

高精度曲面建模: HASM4

岳天祥 杜正平 宋敦江

(中国科学院地理科学与资源研究所, 北京 100101)

摘要 为了解决高精度曲面建模方法的速度问题,在大量数值实验的基础上,将模拟迭代方程 HASM3 改进为 HASM4。分析结果表明, HASM4 的 CPU 时间较 HASM3 有了大幅度的减少,而且随着计算域栅格总数的增加,这种减少幅度呈负幂指数规律;同时,随着计算规模的增大, HASM4 达到收敛所需的迭代次数较 HASM3 达到收敛所需的迭代次数呈直线下降趋势。 HASM4 减少了模型计算量,提高了模型的运行速度,其模拟精度与 HASM3 相比也有一定幅度的提高。

关键词 高精度曲面建模 数值实验 计算时间 模拟误差

中图分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)02-0343-06

High Accuracy Surface Modelling: HASM4

YUE Tian-xiang, DU Zheng-ping, SONG Dun-jiang

(Institute of Geographical Sciences and Natural Resources Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100101)

Abstract The iterative simulation equation set of high accuracy surface modeling, HASM3, is upgraded into HASM4 on the basis of numerical tests repeatedly in order to give a solution to the computing time problem of HASM3. The experimental results show that HASM4 has greatly shortened the computing time comparing with HASM3. With increase of total number of grid-cells in the computational domain, the computing time of HASM4 becomes shorter and shorter, which can be formulated by a function of negative power exponent. In the meanwhile, iteration times of HASM4 for reaching its convergence rectilinearly decrease with increase of total number of grid-cells in the computational domain, comparing with the ones of HASM3. HASM4 has not only shortened computing time, but also enhanced simulation accuracy, comparing with HASM3.

Keywords high accuracy surface modeling, numerical test, computing time, simulation error

1 引言

高精度曲面建模(HASM)发展始于20世纪80年代末的冰斗形态研究^[1],但从这一时期直到21世纪初的研究都基于数学表达相对简单的曲线论基本定律^[2],曲面建模被分解为曲面剖面线建模,在理论上有很大的缺陷。经过十多年的持续努力和探索,形成了基于曲面论基本定律的高精度曲面建模方法^[3-7]。按照 HASM 的发展阶段,将其区分为 HASM1, HASM2^[7] 和 HASM3^[8]。 HASM1 精度较 TIN 提高了 5 倍, HASM2 精度较 TIN 提高了 15 倍

多, HASM3 精度较 TIN 提高了 300 多倍。虽然 HASM1, HASM2 和 HASM3 从根本上解决了长期以来困扰 CAD 系统和 GIS 的误差问题及其应用中的多尺度问题,但是由于整个模拟过程要求解偏微分方程组,随着计算域栅格总数的增加,计算量成几何级数增长。为了解决 HASM 速度和超大计算量问题,本文对 HASM3 做进一步改进。

2 高精度曲面建模方法及其改进

以往的有关研究表明^[8], 曲面 $z=f(x,y)$ 可以在空间采样的基础上,通过以下方程进行数值模拟,

基金项目:国家自然科学基金项目(40371094);国家重点基础研究发展规划项目(2002CB412506)

收稿日期:2005-04-25;改回日期:2005-10-26

第一作者简介:岳天祥(1963~),男,研究员,博士生导师。主要从事高精度曲面建模与空间实时模拟研究。E-mail: Yue@lreis.ac.cn

$$\begin{cases} f_{xx} = \Gamma_{11}^1 f_x + \Gamma_{11}^2 f_y + \frac{L}{\sqrt{E+G-1}} \\ f_{yy} = \Gamma_{22}^1 f_x + \Gamma_{22}^2 f_y + \frac{N}{\sqrt{E+G-1}} \end{cases} \quad (1)$$

其中,

$$\begin{aligned} E &= 1 + f_x^2 \\ F &= f_x f_y \\ G &= 1 + f_y^2 \\ L &= \frac{f_{xx}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ N &= \frac{f_{yy}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{GE_x - 2FF_x + FE_y}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^1 &= \frac{2GF_y - GG_x - FG_y}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{2EF_x - EE_y - FE_x}{2(EG - F^2)} \\ \Gamma_{22}^2 &= \frac{EG_y - 2FF_y + FG_x}{2(EG - F^2)} \end{aligned}$$

在对 f 进行数值模拟时,首先需要利用采样值的插值求出基本量 E, F, G, L 和 N 的值。

设 $\{\tilde{f}_{i,j}\}$ 为 f 在采样点 $\{(x_i, y_j)\}$ 的值, $\{\tilde{f}_{i,j}\}$ 为由采样点插值计算得到的 f 在其他栅格点(或像元)的值, h_x 和 h_y 分别为 x 方向和 y 方向的模拟步长(像元分辨率),则各基本量可表达为

$$E_{i,j} = 1 + \left(\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2h_x} \right)^2 \quad (2)$$

$$F_{i,j} = \left(\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2h_x} \right) \left(\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2h_y} \right) \quad (3)$$

$$G_{i,j} = 1 + \left(\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2h_y} \right)^2 \quad (4)$$

$$L_{i,j} = \frac{\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - 2\tilde{f}_{i,j} + \tilde{f}_{i-1,j}}{h_x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2h_x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2h_y} \right)^2}} \quad (5)$$

$$N_{i,j} = \frac{\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - 2\tilde{f}_{i,j} + \tilde{f}_{i,j-1}}{h_y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2h_x} \right)^2 + \left(\frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2h_y} \right)^2}} \quad (6)$$

则, $\Gamma_i^j (i=11, 22; j=1, 2)$ 的有限差分可表达为

$$(\Gamma_{11}^1)_{i,j} = \frac{G_{i,j}(E_{i+1,j} - E_{i-1,j})h_y - 2F_{i,j}(F_{i+1,j} - F_{i-1,j})h_y + F_{i,j}(E_{i,j+1} - E_{i,j-1})h_x}{4(E_{i,j}G_{i,j} - F_{i,j}^2)h_x h_y} \quad (7)$$

$$(\Gamma_{22}^1)_{i,j} = \frac{2G_{i,j}(F_{i,j+1} - F_{i,j-1})h_x - G_{i,j}(G_{i+1,j} - G_{i-1,j})h_y - F_{i,j}(G_{i,j+1} - G_{i,j-1})h_x}{4(E_{i,j}G_{i,j} - F_{i,j}^2)h_x h_y} \quad (8)$$

$$(\Gamma_{11}^2)_{i,j} = \frac{2E_{i,j}(F_{i+1,j} - F_{i-1,j})h_y - E_{i,j}(E_{i,j+1} - E_{i,j-1})h_x - F_{i,j}(E_{i,j+1} - E_{i,j-1})h_x}{4(E_{i,j}G_{i,j} - F_{i,j}^2)h_x h_y} \quad (9)$$

$$(\Gamma_{22}^2)_{i,j} = \frac{E_{i,j}(G_{i,j+1} - G_{i,j-1})h_x - 2F_{i,j}(F_{i,j+1} - F_{i,j-1})h_x + F_{i,j}(G_{i+1,j} - G_{i-1,j})h_y}{4(E_{i,j}G_{i,j} - F_{i,j}^2)h_x h_y} \quad (10)$$

在 HASM3 中,当 $h_x = h_y$ 时, f 的迭代差分方程被表达为^[8]

$$\begin{cases} \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} - \left((\Gamma_{11}^1)_{i,j}^n \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + (\Gamma_{11}^2)_{i,j}^n \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2h} \right) = \frac{L_{i,j}^n}{\sqrt{E_{i,j}^n + G_{i,j}^n - 1}} \\ \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} - \left((\Gamma_{22}^1)_{i,j}^n \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - f_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + (\Gamma_{22}^2)_{i,j}^n \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - f_{i,j-1}^{n+1}}{2h} \right) = \frac{N_{i,j}^n}{\sqrt{E_{i,j}^n + G_{i,j}^n - 1}} \end{cases} \quad (11)$$

数值实验分析结果表明, f 的这种迭代方式计算量非常大,每次迭代都需要对系数矩阵重新求逆。

为了减少计算量,在反复数值实验分析的基础上,将迭代方程更新为(HASM4)

$$\begin{cases} \frac{f_{i+1,j}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} = (\Gamma_{11}^1)_{i,j}^n \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h} + (\Gamma_{11}^2)_{i,j}^n \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h} + \frac{L_{i,j}^n}{\sqrt{E_{i,j}^n + G_{i,j}^n - 1}} \\ \frac{f_{i,j+1}^{n+1} - 2f_{i,j}^{n+1} + f_{i,j-1}^{n+1}}{h^2} = (\Gamma_{22}^1)_{i,j}^n \frac{f_{i+1,j}^n - f_{i-1,j}^n}{2h} + (\Gamma_{22}^2)_{i,j}^n \frac{f_{i,j+1}^n - f_{i,j-1}^n}{2h} + \frac{N_{i,j}^n}{\sqrt{E_{i,j}^n + G_{i,j}^n - 1}} \end{cases} \quad (12)$$

HASM4 的优点是每次迭代时,求解的线性代数

方程组系数矩阵都相同,因此只需对系数矩阵求一

次逆,从而大大减少了计算量。

若模拟区域为归一化区域 $[0,1] \times [0,1]$, 计算

步长为 $h = \frac{1}{N+1}, n \geq 0$, 则 HASM4 可表达为

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{D}^n \\ \mathbf{B}\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{E}^n \end{cases} \quad (13)$$

其中, $\mathbf{F}^{n+1} = (f_{1,1}^{n+1}, \dots, f_{1,N}^{n+1}, f_{2,1}^{n+1}, \dots, f_{2,N}^{n+1}, \dots, f_{N-1,1}^{n+1}, \dots, f_{N-1,N}^{n+1}, f_{N,1}^{n+1}, \dots, f_{N,N}^{n+1})^T$; \mathbf{F}^0 为采样点值的插值结果; \mathbf{A} 和 \mathbf{D}^n 分别为 HASM4 第 1 个方程的左端系数矩阵和第 n 次迭代时代数方程组右端项向量; \mathbf{B} 和 \mathbf{E}^n 分别为 HASM4 第 2 个方程的左端系数矩阵和第 n 次迭代时代数方程组右端项向量。

设 $\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}, \mathbf{Q}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{D}^n \\ \mathbf{E}^n \end{bmatrix}$ 。为了保证在采样点的

模拟值等于采样值, 建立如下等式约束的最小二乘问题

$$\begin{cases} \min \|\mathbf{H}\mathbf{F}^{n+1} - \mathbf{Q}^n\|_2 \\ \text{s.t. } \mathbf{C}\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{G} \end{cases} \quad (14)$$

其中, $\mathbf{C}(k, (i-1) \cdot N + j) = 1; \mathbf{G}(k) = \bar{f}_{i,j}$ 。也就是说, 第 k 个采样点 (x_i, y_j) 的采样值为 $\bar{f}_{i,j}$ 。

对充分大的 λ , 解无约束的最小二乘问题,

$$\min_{\mathbf{F}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} - \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n \\ \lambda \mathbf{G} \end{bmatrix} \right\|_2 \quad (15)$$

也就是

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \lambda \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{C} \end{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \lambda \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n \\ \lambda \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (16)$$

设 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \lambda \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ \lambda \mathbf{C} \end{bmatrix}$

$\mathbf{R}^n = \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & \lambda \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^n \\ \lambda \mathbf{G} \end{bmatrix}$

则问题转化为求解线性代数方程组

$$\mathbf{P}\mathbf{F}^{n+1} = \mathbf{R}^n \quad (17)$$

3 数值模拟结果分析

对非突变问题, 若模拟区域为 $[0, 1] \times [0, 1]$, 取无量纲基准曲面为

$$z(x, y) = 3 + 2\sin(2\pi x)\sin(2\pi y) + \exp(-15(x-1)^2 - 15(y-1)^2) + \exp(-10x^2 - 15(y-1)^2)$$

如图 1 所示。

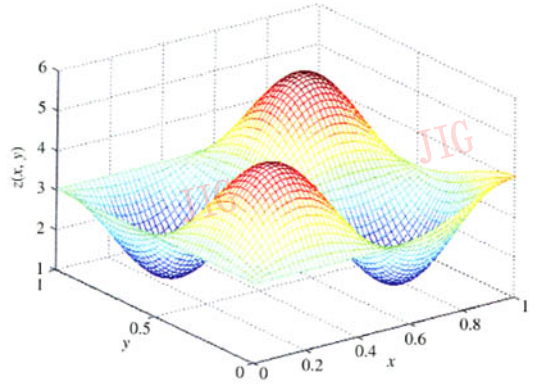


图 1 基准曲面

Fig. 1 Test surface

根据文献 [8], HASM 误差可以表示为 ah^b (其中 a 为误差系数), 且 b 的取值在 3 左右, 因此, 可以将收敛标准定为 $A^n + R^n \leq 10^{-2}h^3$, 其中,

$$A^n = \left((I \cdot J)^{-1} \sum_{i,j} (f_{i,j}^{n-1} - f_{i,j}^n)^2 \right)^{1/2}$$

$$R^n = \left((I \cdot J)^{-1} \sum_{i,j} ((f_{i,j}^{n-1} - f_{i,j}^n) / f_{i,j}^n)^2 \right)^{1/2}$$

分别为第 n 次迭代和第 $n-1$ 次迭代结果之间的平方平均绝对差和平方平均相对差。设 $z(i, j) = z(x_i, y_j)$ 为精确值, $f_{i,j}^n$ 为 HASM 方法第 n 次迭代后在 (x_i, y_j) 点的近似值, I, J 为 x, y 方向的网格数, N 为收敛时的迭代次数, 则迭代收敛时的平方平均绝对误差为

$$A = \left((I \cdot J)^{-1} \sum_{i,j} (z(i, j) - f_{i,j}^N)^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

平方平均相对误差为

$$R = \left((I \cdot J)^{-1} \sum_{i,j} ((z(i, j) - f_{i,j}^N) / f_{i,j}^N)^2 \right)^{1/2} \quad (19)$$

HASM3 和 HASM4 达到收敛的迭代次数分析结果表明 (表 1), 随着计算规模增加, HASM4 和 HASM3 的迭代次数接近, 但计算时间, HASM4 有非常明显的优势; 除了计算网格最稀疏的 17×17 的情形, HASM4 收敛时计算精度都比 HASM3 好。

比较相同迭代次数下的计算精度, 能从另外一个角度说明 HASM4 的优势。HASM3 和 HASM4 各迭代 30 次的计算时间和计算精度分析结果表明 (表 2), HASM4 计算时间较 HASM3 大幅度减少; HASM4 的计算精度较 HASM3 也有一定程度的提高, 特别是在分辨率较高的时候, HASM4 精度提高幅度更大。

表 1 HASM4 和 HASM3 收敛时的迭代次数和计算精度比较

Tab. 1 Comparison of iteration steps and accuracies when HASM4 and HASM3 simulations reach convergence

计算栅格总数	采样间距	CPU 计算时间(s)		迭代次数		收敛时 A	
		HASM3	HASM4	HASM3	HASM4	HASM3	HASM4
17 × 17	2	2.719	0.406	20	26	1.377 89e-2	1.562 57e-2
	4	6.641	0.172	92	50	6.894 25e-2	8.005 23e-2
25 × 25	2	29.313	0.703	34	38	4.119 58e-3	3.513 47e-3
	4	66.063	1.079	80	97	3.355 36e-2	3.533 62e-2
33 × 33	2	176.172	1.203	36	37	1.344 53e-3	1.264 19e-3
	4	476.421	2.531	101	116	1.619 08e-2	1.575 07e-2
41 × 41	2	718.078	2.563	37	38	6.690 19e-4	6.319 88e-4
	4	2 102.25	5.422	113	122	7.683 80e-3	6.904 68e-3
49 × 49	2	2 382.31	5.422	40	39	3.921 66e-4	3.770 42e-4
	4	8 981.67	12.672	157	155	4.084 84e-3	3.603 42e-3
57 × 57	2	5 938.63	8.859	38	39	2.554 88e-4	2.485 38e-4
	4	23 109.1	20.656	157	156	2.208 91e-3	2.080 56e-3

表 2 两种迭代方法各迭代 30 次的计算时间和计算结果比较

Tab. 2 Comparison of CPU time and simulation accuracy of HASM4 and HASM3 at their 30th iteration step

计算栅格总数	采样间距	CPU 时间(s)		R		A	
		HASM3	HASM4	HASM3	HASM4	HASM3	HASM4
17	2	2.297	0.406	4.571 08e-3	4.791 13e-3	1.377 87e-2	1.562 48e-2
	4	1.985	0.140	2.533 55e-2	3.499 70e-2	6.958 56e-2	8.010 61e-2
25	2	25.343	0.422	1.296 22e-3	9.490 76e-4	4.121 22e-3	3.514 77e-3
	4	24.469	0.328	1.262 03e-2	1.068 02e-2	3.775 45e-2	3.685 39e-2
33	2	146.969	0.984	3.632 53e-4	3.345 16e-4	1.344 47e-3	1.263 88e-3
	4	140.141	0.703	5.386 79e-3	4.676 91e-3	1.736 67e-2	1.607 94e-2
41	2	579.047	2.094	1.852 64e-4	1.670 81e-4	6.691 40e-4	6.321 92e-4
	4	554.953	1.375	2.520 50e-3	2.118 15e-3	8.089 60e-3	7.241 11e-3
49	2	1781.56	4.063	1.041 82e-4	9.953 74e-5	3.922 13e-4	3.770 74e-4
	4	1711.14	2.563	1.699 05e-3	1.265 49e-3	5.110 36e-3	4.255 77e-3
57	2	4594.94	6.906	6.795 40e-5	6.547 22e-5	2.555 44e-4	2.486 00e-4
	4	4410.45	4.000	7.622 77e-4	6.345 39e-4	2.467 39e-3	2.247 26e-3

为了表达 HASM4 较 HASM3 运算速度的提高程度,引入 HASM4 与 HASM3 的 CPU 时间比指数 T_{CPU} ,

$$T_{CPU} = \frac{T_4}{T_3} \quad (19)$$

其中, T_4 为 HASM4 计算所耗费的 CPU 时间; T_3 为 HASM3 计算所耗费的 CPU 时间。

数据实验结果表明,如果 N_d 为计算域的栅格总数(或像元总数),则当采样间距为 $2h$ 时, N_d 与

T_{CPU} 相关系数为 -0.998 , 且

$$T_{CPU} = 7N_d^{-3.3} \quad (20)$$

当采样间距为 $4h$ 时, N_d 与 T_{CPU} 相关系数为 -0.995 , 且

$$T_{CPU} = 8N_d^{-3.6} \quad (21)$$

HASM3 和 HASM4 的 CPU 时间比 T_{CPU} 与计算规模 N 的关系分析结果显示(图 2),随着计算域栅格总数的增加,CPU 时间比迅速减小,即随着计算规模的增加,HASM4 的计算效率愈加显示其优

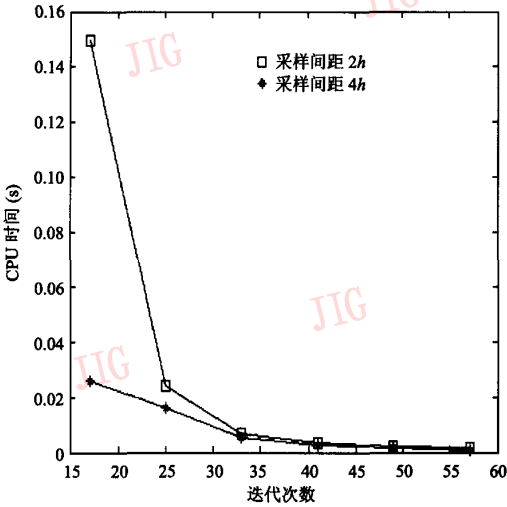


图 2 不同采样间距的 CPU 时间比指数

Fig. 2 Ratios of HASM4 CPU-time to HASM3 CPU-time for different sampling distances

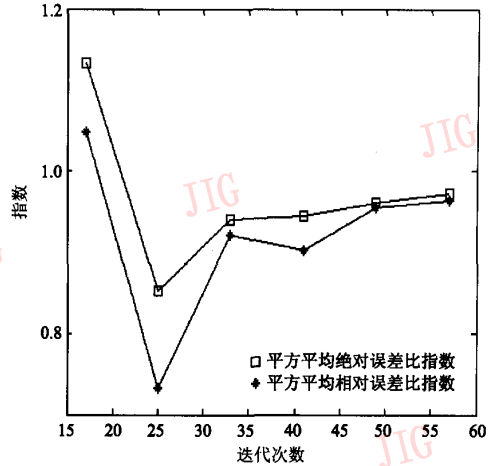


图 3 不同计算规模下 HASM4 与 HASM3 精度比的变化

Fig. 3 Change of ratios of HASM4 accuracy to HASM3 accuracy for different grid spacing

势;采样间距为 4h 的 CPU 时间比指数曲线位于采样间距为 2h 的 CPU 时间比指数曲线之下,由于采样点越稀疏,迭代次数的增加,HASM4 比 HASM3 更节省时间。事实上,HASM3 和 HASM4 的主要计算量来自矩阵乘积和求逆,而且求逆所花费的时间远大于矩阵乘积,HASM3 每次迭代都需要求逆,而 HASM4 只需要求一次逆,同时,HASM3 代数方程组的系数矩阵,每次迭代都需要更新,因此 HASM4 的计算时间远小于 HASM3 的计算时间。当采样点越稀疏时,矩阵 C 和 G 的非零项越少,矩阵乘积计算量减小。

分析结果表明(如表 1 和表 2),无论是迭代同样多次数后的模拟精度还是达到收敛时的模拟精度,HASM4 都有比较大的优势。随着计算域栅格总数增加,分辨率越来越高时,HASM4 与 HASM3 的误差比趋于稳定,事实上,HASM3 和 HASM4 的差异只在于求解方程时采用不同的迭代方法;虽然迭代方法有差异,但随着分辨率的提高,两种方法都是收敛于同一精确曲面,故而两种方法所得数值解之间的差距也会缩小。在采样间距为 2h、迭代次数为 30 的情形下,HASM4 与 HASM3 的平方平均相对误差之比和平方平均绝对误差之比相对于不同计算规模(计算域栅格总数)的变化过程如图 3 所示。显然,随着计算规模的增大,HASM4 和 HASM3 的平均相对误差比和平均绝对误差比都趋近于 1。

4 结 论

在 HASM 数值模拟中,被模拟的曲面经常会有“悬崖”和“台地”等突变现象。对“悬崖”和“台地”的模拟,现有方法存在诸多困难。TIN 模型会把这种突变抹平;样条插值、克里根插值 and 多项式类插值方法模拟出的曲面会出现振荡情况,歪曲或丢失了许多信息。因此,还需要进一步研究:(1) 在 TIN 插值的基础上运用 HASM 逼近断裂面的过程和和在样条、克里根或多项式插值的基础上运用 HASM 消除振荡的过程;(2) 在模拟突变地形时,采样点对 HASM 模拟结果的影响,如“悬崖”上下有无采样点以及采样点的多寡对模拟精度、数值曲面光滑性的影响等;(3) HASM“捕捉”突变地形过程分析与模拟突变地形采样方案选择。

参考文献 (References)

- 1 YUE Tian-xiang, AI Nan-shan. A mathematical model for cirque surface [J]. *Glaciology and Cryopedology*, 1990, 12(3): 227 ~ 234. [岳天祥, 艾南山. 冰斗形态的数学模型[J]. *冰川冻土*, 1990, 12(3): 227 ~ 234.]
- 2 YUE Tian-xiang, LIU Ji-yuan. A digital model for transforming information at various scales [J]. *Journal of Images and Graphics*, 2001, 6(9): 907 ~ 911. [岳天祥, 刘纪远. 第四代地理信息系统研究中的尺度转换数字模型 [J]. *中国图象图形学报*, 2001, 6(9): 907 ~ 911.]
- 3 YUE Tian-xiang, CHEN Shu-peng, XU Bing, et al. A curve-theorem

- based approach for change detection and its application to Yellow River delta [J]. *International Journal of Remote Sensing*, 2002, **23**(11): 2283 ~ 2292.
- 4 YUE Tian-xiang, LIU Ji-yuan. Multi-scale issues of eco-geographical modeling[J]. *Quaternary Sciences*, 2003, **23**(3): 256 ~ 261. [岳天祥, 刘纪远. 生态地理建模中的多尺度问题[J]. *第四纪研究*, 2003, **23**(3): 256 ~ 261.]
- 5 YUE Tian-xiang, LIU Ji-yuan. A digital model for multi-sources information fusion[J]. *World Sci-Tech R & D*, 2001, **23**(5): 1 ~ 4. [岳天祥, 刘纪远. 多源信息融合数字模型[J]. *世界科技研究与发展*, 2001, **23**(5): 1 ~ 4.]
- 6 YUE Tian-xiang, LIU Ji-yuan, WANG Yin-an. A grid-generation based method for information fusion[A]. In: *Integrated Assessment and Decision Support. Proceedings of the 1st Biennial Meeting of the International Environmental Modelling and Software Society [C]*, Lugano, Switzerland, 2002: 127 ~ 132.
- 7 YUE Tian-xiang, DU Zheng-ping, LIU Ji-yuan. High precision surface modeling and error analysis[J]. *Progress in Natural Science*, 2004, **14**(2): 83 ~ 89. [岳天祥, 杜正平, 刘纪远. 高精度曲面建模与误差分析[J]. *自然科学进展*, 2004, **14**(2): 83 ~ 89.]
- 8 YUE Tian-xiang, DU Zheng-ping. High precision surface modeling: a core module of new generation CAD and GIS[J]. *Progress in Natural Science*, 2005, **15**(3): 73 ~ 82. [岳天祥, 杜正平. 高精度曲面建模: 新一代 GIS 与 CAD 的核心模块[J]. *自然科学进展*, 2005, **15**(3): 73 ~ 82.]