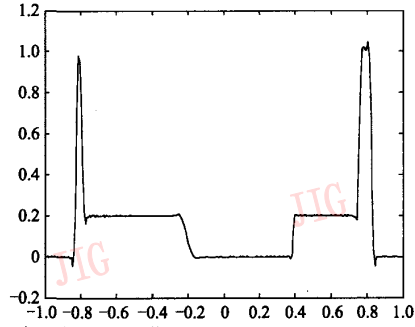
(a) Shepp-Logan 脑部仿真图像及其在 176 列截面图



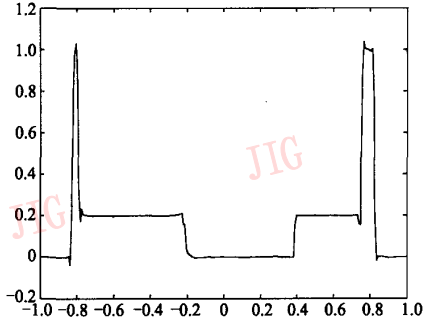
(b) 傅里叶变换法重建及其在 176 列截面图

图 3 Shepp-Logan 脑部仿真图像

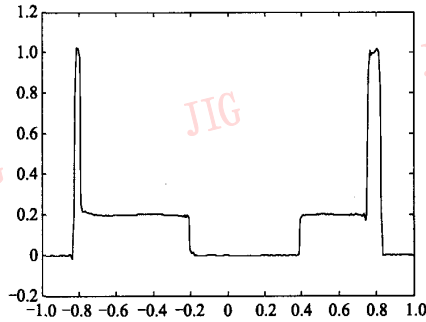
Fig. 3 The reconstruction of Shepp-Logan brain phantom and profile plots along the vertical line



(c) 滤波法重建及其在 176 列截面图



(d) Gegenbauer 重建及其在 176 列截面图



(e) 基于 Chebyshev 多项式的逆向重建及其在 176 列截面图

图 3 Shepp-Logan 脑部仿真图像

Fig. 3 The reconstruction of Shepp-Logan brain phantom and profile plots along the vertical line

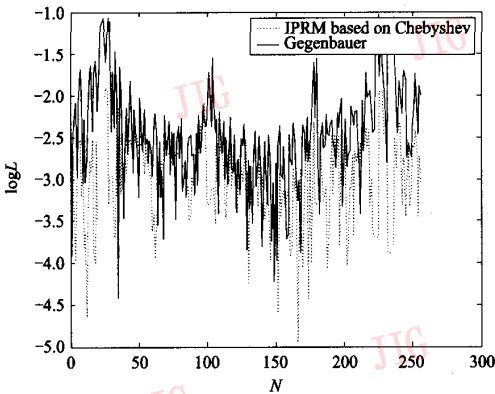


图 4 在图像 176 列上的重建误差

Fig. 4 Log of error in vertical line at 176 column of the reconstruction image

表 1 两种重建方法的比较

Tab. 1 The comparison of the two reconstruction methods

方法	重建时间(s)	NMSE
Gegenbauer 算法	9.73	$5.99 \times 10^{-3}$
IPRM 基于 Chebyshev	3.91	$5.64 \times 10^{-3}$

$$NMSE = \frac{\sum |g(x,y) - f(x,y)|^2}{\sum |f(x,y)|^2}$$

这里,  $g$  为重建图像,  $f$  为原始图像。

### 5 结 论

现在提出了许多方法来消除 Gibbs 伪影,最

流行的方法是通过滤除高频信息从而消除边缘区域的 Gibbs 环状伪影。然而这种方法无法从根本上消除 Gibbs 现象,并且会带来图像边缘的模糊。本文提出的基于 Chebyshev 多项式的逆向重建算法是针对 Gegenbauer 重建方法的改进算法,在保证重建图像高分辨率的前提下明显缩短了重建时间,并且免除了 Gegenbauer 重建算法中参数选择带来的麻烦和误差,有效降低了计算复杂度。利用 Chebyshev 正交多项式来代替 Gegenbauer 多项式,提高了重建精度。虽然此方法相比传统的傅里叶重建方法时间上还有一定的劣势,但在一些对组织细节要求较高的重建图像中还是有着很大的应用价值。

### 参考文献 (References)

- 1 Gelb A. Parameter optimization and reduction of round off error for the Gegenbauer reconstruction method [J]. *Journal of Scientific Computing*, June 2004, **20**(3): 433 ~ 459.
- 2 Gelb A, Tadmor E. Detection of edges in spectral data[J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 1999, **7**(1): 101 ~ 135.
- 3 Gelb A, Tadmor E. Detection of edges in spectral data II. nonlinear enhancement[J]. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 2000, **38**(4): 1389 ~ 1408.
- 4 Zhou Yun-ping, Lin Hua. *Signal and systems analysis*[M]. Beijing: Science Publishing Company, 2003:104 ~ 107. [邹云屏, 林桦著. 信号与系统分析[M]. 北京: 科学出版社, 2003:104 ~ 107.]
- 5 Archibald R, Gelb A. A Method to reduce the Gibbs ringing artifact in MRI scans while keeping tissue boundary integrity [J]. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 2002, **21**(4): 100 ~ 113.
- 6 Gottlieb D, Shu C W. On the Gibbs phenomenon and its resolution [J]. *SIAM Review*, 1997, **39**(4): 644 ~ 668.
- 7 Shizgal B D, Jung J H. Towards the resolution of the Gibbs phenomena[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2003, **161**(1): 41 ~ 65.
- 8 Jung J H, Shizgal B D. Generalization of the inverse polynomial reconstruction method in the resolution of the Gibbs phenomenon[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, **172**(1): 131 ~ 151.