

# 含可控阵列因子的类凝聚迭代函数系统

章立亮

(宁德师范高等专科学校数学研究所, 宁德 352100)

**摘要** 将标准迭代函数系统进行推广,构造了一种含阵列因子的压缩映射,并在此基础上定义了一种含可控阵列因子的类凝聚迭代函数系统,利用阵列因子控制全景模型并给出吸引子集的计算规则。该系统用于计算机仿真模拟具有全景效果的景物,计算方法简单,能产生类似于凝聚迭代函数系统方法的建模效果,在操作上更易于人工控制,所需代码数量比一般凝聚迭代函数系统少。

**关键词** 迭代函数系统 阵列因子 凝聚 全景模型

**中图分类号**: TP391.4 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)05-0905-05

## A Quasi Condensation Iterated Function Systems with Controllable Array Factors

ZHANG Li-liang

(Department of Mathematics, Ningde Teachers College, Ningde 352100)

**Abstract** This paper extends a technique of condensation iterated function systems. It is an effective method that condensation iterated function systems simulates the natural scene on computer. We constructed a compression mapping with array factors for fractals drawing and for the IFS to render natural scenes that are discussed and surveyed. Array factors are used to control the panorama models and the calculating rules of the attractor set are provided. It's easy to draw fractal figure in this way and these code numbers are much fewer than general condensation iterated function system. The experimental result shows that the new system can be operatal more manipulate conveniently and effectively.

**Keywords** iterated function systems, array factors, condensation, panorama model

### 1 引言

迭代函数系统(iterated function system, IFS)是分形几何学的重要分支,它的发展历程最初可以追溯到1981年Hutchison对自相似集的研究上<sup>[1]</sup>。后来Barnsley和Demko于1985年对该方法进行总结推广,提出一套完整的理论,发展了一系列算法规则,并将之应用于解决实际问题,做了大量开创性的工作,取得很大成功<sup>[2-4]</sup>。在IFS理论的基础上,一些研究人员通过对迭代函数系统引入新的处理机制,得到IFS吸引子新的计算方法,改进和拓展了

IFS的应用范围<sup>[5,6]</sup>。在对一类几何物体的建模研究中,迭代函数系统为我们提供了一种方便的技术工具,具有很大的实用价值,特别是在自然景物的计算机模拟方面应用前景广阔<sup>[7,8]</sup>。在实际问题的解决过程中,根据不同的实际场景生成需要,可以选择多种形式的IFS造型系统,如:带概率的IFS,灰度映射的IFS,带参量的IFS和凝聚IFS等。其中,凝聚IFS用于通过单个景物生成大片景物的场合,取得了很好的效果,这种加入凝聚集的IFS可以得到几何物体的全景模型,如:花园、丛林、山地、云烟等。实际应用中,在算法上一般是采用两个IFS的迭代嵌套,其中一个IFS用于构造凝聚集,另一个IFS用

基金项目:福建省自然科学基金计划资助项目(20511053)

收稿日期:2005-06-27;改回日期:2006-03-27

第一作者简介:章立亮(1963~),男,副教授。2004.9~2005.7武汉大学访问学者。主要研究领域为计算机图形学、分形几何及其应用。E-mail: zhlinlian@163.com

于场景景物的布列控制。本文借鉴这种算法思路,在标准迭代函数系统的压缩映射中,引入阵列因子,构造一种含阵列因子的压缩映射,由标准迭代函数系统的压缩映射族定义一个凝聚集,使用阵列因子对吸引子集的结构进行人工调控,对标准系统进行改造后得到一种新的迭代函数系统,因这种经改造的 IFS 构图效果相似于凝聚 IFS,故这里将它称为类凝聚迭代函数系统。通过该系统的阵列因子控制生成具有全景效果的吸引子集,而且只使用了一个 IFS 系统,就可以达到通常凝聚迭代函数系统中多 IFS 的场景建模效果,能实现自然景观人工控制模拟的特殊效果,同时所需代码数量大为减少。

## 2 预备知识

定义 1<sup>[9]</sup> 设  $(X, d)$  为度量空间,  $H(X)$  表示  $X$  的全体非空紧子集组成空间,  $C \in H(X)$ , 定义变换  $\omega_0: H(X) \rightarrow H(X)$  使  $\omega_0(B) = C, \forall B \in H(X)$ , 则  $\omega_0$  称为凝聚变换, 集合  $C$  称为相关凝聚集。由定义知,  $h(\omega_0(A), \omega_0(B)) = h(C, C) = 0, \forall A, B \in H(X)$ , 即  $A, B$  经  $\omega_0$  映射后象集合之间的距离为零, 因此, 凝聚变换实际上是压缩因子  $s = 0$  的压缩变换, 它有唯一的不动点, 即凝聚集本身。

定义 2<sup>[9]</sup> 设  $\{X; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$  为具有压缩因子  $0 \leq s < 1$  的 IFS,  $\omega_0: H(X) \rightarrow H(X)$  是凝聚变换, 则  $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$  称为带凝聚的 IFS, 压缩因子为  $s$ 。

定理<sup>[9]</sup> 设  $\{X; \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_N\}$  为带凝聚的 IFS, 压缩因子为  $s$ 。变换  $W: H(X) \rightarrow H(X)$  定义为  $W(B) = \bigcup_{i=0}^N \omega_i(B), \forall B \in H(X)$ , 则  $W$  是完备度量空间  $(H(X), h(d))$  上的具有压缩因子  $s$  的压缩映射, 即  $h(W(B), W(C)) \leq sh(B, C), \forall B, C \in H(X)$  其唯一的不动点  $P \in H(X)$  满足:  $P = W(P) = \bigcup_{i=0}^N \omega_i(P)$  且  $P = \lim_{n \rightarrow \infty} W^{(n)}(B), \forall B \in H(X)$ 。

利用凝聚 IFS 系统进行景物造型, 常使用一个压缩 IFS 系统, 记为  $\{X; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_M\}$  做为凝聚变换, 其吸引子做为凝聚集, 再使用一个压缩因子非零的 IFS 系统, 记为  $\{X; \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ , 将吸引子做迭代变换处理, 即采用两个 IFS 系统的复合, 记为 meta-IFS:  $\{X; \{\nu_i, i = 1, 2, \dots, M\}, \{\omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}\}$ 。

## 3 类凝聚 IFS 系统

### 3.1 系统的构造

设实平面  $R^2$  上的迭代函数系统 IFS:  $\{R^2; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  其压缩映射  $\omega_i$  取常用的仿射变换, 即

$$\omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \end{pmatrix} = M_i X + T_i, i = 1, 2, \dots, N$$

其中,  $M_i$  为线性变换矩阵,  $T_i$  为平移向量。以上标准的 IFS 中, 由给定  $6 \times N$  个参数组成的仿射迭代码经反复迭代运算, 就可在计算机屏幕上生成一幅图像, 通常这  $6 \times N$  个参数的取值, 在逐次迭代运算过程中是保持不变的固定值, 即每次迭代的压缩比和生成元的位置均不变, 现考虑在平移向量中加入一种位移增量, 其作用是使得每一次迭代运算之后, 下一阶的生成元位置产生移位现象, 这样, 就能得到一种生成元位置可变的迭代函数系统, 然后就可据此构造新的 IFS。令

$$\omega_{m,n}^{(i)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \omega_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m\lambda \\ n\lambda \end{pmatrix}$$

其中,  $i = 1, 2, \dots, N, m, n \in Z, \lambda = k/N_{max} (k = 0, 1, 2, \dots, N_{max})$ , 此处, 非负整数  $k \in \{0, 1, 2, \dots, N_{max}\}$  为计算程序中的迭代循环变量, 随着程序中迭代运算的循环递进, 其值从  $k = 0$  开始以步长 1 递增直至  $k = N_{max}$  停止,  $N_{max}$  表示迭代循环的最大次数, 称整数  $m, n \in Z$  为阵列因子, 则由此定义的压缩映射:  $\omega_{m,n}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N, m, n \in Z$  为含阵列因子  $m, n$  的压缩映射。现引入下述定义:

设  $\{R^2; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  为完备度量空间  $(R^2, d)$  上具有非零压缩因子的 IFS, 如上定义带阵列因子  $m, n$  的压缩映射  $\omega_{m,n}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N, m, n \in Z$ , 则  $\{R^2; \omega_{m,n}^{(i)}, i = 1, 2, \dots, N, m, n \in Z\}$  称为可控阵列的类凝聚 IFS, 记为 IFS <sub>$m,n$</sub> 。

为叙述上的方便, 下面将标准 IFS:  $\{R^2; \omega_i, i = 1, 2, \dots, N\}$  称为 IFS <sub>$m,n$</sub>  的内核 IFS, 其吸引子称为凝聚吸引子。对于  $R^2 \rightarrow R^2$  上的仿射变换  $W(X) = MX + B$ , 当且仅当变换矩阵  $M$  的谱半径  $r_\sigma(M) < 1$  时, 变换  $W$  是压缩的<sup>[9]</sup>, 在以上定义的 IFS <sub>$m,n$</sub>  中由于未改变原标准 IFS 的变换矩阵部分, 因此, 此 IFS <sub>$m,n$</sub>  也是一个压缩型的 IFS, 具有唯一的吸引子, 这种 IFS <sub>$m,n$</sub>  的内核 IFS 吸引子的结构信息隐含于该 IFS <sub>$m,n$</sub>  吸引子的全局结构之中。在自然景物的计算机模拟过程

中,为了能够产生具有某种指定形态结构的景物,可以构造相应的标准 IFS 作为内核 IFS,将其凝聚吸引子视为凝聚集,就能够使得该  $IFS_{m,n}$  吸引子包含所需的结构。

大家知道,使用 meta-IFS 系统构造全景景物,一般需要用两个 IFS 系统分别做凝聚变换和迭代变换,而且这两个 IFS 系统要在一定程度上能够相匹配。一旦改变其中的任意一个  $\nu_i$  或  $\omega_i$ ,两个 IFS 系统则需重新进行匹配,这使得 meta-IFS 系统在景物造型时难以人工调控,相对而言,在  $IFS_{m,n}$  系统中,我们只使用了一个 IFS 系统,通过引入具有明显几何意义的阵列因子  $\{m,n\}$  做吸引子的迭代变换,只需选取具体的参数值,就能够方便地控制景物的造型,实践表明该系统灵活性强,操作简单易于实现,而且,由于只使用一个 IFS 系统,所以能够减少代码数量。

### 3.2 吸引子集的计算规则

在  $IFS_{m,n}:\{\mathbf{R}^2;\omega_{m,n}^{(i)},i=1,2,\dots,N,m,n\in\mathbf{Z}\}$  中阵列因子  $m,n$  控制吸引子集的全局模型,当内核 IFS 被确定之后,吸引子集的结构就由阵列因子  $m,n$  的具体取值来决定,下面给出吸引子集的计算规则。

设平面直角坐标系的原点  $O(0,0)$  和点  $V(m,n)$  决定的向量为  $\vec{OV}$ ,  $m,n\in\mathbf{Z}$ ,  $C_0$  为凝聚吸引子,  $W_{m,n}=\bigcup_{i=1}^N\omega_{m,n}^{(i)}$ , 记  $W_{m,n}^{(k)}(C)=C_k(k=1,2,\dots)$ , 令集序列  $\{C_0,C_1,C_2,\dots\}$  中总的集数目为  $K_{m,n}$  则: (1) 当  $|m|,|n|\in\{0,1\}$  时,  $K_{m,n}=1$ ; 当  $|m|\notin\{0,1\}$  或  $|n|\notin\{0,1\}$  时,  $K_{m,n}=\max\{|m|,|n|\}$ ; (2) 吸引子集中集序列  $C_0,C_1,C_2,\dots,C_{k_{m,n}}$  从始点  $O$  开始到终点  $V$  结束,沿向量  $\vec{OV}$  方向排成  $|m|$  列的阵列。

综上所述,  $IFS_{m,n}$  吸引子集的结构由以下两个因素决定,①内核 IFS:  $\{\mathbf{R}^2;\omega_i,i=1,2,\dots,N\}$  ②阵列因子  $m,n$ 。选择适当的内核 IFS,将其吸引子做为结构模板,由阵列因子  $m,n$  控制阵列方式而生成具有预设结构的图样,再根据生成 IFS 吸引集的多 IFS 随机迭代算法<sup>[10]</sup>。选取不同的阵列因子组合  $\{m,n\}$ , 就可以按照一定的阵列方式控制生成含大片景物的全景模型,利用这种方法能够产生奇特效果的场景,为计算机模拟全景景物提供一种新的处理技术。

## 4 全景自然景物的模拟

我们以蕨叶分形和枯树分形的标准 IFS 码为原

始迭代代码,应用上面构造的类凝聚  $IFS_{m,n}$ ,以计算机模拟具有全景效果的分形景物,采用常用的随机迭代算法。两种分形的 IFS 码分别见表 1 和表 2。

表 1 蕨叶分形的 IFS 码  
Tab. 1 IFS code of fractal fern

a	b	c	d	e	f	概率
0	0	0	0.16	0	0	0.01
0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

表 2 枯树分形的 IFS 码  
Tab. 2 IFS code of fractal tree

a	b	c	d	e	f	概率
0.195	-0.488	0.344	0.443	0.443	0.245	0.2
0.462	0.414	-0.252	0.361	0.251	0.569	0.2
-0.058	-0.07	0.453	-0.111	0.597	0.097	0.2
-0.035	0.07	-0.47	-0.022	0.49	0.51	0.2
-0.637	0	0	0.501	0.856	0.251	0.2

图 1(a) 和图 2(a) 为含阵列因子的标准 IFS 分形吸引子,在标准 IFS 中引入阵列因子,采用第 3.1 节中构造的类凝聚  $IFS_{m,n}$  生成图 1(c)、图 1(d) 和图 2(c)、图 2(d) 所示的分形景物。通过观察可以发现景物图中树木的数量和分布位置受阵列因子  $m,n$  控制。如图 1(c) 中的阵列因子  $m=8,n=4$ ,可见位于最前端的一片蕨叶图即为凝聚吸引子,整幅图景中共有 8 片蕨叶沿右上方向依次层叠地排列,形成由近到远延伸的视觉效果。图 2(c) 中的阵列因子  $m=7,n=7$ ,位于左端的最小一棵枯树为凝聚吸引子,其余的 6 棵枯树沿右上对角方向均匀排列。在两幅图景中除第一个凝聚吸引子之外,其他的子图均是该凝聚吸引子不同比例的“拷贝”,整体场景包含了凝聚吸引子的结构信息。除了场景景物的阵列方向不同之外,类似的观察结果可分别见于图 1(d) 和图 2(d) 中。生成图 1(e) 和图 2(e) 中较为复杂的全景场景,分别采用相同内核 IFS 的迭代代码(即蕨叶 IFS 码和枯树 IFS 码)重复使用 4 次,它们的阵列因子  $m,n$  在 4 个坐标象限区域选取不同的参数组合,这样景观图案中的各个子图族分布于 4 个象限区,分别沿右上、左上、左下、右下 4 个方向阵列,如场景中图 1(e) 呈现为向 4 个方向生长的铁树盆景景象,图 2(e) 则酷似湖滨的一片树林在水面

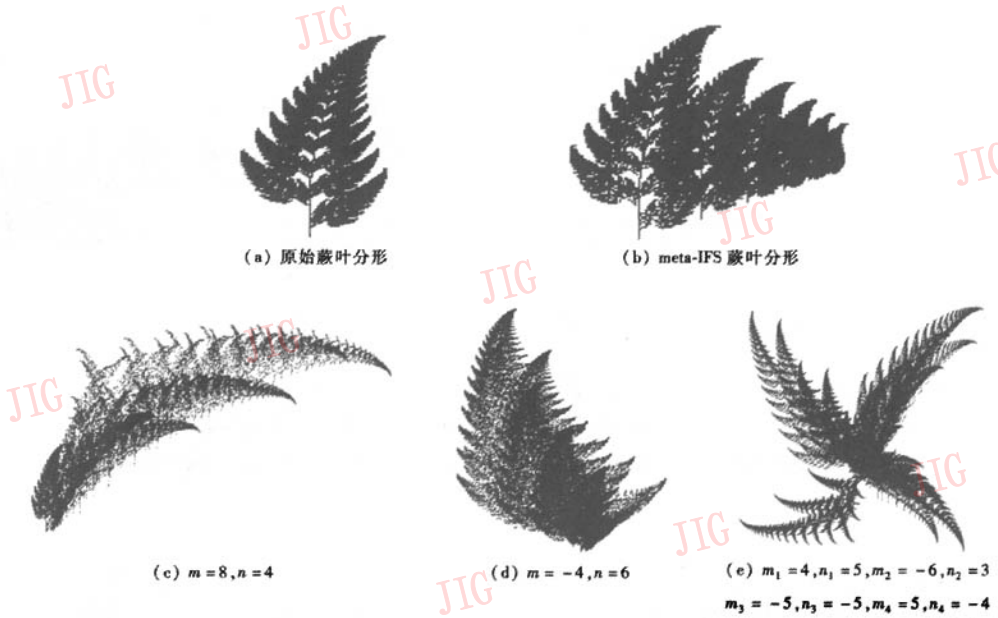


图 1 表 1 IFS 码生成的分形景物  
 Fig. 1 Fractal landscape in the tab. 1 IFS code

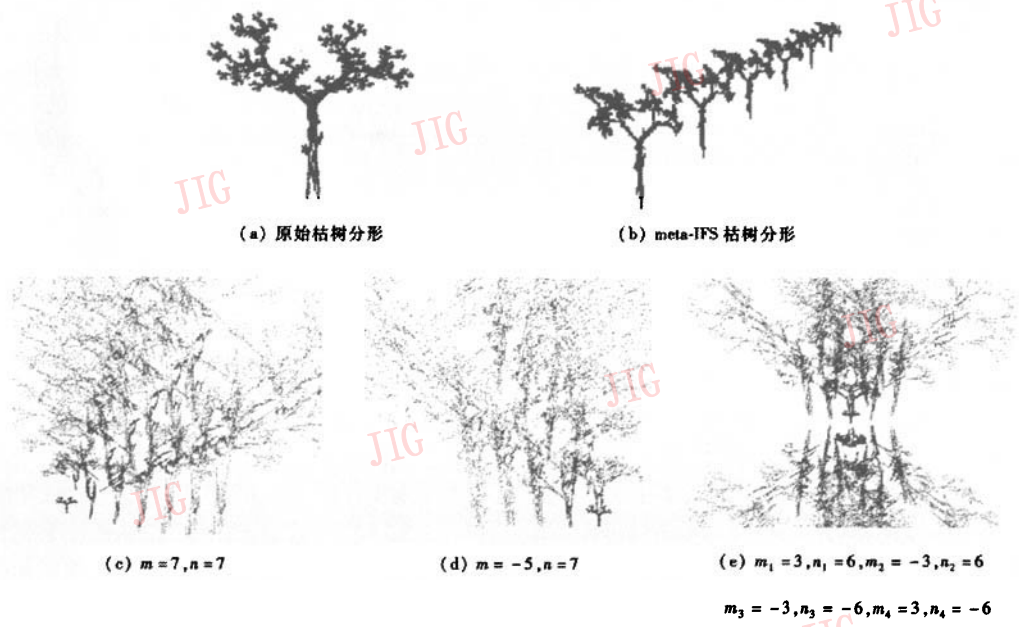


图 2 表 2 IFS 码生成的分形景物  
 Fig. 2 Fractal landscape in the tab. 2 IFS code

上的倒影图。图 1(b) 和图 2(b) 分别为 meta-IFS 系统构造的蕨叶分形场景和枯树分形场景, 为了达到树木成林的效果, 我们另外使用一个 IFS 系统对吸

引子做压缩和位移处理。由以上的构图过程可以看出, 两种系统具有相似的造型效果, 但在使用效率上两者却有明显的差别。

## 5 结 论

凝聚 IFS 系统是模拟大片景物的一种有效方法,在景物建模中除了用一个 IFS 生成凝聚集之外,通常还需要另外构造一个 IFS 用于全景布列才能达到目的。本文提出一种可控阵列的类凝聚 IFS,该系统由一个标准 IFS 和阵列因子组成,其优点在于:①新的系统只使用一个标准 IFS,在生成大片景物时,重复使用这一 IFS 就可以产生类似于通常凝聚 IFS 的建模效果,进一步减少了凝聚 IFS 的代码数量。②在标准 IFS 中,引入能够控制吸引子结构变化的阵列因子后,全景模型的造型通过阵列因子进行人工干预,操作简便,为适应不同场景的需要,在计算程序中,调整阵列因子的具体数值,改变吸引子的结构,方便地控制景物的形态造型。实践表明,该系统对大片景物的计算机模拟效率较高,具有一定的实用价值,它的应用进一步扩展了 IFS 系统的表示范围。

### 参考文献 (References)

- Hutchinson J E. Fractals self-similarity [J]. Indiana University Mathematics Journd, 1981, 30(5): 713 ~ 747.
- Barnsley M F, Demko S. Rational approximations of fractals [J]. Lecture Notes in Math, 1984, 1105: 73 ~ 88.
- Demko S, Hodges L, Naylor B. Construction of fractal objects with iterated function system [J]. Computer Graphics, 1985, 19(2): 271 ~ 278.
- Barnsley M F, Demko S. Iterated function systems and the global construction of fractals [A]. In: Proceedings of Royal. Society [C], London A399, 1985: 243 ~ 275.
- ZHANG Yi-shun, YANG Yang. A new algorithm of computing IFS attractor [J]. Journal of Image and Graphics, 2002, 7A(11): 1161 ~ 1164. [张亦舜, 杨扬. 构造 IFS 吸引子的新算法 [J]. 中国图象图形学报, 2002, 7A(11): 1161 ~ 1164.]
- Cao Han-qiang, Zhu Guang-xi, Zhu Yao-ting, et al. A method based on IFS for digital-hologram synthesis [J]. Journal of Laser, 2000, 21(2): 32 ~ 33. [曹汉强, 朱光喜, 朱耀庭等. 基于迭代函数系统的数字全息图像生成方法 [J]. 激光杂志, 2002, 21(2): 32 ~ 33.]
- Tomek Martyn. Efficient ray tracing affine IFS attractors [J]. Computers&Graphics, 2001, 25(4): 665 ~ 670.
- WANG Xing-yuan, LIANG Qing-yong, SHEN Li-xin. True color IFS attractors constructed on computer [J]. Journal of Dalian University of Technology, 2005, 45(1): 142 ~ 147. [王兴元, 梁庆永, 沈立新. 真彩色 IFS 吸引子的计算机构造 [J]. 大连理工大学学报, 2005, 45(1): 142 ~ 147.]
- LI Shui-gen. Fractals [M]. Beijing: Higher Education Press, 2004: 103 ~ 113. [李水根. 分形 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2004: 103 ~ 113.]
- GUO Ji-dong, ZHAO Ting-ting, WEI Xiao-peng. Rendering of virtual scenes based on IFS [J]. Journal of Dalian University, 2002, 23(6): 43 ~ 47. [郭继东, 赵婷婷, 魏小鹏. 基于 IFS 的虚拟自然景物生成 [J]. 大连大学学报, 2002, 23(6): 43 ~ 47.]