

传输方程下基于模型的光学层析图像重建

孟 静^{1),2)} 王加俊¹⁾ 黄贤武¹⁾ 仲兴荣¹⁾

¹⁾(苏州大学电子信息学院, 苏州 215021) ²⁾(曲阜师范大学计算机科学学院, 日照 276826)

摘 要 为克服光学层析图像重建的病态性,采用一种基于模型的重建方法来进行图像重建。由于广义高斯马尔可夫随机场模型具有全局平滑、边缘保留等特性,因此将其引入到服从辐射传输方程的光学层析图像重建中,并将其作为图像先验信息,同时通过最大后验概率理论,利用基于梯度的迭代优化算法来对目标函数进行优化求解。鉴于目标函数关于光学参数的梯度计算是算法中的难点,对此,提出了一种基于梯度树的梯度计算方法。实验证明:该方法与不带有先验模型的重建方法相比,不仅可进一步提高图像的重建质量,而且可降低重建病态性。

关键词 光学层析成像 辐射传输方程 马尔可夫随机场 联合差分方法

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)03-0397-05

Model-based Optical Tomography Reconstruction from Transport Equation

MENG Jing^{1),2)}, WANG Jia-jun¹⁾, HUANG Xian-wu¹⁾, ZHONG Xing-rong¹⁾

¹⁾(School of Electronics & Information Engineering, Soochow University, Suzhou 215021)

²⁾(School of Computer Science, Qufu Normal University, Rizhao 276826)

Abstract The model-based reconstruction algorithm is adopted in order to conquer the ill-posedness in optical tomography. An edge-preserving, global smoothing generalized Gaussian Markov random field(GGMRF) is imported into optical tomography reconstruction based on the radiative transfer equation in this paper. The iteration optimization method is used to solve the objective function with the GGMRF model by maximizing the a posterior probability, but the gradient computation of the objective function with respect to optical parameters is difficult. Therefore, a novel gradient computation strategy based on gradient tree is proposed. Experimental results show that this kind of reconstruction technology can improve the image reconstruction quality and decrease the ill-posedness compared to the reconstruction algorithm without priori model.

Keywords optical tomography, the radiative transfer equation, Markov random field, the adjoint differentiation scheme

1 引言

光学层析成像(optical tomography, OT)是近年来广为关注的一种新型成像技术。它利用波长约为 $650\text{nm} < \lambda < 900\text{nm}$ 的近红外光对介质进行照射,通过测量受照体表面的透射光和散射光对受照体内部的光学参数(吸收系数 μ_A (下角 A 代表 absorption)

和散射系数 μ_s (下角 S 代表 scattering))进行成像。OT 技术起步于 20 世纪 80 年代,我国在 20 世纪 90 年代中期才涉足该项研究。目前,大多数重建方法都是基于传输方程的近似形式——扩散方程的重建^[1,2],然而,由于当散射系数不远大于吸收系数或两者都较小时,基于扩散方程的重建会失败^[3],因此,有必要实现直接基于传输方程的重建^[4,5]。另外,由于 OT 重建问题是一个不适定的病态问题^[6],测量数据

基金项目:国家自然科学基金资助项目(30300088)

收稿日期:2005-10-24;改回日期:2006-01-16

第一作者简介:孟静(1977 ~),女。2003 年获曲阜师范大学硕士学位,现为苏州大学博士研究生。主要从事光学层析图像重建的研究,已发表或录用相关论文 6 篇。E-mail: qfmj@163.com

中的误差会在重建过程中被放大,所以,合适的先验信息的选择对于重建结果非常关键。马尔可夫随机场(Markov random field, MRF)是一种广泛用于信号处理的信息模型,在图像重建中常用作图像先验模型。其中广义高斯马尔可夫随机场模型(generalized Gaussian Markov random field, GGMRF)由于具有全局平滑和边缘保留的双重特性^[7],因此,本文将引入到服从辐射传输方程的 OT 重建中,通过贝叶斯框架将模型信息加入,先利用最大后验概率理论形成重建目标函数;然后采用基于梯度的迭代优化方法实现对目标函数的优化求解。该方法中目标函数关于光学参数的梯度计算是关键,对此,本文提出一种基于梯度树的梯度计算方法。实验证明,该方法不仅可有效地重建光学层析图像,降低 OT 重建的病态特性,而且可得到更理想的重建结果。

2 前向模型

光子在散射介质中传播的与时间无关的辐射传输方程为

$$\omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \omega) + (\mu_a + \mu_s) \psi(\mathbf{r}, \omega) = S(\mathbf{r}, \omega) + \mu_s \int_0^{2\pi} p(\omega, \hat{\omega}) \psi(\mathbf{r}, \hat{\omega}) d\hat{\omega} \quad (1)$$

其中, μ_a 和 μ_s 分别表示介质中的吸收系数和散射系数, $\psi(\mathbf{r}, \omega)$ 为在空间位置 \mathbf{r} 处方向角为 ω 时的角辐射率, $S(\mathbf{r}, \omega)$ 是相同条件下光源的强度。 $p(\omega, \hat{\omega})$ 称为散射相函数, 一般采用 Henyey-Greenstein 散射相函数, 即

$$p(\cos\theta) = \frac{1 - g^2}{2\pi(1 + g^2 - 2g\cos\theta)^{3/2}}$$

其中, θ 为 ω 与 $\hat{\omega}$ 的角度差, g 为各向异性系数, 用于表征角度的散射分布。虽然有多种方法可以求解式(1), 而本文采用的是基于有限差分的离散坐标法。下面首先引入该方法用到的数学符号和含义: 设图像为 A , 先将图像所在区域离散化为 $N \times N$ 的网格, 设在 X 轴的网格点间距为 Δx , 在 Y 轴的网格点间距为 Δy , ω_k 为第 k 个离散方向角 ($k = 1, 2, \dots, K$), 其在 X 方向和 Y 方向的分量用 ξ_k 和 η_k 表示, $\xi_k = \cos(\omega_k)$, $\eta_k = \sin(\omega_k)$ 。 $\psi_{k,i,j}$ 表示在网格点 (i, j) 处方向为 ω_k 时的角辐射率。当用迎风差分方法求解式(1)时, 第 k 个方向角 ω_k 被分成以下 4 个部分:

- ① $\xi_k > 0, \eta_k > 0$; ② $\xi_k < 0, \eta_k > 0$;

- ③ $\xi_k > 0, \eta_k < 0$; ④ $\xi_k < 0, \eta_k < 0$

为便于问题阐述, 下面给出当 $\xi_k > 0, \eta_k > 0$ 时的前向模型迭代求解公式^[8]:

$$\psi_{k,i,j}^{(t)} = \frac{\left(S_{k,i,j} + \mu_s \sum_{k=1}^K \alpha_k p_{k,k} \psi_{k,i,j}^{(t-1)} + \left(\frac{\xi_k}{\Delta x} \right) \psi_{k,i-1,j}^{(t)} + \left(\frac{\eta_k}{\Delta y} \right) \psi_{k,i,j-1}^{(t)} \right)}{(\xi_k/\Delta x + \eta_k/\Delta y + \mu_a + \mu_s)} \quad (2)$$

其中, $\psi_{k,i,j}^{(t)}$ 表示第 t 次迭代在位置 (i, j) 处方向角为 ω_k 时的角辐射率。

3 重建算法

3.1 重建模型

设 Y 表示测量数据向量, μ 为光学参数分布向量 ($N \times N$ 维)。下面给出用于 OT 重建的贝叶斯后验概率模型:

$$\ln P(\mu | Y) = \ln P(Y | \mu) + \ln P(\mu) - \ln P(Y) \quad (3)$$

上式第 1 项为似然概率项, 第 2 项为图像的先验概率分布项, 而最后一项则是测量数据概率分布项。由于注意到在上式中的最后一项是一个与重建问题无关的常数项, 因此, 可略而不计。设预测数据集为 $P(P = \{p_i, i = 1, 2, \dots, M\})$, 测量点数为 M , 根据光子噪声一般为泊松噪声的事实, 且由于在大量光子的条件下泊松分布趋于高斯分布, 所以在给定光学参数分布的条件下, 测量数据集 $Y(Y = \{y_i, i = 1, 2, \dots, M\})$ 的对数条件概率可写为^[9]

$$\ln P(Y | \mu) = - \sum_{i=1}^M \frac{(y_i - p_i)^2}{2y_i^2} \quad (4)$$

式(3)中的第 2 项为先验项, 可以加入光学参数分布先验信息, 文中采用的是 GGMRF 先验模型, 因该模型具有保留边缘的全局平滑特性。其表示形式如下^[9]:

$$P(\mu) = \begin{cases} \frac{1}{z(\sigma_\mu)} \exp\{-E(\mu/\sigma_\mu)\} & \text{if } \mu > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

其中, σ_μ 是模型尺度参数, z 是配分函数。OT 重建中, 能量函数 E 定义如下:

$$E\left(\frac{\mu}{\sigma_\mu}\right) = \sum_{|o,r| \in C} b_{o,r} \rho\left(\frac{\mu_o - \mu_r}{\sigma_\mu}\right) \quad (6)$$

其中, $b_{o,r}$ 是正的尺度参数, 第 o 个像素 μ_o 和第 r 个像素 μ_r 是图像中相邻的像素对; C 是相邻像素对的集合, $\rho(\cdot)$ 是势函数, 它用于为相邻像素对值的差分配一个代价。在信号处理领域, 势函数通常是一

个二次函数,即

$$\rho\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \left| \frac{\Delta}{\sigma} \right|^2$$

然而,由于二次代价函数会因过分的惩罚大的像素差而使得重建图像边缘模糊化,因此,为了使得重建图像既能达到全局平滑,又能保留边缘,本文采用广义高斯马尔可夫随机场模型,该模型中势函数具有如下形式:

$$\rho\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = \frac{1}{w} \left| \frac{\Delta}{\sigma} \right|^w \quad (7)$$

由式(7)可以看出,当参数 w 等于 2 时,模型退化为高斯马尔可夫随机场模型。由式(5)~式(7)可得重建图像 μ (也即光学参数向量 μ) 的似然对数为

$$\log P(\mu) = -\frac{1}{w\sigma_\mu^w} \sum_{o,r \in C} b_{o,r} |\mu_o - \mu_r|^w \quad (8)$$

由式(8)计算可得似然对数关于光学参数向量 μ 的导数为

$$\frac{d \log P(\mu)}{d\mu_o} = \frac{1}{\sigma_\mu^w} \sum_{r \in C_o} \text{sgn}(\mu_r - \mu_o) b_{o,r} |\mu_o - \mu_r|^{w-1} \quad (9)$$

C_o 是像素 o 的邻域。根据贝叶斯重建思想,可以通过最大化贝叶斯后验概率的方法来实现光学层析图像的重建。由式(3)到式(5),重建目标函数可描述为

$$\mu = \arg \max_{\mu > 0} \{ \ln P(\mu | Y) = \ln P(Y | \mu) + \ln P(\mu) \} \quad (10)$$

对上述目标函数,文中采用基于梯度的优化方法进行求解。该方法中梯度计算是关键。由式(10)可知,图像模型部分的梯度计算已由式(9)给出,关键是第 1 部分的梯度计算,由于它的非线性性,其梯度计算成为难点,因此,本文给出一种基于梯度树的

梯度计算方法。

3.2 梯度计算方法

该方法是以联合差分思想为基础的,联合差分方法是一种利用前向计算中得到的中间结果进行梯度计算的方法。设前向计算中得到的中间数据为 $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}, \dots, \psi^{(t)}$, 记 $\ln P(Y | \mu) \triangleq h$, 则函数 $h(\mu)$ 关于光学参数的导数计算公式为^[5]

$$\nabla_\mu h = \left(\sum_t \left(\frac{\partial h}{\partial \psi^{(t)}} \right)^T \frac{\partial \psi^{(t)}}{\partial \mu} \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial \mu} \right)^T \quad (11)$$

式(11)中,由于 h 不是 μ 的显式函数,因此最后一项的值为零。由于 $\left(\frac{\partial h}{\partial \psi^{(t)}} \right)^T$ 反映的仅仅是边界点之间的关系(测量值只能在边界处得到),真正与内部

光学参数发生联系的是 $\frac{\partial \psi^{(t)}}{\partial \mu}$ 的计算,因此它是梯度

计算中的最关键部分。通过对式(2)的观察可知,由于它是一个关于光学参数的多元函数,其中 $\psi_{k,i-1,j}^{(t)}$ 和 $\psi_{k,i,j-1}^{(t)}$ 也是关于光学参数的函数,因此式(2)可以改写为以下光学参数的多元函数的形式:

$$F(\mu) = F(f_1(\mu), f_2(\mu), \dots, f_q(\mu)) \quad (12)$$

其中, $f_i (i=1, 2, \dots, q)$ 也是关于光学参数的多元函数,因此, $\frac{\partial \psi^{(t)}}{\partial \mu}$ 可通过对式(2)递归求微分得到。其

计算方程式可写为

$$\frac{dF}{d\mu} = \frac{\partial F}{\partial f_1} \frac{df_1}{d\mu} + \frac{\partial F}{\partial f_2} \frac{df_2}{d\mu} + \dots + \frac{\partial F}{\partial f_q} \frac{df_q}{d\mu} \quad (13)$$

上述梯度求解思想可用一个树形图(称为梯度树如图 1 所示)来形象地描述($\xi_k > 0, \eta_k > 0$ 的情况)。下面的讨论中,假定 μ 表示散射系数分布向量。例

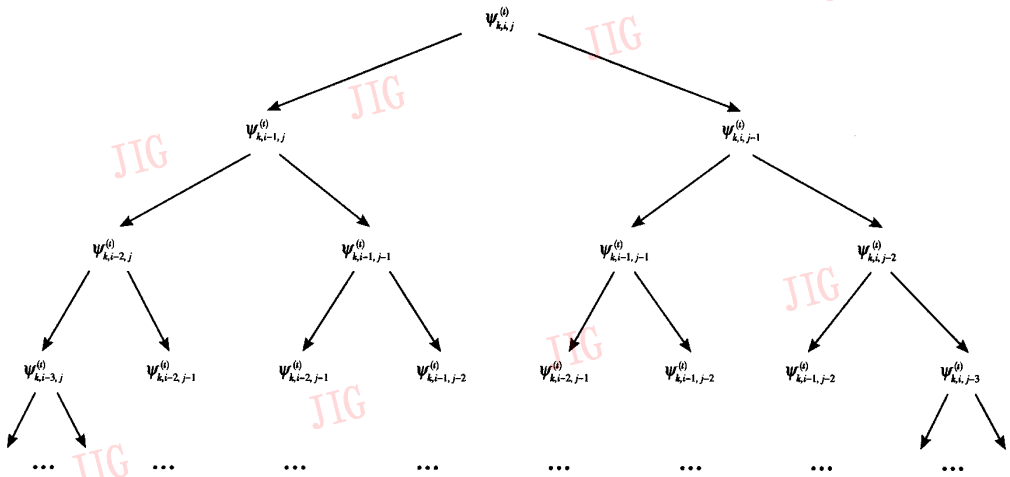


图 1 梯度求解树形结构示意图

Fig. 1 Schematic illustration of the tree structure for the gradient derivation

如 $\psi_{k,i,j}^{(i)}$ 对 $\mu_{i-1,j-1}$ 求导:根据式(13)和图 1 可知,由于从根节点 $\psi_{k,i,j}^{(i)}$ 到子节点 $\psi_{k,i-1,j-1}^{(i)}$ 有两条路径,所以 $\psi_{k,i,j}^{(i)}$ 对 $\mu_{i-1,j-1}$ 的导数是树形结构中两个分支导数的和,其计算式为(14)。 $\psi_{k,i,j}^{(i)}$ 对任意的 $\mu_{i,j}$ 求导需要的分支数在结论(1)中给出。

结论(1):设 $\psi^{(i)}$ 的下标为 (k,i,j) , μ 的下标为 (\hat{i}, \hat{j}) , 令 $m=i-\hat{i}, n=j-\hat{j}$, 则 $\psi_{k,i,j}^{(i)}$ 对 $\mu_{i,j}$ 求导的总分支个数为 N_{m+n}^m (对 $\xi_k > 0, \eta_k > 0$ 的情况, $i > \hat{i}, j > \hat{j}$, 其他情形可做类似分析)。

$$\frac{d\psi_{k,i,j}^{(i)}}{d\mu_{i-1,j-1}} = \frac{\partial\psi_{k,i,j}^{(i)}}{\partial\psi_{k,i-1,j}^{(i)}} \frac{\partial\psi_{k,i-1,j}^{(i)}}{\partial\psi_{k,i-1,j-1}^{(i)}} \frac{d\psi_{k,i-1,j-1}^{(i)}}{d\mu_{i-1,j-1}} + \frac{\partial\psi_{k,i,j}^{(i)}}{\partial\psi_{k,i,j-1}^{(i)}} \frac{\partial\psi_{k,i,j-1}^{(i)}}{\partial\psi_{k,i-1,j-1}^{(i)}} \frac{d\psi_{k,i-1,j-1}^{(i)}}{d\mu_{i-1,j-1}} \quad (14)$$

为更好地理解梯度树,根据结论(1),可构造一个 $m+n$ 位的二进制数 B , 用于表示从根节点到子节点的路径。其中 m 位为 1, n 位为 0; 1 表示左分支, 0 表示右分支。因此,从根节点到子节点的每条路径都必须包括 m 个左分支和 n 个右分支;反之,每一个含有 m 个 1 和 n 个 0 的二进制数就对应了一条路径。沿着每条分支可进行一个导数运算,而所有这些分支导数的和即为最终求解的梯度。例:设 $m=2, n=3$, 则根据结论(1)共有 10 条路径,用含有 1、0 的二进制数可具体表述为:11000, 01100, 00110, 00011, 10100, 10010, 10001, 00101, 01001, 01010。此时,梯度值为这 10 条路径导数的和。

4 实验及讨论

为验证本文方法的效果,采用两个 21×21 pixels 大小的正方形网格(图 2)模型进行了实验,网格间距为 0.05cm;光源放在每条边的中间位置,对应每个光源,在其余 3 条边(除去光源所在边)的第 2 至 20 个网格点上放置探测器,探测器间的间距为 0.05cm,这样总共构成了 $4 \times 3 \times 19$ 对探测器对;图 2 给出光源在底边时的重建模型,箭头表示光源位置,小黑色矩形表示探测器位置。图 2(a)模型光学参数设置如下:背景散射系数为 1.0cm^{-1} , 右下角白色方块区域为高散射区,散射系数为 1.2cm^{-1} , 左上角黑色方块区域为低散射区,散射系数为 0.8cm^{-1} 。图 2(b)模型光学参数设置如下:背景散射系数为 10cm^{-1} , 右下角白色方块区域为高散射区,散射系数为 12cm^{-1} , 左上角黑色方块区域为低散射区,散射系数为 8cm^{-1} 。本实验是针对散射系数的重建,

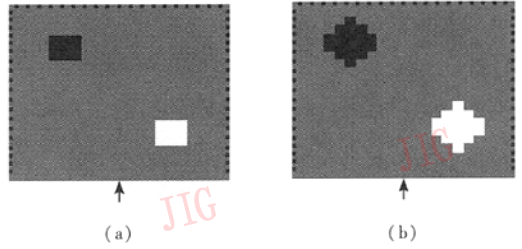
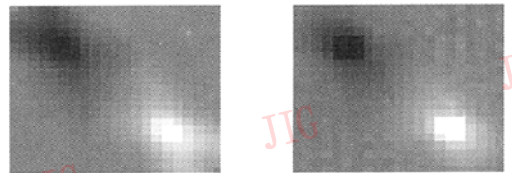


图 2 实验模型

Fig. 2 Models for experiments

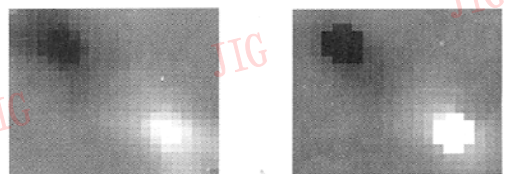
因此整个模型吸收系数保持不变均为 0.01cm^{-1} , 各向异性散射系数 g 取值 0.7。实验过程中,为验证算法在噪声干扰下的有效性,在测量数据中加入了 10dB 的高斯噪声。图 3、图 4 分别为针对图 2(a)和图 2(b)模型的重建结果。其中,图 3(a)和图 4(a)为不带有先验信息的重建结果;图 3(b)和图 4(b)为带有 GGMRF 模型的重建结果。实验中,参数 w 取值为 1.2 时,可以取得较好的边缘保留特性。在 GGMRF 模型中,采用 8-邻居方法,其中对最近邻居: $b_{o,r} = (2\sqrt{2} + 4)^{-1}$, 对对角邻居: $b_{o,r} = (4\sqrt{2} + 4)^{-1}$ 。其中尺度参数 σ_μ 的选择是个难点,理想状况下,其需要通过测量数据集 Y 确定,但无监督的 σ_μ 估计目前还没有实现,本文中, σ_μ 的选择是通过试探法确定的(实验中, σ_μ 取值 500)。



(a) 不带有先验信息的重建结果 ($MSE_{\text{normal}} = 0.994817$) (b) 基于 GGMRF 先验信息
的重建结果 ($MSE_{\text{normal}} = 0.813546$)

图 3 图 2(a)模型的重建结果

Fig. 3 Reconstructed results for model Fig. 2(a)



(a) 不带有先验信息的重建结果 ($MSE_{\text{normal}} = 0.997283$) (b) 基于 GGMRF 先验信息
的重建结果 ($MSE_{\text{normal}} = 0.831725$)

图 4 图 2(b)模型的重建结果

Fig. 4 Reconstructed results for model Fig. 2(b)

为进一步分析实验结果,还引入一个衡量图像重建效果的量——归一化均方根误差(normalized root mean squared error, NRMSE) MSE_{normal} , 它能直接反映图像的重建质量,其数学表达式如下:

$$MSE_{normal} = \left\{ \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_{i,j} - \hat{I}_{i,j})^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (I_{i,j} - \bar{I})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

其中, $I_{i,j}$ 是原始图像在 (i, j) 点的像素值, $\hat{I}_{i,j}$ 是每次迭代产生的重建图像像素值, \bar{I} 是原始图像的像素平均值。对应于不同重建方法下的归一化均方根误差值在图 3、4 中列出。通过对归一化均方根误差值的比较可以看出,基于 GGMRF 模型的重建图像不仅在视觉效果上有了很大提高,而且在重建质量的评价指标上也有明显的体现。

5 结 论

本文给出了一种基于广义高斯马尔可夫随机场的光学层析图像重建方法,该方法是在贝叶斯框架下加入图像模型信息,然后采用基于梯度的迭代优化方法求解,同时还提出了一种基于梯度树的梯度计算方法。实验证明,该方法可提高图像重建质量,不仅可保留清晰的图像边缘,而且可减弱重建过程中的病态特性。但该方法中尺度参数的估计是关键,在以后的工作中将进一步研究其无监督估计算法。

参考文献 (References)

- 1 Yao Hong-bing, He An-zhi. Improvement of the reconstruction algorithm of optical computerized tomography [J]. Acta Optica Sinica, 2004, 24(2): 158 ~ 161. [姚红兵, 贺安之. 光学层析重建算法改进的研究[J]. 光学学报, 2004, 24(2): 158 ~ 161.]
- 2 Lee Jae Hoon, Kim Seunghwan, Kim Tae. Finite element method for diffuse light propagation in index-mismatched media [J]. Optics Express, 2004, 12(8): 1727 ~ 1740.
- 3 Klose A D, Hielscher A H. Iterative reconstruction scheme for optical tomography based on the equation of radiative transfer [J]. Medical Physics, 1999, 26(8): 1698 ~ 1707.
- 4 Dorn Oliver. A transport-backtransport method for optical tomography [J]. Inverse Problems, 1998, 14(5): 1107 ~ 1130.
- 5 Klose A D, Hielscher A H. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer—Part 2: inverse model [J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2002, 72(5): 715 ~ 732.
- 6 Hielscher A H, Bartel S. Use of penalty terms in gradient-based iterative reconstruction schemes for optical tomography [J]. Journal of Biomedical Optics, 2001, 6(2): 183 ~ 192.
- 7 Bouman C A, Sauer K A. generalized Gaussian image model for edge-preserving MAP estimation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1993, 2(3): 296 ~ 310.
- 8 Klose A D, Netz Uwe, Beuthan Jürgen. Optical tomography using the time-independent equation of radiative transfer—Part 1: forward model [J]. Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 2002, 72(5): 691 ~ 713.
- 9 Saquib S S, Hanson K M, Cunningham G S. Model-based image reconstruction from time-resolved diffusion data [J]. Proceedings of the SPIE on Medical Imaging: Image Processing, 1997, 3034: 369 ~ 380.