

一种新的形状特征——高斯描绘子

刘亦书

(华南师范大学地理科学学院, 广州 510631)

摘要 为了有效和正确地反映物体的形状特征,构造了一种基于物体轮廓曲线的新的不变量,即高斯描绘子。构造思路主要有两点:第一,定义一个具有平移、尺度不变性的函数——高斯势函数;第二,分别计算高斯势函数在8个同心圆上的平均值,从而获得8个不变量。相对其他的形状特征描述法,这些不变量不仅关于平移、旋转、尺度和反射不变,而且具有识别/匹配率高、计算量小、对适度的边缘变动和噪声不敏感以及适用范围广等优点。将这8个不变量应用于物体识别,实验结果表明,高斯描绘子的确具备上述优点。

关键词 形状特征 高斯势函数 高斯描绘子

中图分类号: TP391.41 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)03-0482-09

A New Type of Shape Features: Gaussian Descriptors

LIU Yi-shu

(Department of Geographical Information Science, South China Normal University, Guangzhou 510631)

Abstract Object recognition based on contour is a challenging problem in the field of pattern recognition and computer vision. This paper proposes a new attractive method that can be used in this field. Object features based on contour, called Gaussian descriptors, are introduced and their applications to object shape recognition are provided. The method includes defining a Gaussian Potential Function (GPF) and the reafter constructing 8 Gaussian descriptors by calculating the averages of GPF's along 8 circles with the same center. Gaussian descriptors are invariant to translation, rotation, scaling changes and reflection. Moreover, compared with the existing shape features, they are more robust against noise and slight edge variations, have lower computation complexity and higher recognition/retrieval rate, and are application-independent. These properties and advantages of Gaussian descriptors are studied and discussed, and numerical experiments are implemented to show encouraging results and illustrate the promising performance of Gaussian descriptors.

Keywords shape feature, gauss potential function, gaussian descriptors

1 引言

形状是物体的本质特征之一,是人类视觉系统识别物体时所利用的关键信息。在模式识别、计算机视觉和基于内容的图像检索(content based image retrieval, CBIR)中,它也是最重要、最常用的信息之一。在某些应用领域,如标志识别(Logo Recognition),形状还可能是可供使用的唯一特征。

因此,利用形状来识别/检索图像已经引起很多相关领域的科学工作者的重视。

目前对物体的形状表示和描述已经有了多种方法,通常将它们分成两大类:基于轮廓的和基于区域的。从视觉认知机理来说,基于轮廓的描述更能反映物体的形状特征,而且由于轮廓信息远比基于区域的图像信息浓缩,计算量大为降低,所以使用轮廓进行物体形状特征表示和识别是自然的选择。但由于轮廓的检测、表示和后续计算常常不稳定,在应用

基金项目:广东省自然科学基金博士启动项目(04300033)

收稿日期:2005-10-08;**改回日期**:2005-12-05

第一作者简介:刘亦书(1974 -),女,讲师。2002年于中山大学获计算数学专业硕士学位。主要研究方向为图像处理和模式识别。E-mail: yishuliu@21cn.com

中一般难以获得理想效果,因而实际上人们较多地使用了基于区域的形状特征表示。基于区域的表示法和图像的灰度值密切相关,易于受到非均匀光照等因素的影响,而且由于计算面向整个区域,因此计算量很大。如何克服现有基于轮廓的特征表示的困难,并提出稳定可行的新方法,是图像形状表示和识别领域中一个具有挑战性的问题。作者在文献[1]中将经典的 Hu 矩推广到基于物体轮廓的轮廓矩,进行了有益的尝试,并获得了较好的实验结果。

基于区域的技术可参见文献[2]~文献[8]。本文仅讨论基于轮廓的方法。常用的基于轮廓的形状表示和描述有:简单几何特征(如边界长度、边界半径、曲率、离心率、狭长度、挠度能量等^[7,8])、Hausdorff 距离^[9]、形状标记图^[10,11]、统计矩^[12]、弹性匹配^[13]、尺度空间^[14]、Fourier 描绘子^[15]、小波描绘子^[16,17],以及结构化形状表示(如链码、多边形分解、光滑曲线分解和句法分析等^[7,8])。

上述方法所描述的形状特征,有些对轮廓的描述太抽象,无法实现准确的识别/检索(如简单几何特征);有些不具备平移、尺度、旋转或反射不变性(如弹性匹配法、Hausdorff 距离);有些对噪声和边缘的轻微变动很敏感(如高阶统计矩、形状标记图和结构化形状表示);有些需要巨大的计算量(如小波描绘子、尺度空间法);有些只适用于封闭边界(如 Fourier 描绘子);有些需要对物体形状有预先认识,只能用于特定领域(如多边形分解和句法分析)。

对这些方法的详细评述和比较可参见文献[18]。

本文提出一种新的基于轮廓的形状特征——高斯描绘子,相对其他的形状特征,它具有如下特点:

- (1) 识别/匹配率高;
- (2) 具有平移、旋转、尺度和反射不变性;
- (3) 计算复杂性低,识别/匹配速度快;
- (4) 对边缘缺失、冗余、断裂或粘连不敏感;能承受一定程度的边缘变动和噪声干扰;
- (5) 适用范围广。

2 高斯描绘子

设曲线 C 由曲线 $C_1, C_2, \dots, C_n (n \geq 1)$ 组成。

由微积分的有关知识^[19]可知,曲线 C 的质心坐标可用第 1 型曲线积分表示为

$$\bar{x} = \frac{\int_C x ds}{\int_C ds}, \bar{y} = \frac{\int_C y ds}{\int_C ds} \quad (1)$$

曲线 C 上所有点的分散程度可用方差 σ^2 来描述:

$$\sigma^2 = \frac{\int_C [(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2] ds}{\int_C ds} \quad (2)$$

用 r 来表示曲线 C 上所有点与质心之间距离的平均值:

$$r = \frac{\int_C \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2} ds}{\int_C ds} \quad (3)$$

称以 (\bar{x}, \bar{y}) 为圆心、以 r 为半径的圆为曲线 C 的参照圆。

对任意的 $\lambda \in (0, +\infty)$, 记曲线

$$C^{(\lambda)} = \{ (x, y) \mid (x, y) \in C, \text{ 且 } (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \leq (\lambda r)^2 \}$$

对任意的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 和 $\lambda \in (0, +\infty)$, 定义函数

$$f(\theta, \lambda) = \frac{\int_{C^{(\lambda)}} e^{-\frac{(x - \bar{x} - \lambda r \cos \theta)^2 + (y - \bar{y} - \lambda r \sin \theta)^2}{2\sigma^2}} ds}{\int_C ds} \quad (4)$$

函数 $f(\theta, \lambda)$ 的意义如图 1 所示。

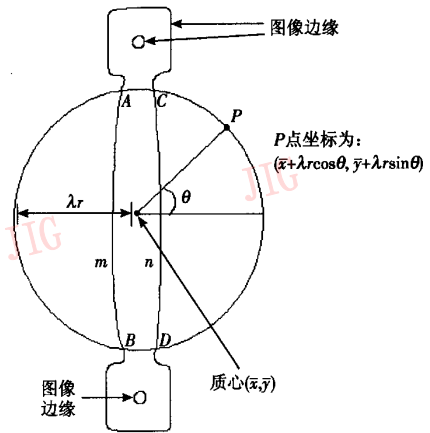


图 1 高斯势函数意义图解

Fig. 1 Gaussian potential function $f(\theta, \lambda)$

图 1 中,部分边缘曲线位于圆内——弧 Amb 和弧 CnD , 即曲线 $C^{(\lambda)} = Amb + CnD$ 。对 $C^{(\lambda)}$ 上的任意一点 Q , 设其坐标为 (x, y) , 则点 P 和 Q 之间距离的平方为

$$|PQ|^2 = (x - \bar{x} - \lambda r \cos \theta)^2 + (y - \bar{y} - \lambda r \sin \theta)^2$$

$f(\theta, \lambda)$ 类似物理学上的“势函数”, 只是这里用 2 维高斯函数代替简单的反比例函数, 且把圆外边缘曲线上的点 (类似物理学中的质点、点电荷等) 屏蔽掉。 $f(\theta, \lambda)$ 是 $C^{(\lambda)}$ 上所有点对点 P 的“作用”的总和, 显然, 离点 P 近的点产生的“作用”大, 离点 P 远的点产生的“作用”小。至于分母中的 $\int_C ds$, 其作用是进行尺度规范化。为了方便描述起见, 我们不妨称函数 $f(\theta, \lambda)$ 为“高斯势函数” (Gaussian potential function, GPF)。

可以证明, 对于给定的 θ 和 λ , $f(\theta, \lambda)$ 是关于平移和尺度不变的。

最后, 定义函数

$$I(\lambda) = \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) d\theta}{2\pi} \quad (5)$$

当 λ 固定时, 高斯势函数 $f(\theta, \lambda)$ 是 θ 的连续函数。可以将 $I(\lambda)$ 直观地理解为 $f(\theta, \lambda)$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的平均值; 对照图 1, 也可以说, $I(\lambda)$ 是圆周上各点的“势”的平均值。所以, $I(\lambda)$ 刻画了边缘图像位于以 (\bar{x}, \bar{y}) 为圆心、以 λr 为半径的圆内那部分的形状特征。

把式(5)中的 $I(\lambda)$ 称为曲线 C 的高斯描绘子 (Gaussian descriptor, GD)。下面以定理形式给出高斯描绘子的重要性质:

定理 1 对于给定的 λ , 高斯描绘子 $I(\lambda)$ 具有平移、旋转、尺度和反射不变性。

定理的详细证明见附录 A。

对于数字图像的边缘, 需将式(1)~式(5)离散化。为此, 先给出计算曲线 C 的总弧长 $\int_C ds$ (记为 l_{total}) 的离散化公式。利用第 1 型曲线积分的定义^[19], 不难得到:

$$l_{\text{total}} = \sum_{i=1}^N \Delta s_i \quad (6)$$

式(1)~式(4)的离散化结果分别对应下列各式:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \Delta s_i}{l_{\text{total}}}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \Delta s_i}{l_{\text{total}}}, \quad (x_i, y_i) \in C \quad (7)$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N [x_i - \bar{x}]^2 + (y_i - \bar{y})^2 \Delta s_i}{l_{\text{total}}}, \quad (x_i, y_i) \in C \quad (8)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2} \Delta s_i}{l_{\text{total}}}, \quad (x_i, y_i) \in C \quad (9)$$

$$f(\theta, \lambda) = \frac{\sum_{i=1}^M e^{-\frac{(x_i - \lambda \cos \theta)^2 + (y_i - \lambda \sin \theta)^2}{2\sigma^2}} \Delta s_i}{l_{\text{total}}}, \quad (x_i, y_i) \in C^{(\lambda)} \quad (10)$$

在式(6)~式(10)中, Δs_i 是轮廓曲线上两个相邻像素点之间的“距离”; 如果两个相邻像素点呈水平方向或垂直方向排列, 那么 $\Delta s_i = 1$; 如果两个相邻像素点呈 45° 或 135° 方向排列, 那么 $\Delta s_i = \sqrt{2}$ 。

为了将式(5)离散化, 将区间 $[0, 2\pi]$ 平分为 K 份。由定积分的相关知识^[19], 有

$$I(\lambda) \approx \frac{2\pi}{K} \sum_{i=1}^K f\left(\frac{2\pi}{K}i, \lambda\right) = \frac{\sum_{i=1}^K f\left(\frac{2\pi}{K}i, \lambda\right)}{K} \quad (11)$$

实验结果表明, 如果 $K=8$, 相对误差一般都小于 0.005%, 所以在实践中没必要取 $K \geq 9$; 如果 $K=7$ 或 $K=6$, 甚至低至 $K=3$, 误差都是可接受的。所以, 可根据实际情况在 $3 \leq K \leq 8$ (K 为整数) 之间选择 K 。本文实验取 $K=8$ 。

为了得到足够的信息来刻画物体的形状特征, 从而提高识别/检索率, 取了 8 个不同的 λ 值, 它们分别是 $\lambda_1 = 0.25r$, $\lambda_2 = 0.50r$, $\lambda_3 = 0.75r$, $\lambda_4 = 1.00r$, $\lambda_5 = 1.25r$, $\lambda_6 = 1.50r$, $\lambda_7 = 1.75r$ 和 $\lambda_8 = 2.00r$ 。相应地, 可得到 8 个特征 $I_1 \sim I_8$, 如前所言, 它们具有平移、旋转、尺度和反射不变性。用这 8 个不变量构成图像的特征向量并用于物体的识别/检索。

3 数值实验和讨论

因为上述理论是基于轮廓曲线的, 所以必需提取图像的边缘。边缘提取是图像处理领域一个经典的问题, 迄今为止已经形成许多行之有效的办法。本文利用小波变换进行边缘提取, 该方法的好处是它是一种基于多灰度级图像的多尺度边缘提取方法, 且有较强的抗噪能力, 因此通常能够满足应用需要。小波边缘的一般理论请参阅文献[20]和文献[21]。

3.1 高斯描绘子算法描述

利用高斯描绘子方法进行模式识别的步骤

如下:

- (1) 利用小波变换进行多尺度边缘提取;
- (2) 计算总弧长 L_{total} , 质心坐标 (\bar{x}, \bar{y}) , 方差 σ^2 和参照圆半径 r ;
- (3) 计算高斯描绘子的 8 个离散值以构成图像的特征向量:

for $j = 1:8$

$I_j = 0$

for $i = 1:8$

$$I_j = I_j + f\left(\frac{\pi}{4}i, \lambda_j\right)$$

end

$$I_j = \frac{I_j}{8}$$

end

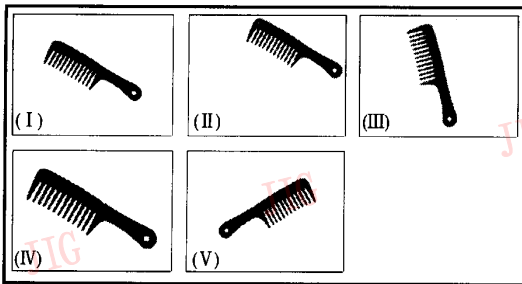
- (4) 分类决策或模板匹配。

3.2 实验结果和讨论

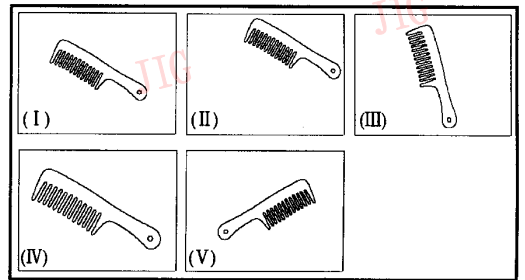
下面给出一些实验结果。

图 2(a) 中有 5 幅梳子图像, 其中 (II)、(III)、(IV) 和 (V) 分别是 (I) 做平移、旋转、伸缩和反射后的结果, 图 2(b) 是对应的边缘图。

类似地, 有第 2、3、4 组梳子图 (如图 3 ~ 图 5 所示)。



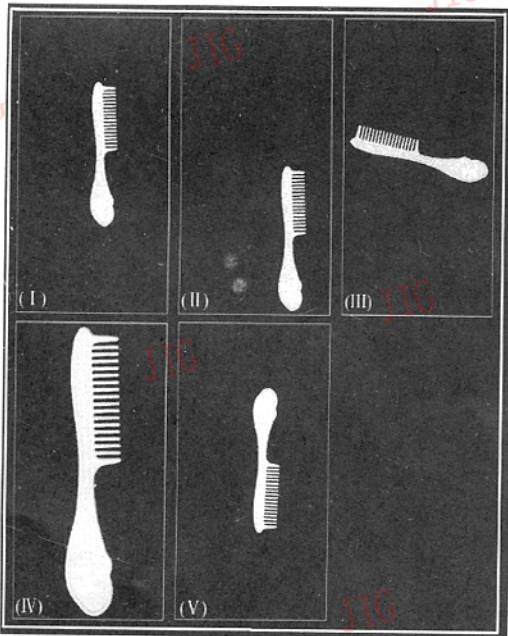
(a) 第 1 组梳子图



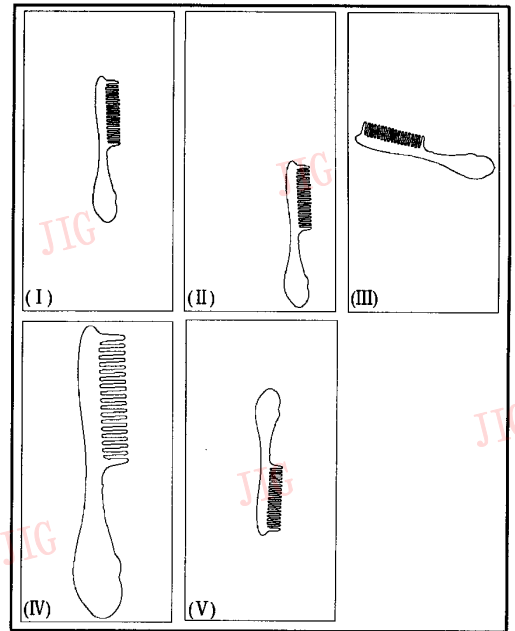
(b) 第 1 组梳子图的边缘

图 2 第 1 组梳子的边缘检测及形状识别

Fig. 2 The first group of comb images and their contours



(a) 第 2 组梳子图



(b) 第 2 组梳子图的边缘

图 3 第 2 组梳子的边缘检测及形状识别

Fig. 3 The second group of comb images and their contours

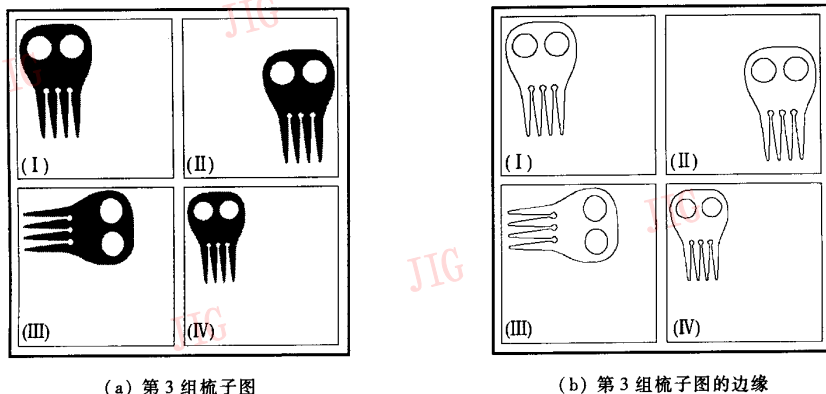


图 4 第 3 组梳子的边缘检测及形状识别

Fig. 4 The third group of comb images and their contours

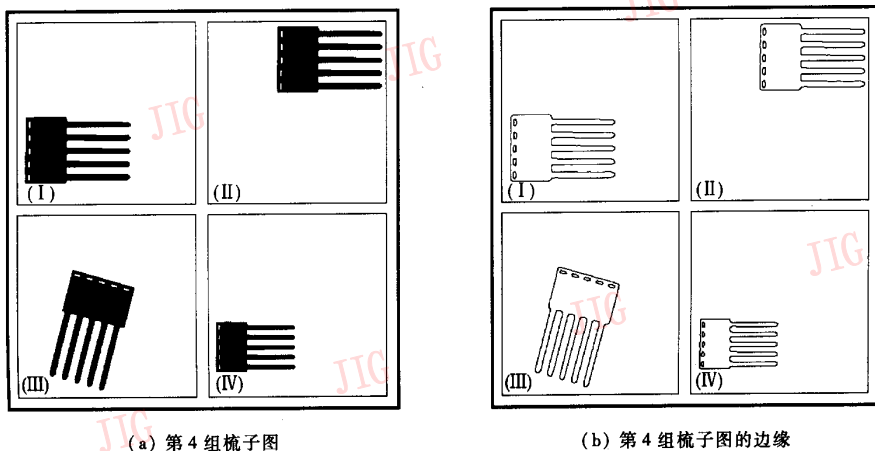


图 5 第 4 组梳子的边缘检测及形状识别

Fig. 5 The fourth group of comb images and their contours

图 4 和图 5 的梳子本身是对称的,所以对它们作反射变换等价于对它们进行旋转变换(和平移变换),因此,这里没给出反射结果。

计算图 2~图 5 中各个边缘图像的 8 个高斯描绘子,结果如表 1 所示。表 1 中的数值是原值扩大 100 倍后的结果,表 2~表 5 亦然。

将图 2~图 5 中编号为(I)的 4 幅图像作为模板,然后利用如下的 Chebychev 距离度量计算两幅图像之间的距离:

$$d_{i,j} = \max_k |x_{ik} - x_{jk}| \quad (12)$$

计算结果如表 2~表 5 所示。

本实验的阈值取 1.00,也就是说,当待识别的图像与模板之间的距离小于或等于 1.00 时,就将它归入该模板所属的类。由表 2~表 4 可知,实验识别率为 100%。

事实上,我们还用其他近 20 组图像(每组 5 幅)做过实验,结果仅有一幅旋转图像被误识,识别率达 $79/80 = 98.8\%$ 。这正好印证了前面所言:高斯描绘子具有很高的识别/匹配率。

从表 1~表 5 可明显看出:高斯描绘子的确具有平移、旋转、尺度和反射不变性;同类物体之间的距离很小,而类间距离很大。不仅如此,在 4 组梳子图中,第 1 组和第 2 组较为相似,第 3 组和第 4 组较为相似,考察实验数据发现,第 1 组和第 2 组之间的距离比第 1 组和第 3 组、第 1 组和第 4 组、第 2 组和第 3 组、第 2 组和第 4 组之间的距离小很多,同样,第 3 组和第 4 组之间的距离较之第 3 组和第 1 组、第 3 组和第 2 组、第 4 组和第 1 组、第 4 组和第 2 组之间的距离,也是大为减少。也就是说,形状相似性体现为特征数值的接近,形状上的大相径庭则表现

表 1 各组梳子图像的的高斯描绘子
Tab.1 Gaussian descriptors of the comb images

梳子图像	编号	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
第 1 组	(I)	7.59	22.27	34.61	38.11	37.12	34.36	29.89	23.76
	(II)	7.59	22.27	34.61	38.11	37.12	34.36	29.89	23.76
	(III)	7.41	22.28	34.44	37.68	37.01	34.10	29.72	23.63
	(IV)	7.42	22.16	34.64	38.09	37.21	34.35	29.87	23.76
	(V)	7.59	22.27	34.61	38.11	37.17	34.36	29.89	23.76
第 2 组	(I)	9.78	28.22	36.01	38.54	38.28	35.82	30.93	24.88
	(II)	9.78	28.22	36.01	38.54	38.28	35.82	30.93	24.88
	(III)	9.42	28.34	35.94	38.70	38.27	35.80	31.00	24.93
	(IV)	9.43	28.19	35.98	38.60	38.32	35.83	30.95	24.87
	(V)	9.67	28.22	36.01	38.64	38.31	35.82	30.95	24.88
第 3 组	(I)	1.44	9.05	19.43	27.70	31.07	31.67	27.59	21.13
	(II)	1.44	9.05	19.43	27.70	31.07	31.67	27.59	21.13
	(III)	1.40	9.02	19.57	27.74	31.02	31.76	27.58	21.12
	(IV)	1.50	8.91	19.40	27.68	31.04	31.83	27.58	21.12
第 4 组	(I)	3.41	15.41	24.45	31.05	31.53	29.90	28.22	22.52
	(II)	3.41	15.41	24.45	31.05	31.53	29.90	28.22	22.52
	(III)	3.47	15.14	24.70	31.10	31.68	29.78	28.21	22.56
	(IV)	3.43	15.43	24.50	30.97	31.51	29.92	28.26	22.52

表 2 距离矩阵(平移)
Tab.2 Distance matrix(translation)

平移后的图像	模板			
	第 1 组(I)	第 2 组(I)	第 3 组(I)	第 4 组(I)
第 1 组(II)	0.00	5.95	15.17	10.15
第 2 组(II)	5.95	0.00	19.18	12.82
第 3 组(II)	15.17	19.18	0.00	6.36
第 4 组(II)	10.15	12.82	6.36	0.00

表 3 距离矩阵(旋转)
Tab.3 Distance matrix(rotation)

旋转后的图像	模板			
	第 1 组(I)	第 2 组(I)	第 3 组(I)	第 4 组(I)
第 1 组(III)	0.43	5.94	15.00	9.98
第 2 组(III)	6.07	0.36	19.29	12.93
第 3 组(III)	15.04	19.20	0.13	6.39
第 4 组(III)	9.91	13.08	6.09	0.27

表 4 距离矩阵(伸缩)
Tab.4 Distance matrix(scaling)

伸缩后的图像	模板			
	第 1 组(I)	第 2 组(I)	第 3 组(I)	第 4 组(I)
第 1 组(IV)	0.13	6.07	15.21	10.19
第 2 组(IV)	5.93	0.35	19.15	12.79
第 3 组(IV)	15.21	19.31	0.16	6.49
第 4 组(IV)	10.11	12.79	6.38	0.08

表 5 距离矩阵(反射)
Tab.5 Distance matrix(reflection)

反射后的图像	模板			
	第 1 组(I)	第 2 组(I)	第 3 组(I)	第 4 组(I)
第 1 组(V)	0.01	5.95	15.17	10.15
第 2 组(V)	5.95	0.11	19.17	12.81

为特征数值的明显差别。所以,仅就对物体形状的刻画能力而言,高斯描绘子也不失为一种良好的

特征。

利用高斯描绘子方法对一幅边缘图像进行识别/匹配时,主要的时间耗费是计算该图像在 64 个点上(共有 8 个圆,每个圆取 8 个点)的高斯势函数 $f(\theta, \lambda)$ 的大小。实验是在 Pentium 4/CPU1.84GHz/内存 512MB 的 PC 机上用 MATLAB6.5 实现的,结果表明,对一幅 256×256 的边缘图像实现归类平均耗时为 0.10s。相对于其他绝大多数常用的形状特征描述法,高斯描绘子的时间复杂度无疑低很多。

因为本文高斯描绘子方法不是针对特定的应用背景提出的,其理论基础具有普遍适应性,所以高斯描绘子的应用范围广泛,凡是可利用物体形状特征进行识别/检索的领域均可用之。值得一提的是,由于该方法的识别/检索速度快,因此将它用于互联网上的在线图像检索尤显优势。

最后,谈谈高斯描绘子对边缘变动和噪声的承受能力。因为原图像质量、噪声和边缘检测方法等原因,提取出的边缘不可能都是完美无缺的,部分边缘的缺失、冗余、断裂或粘连等情况是不可避免的。很多基于边缘的形状特征表示法对噪声很敏感,轻微的边缘变动就会导致形状特征数值的巨大改变,这大大地影响了它们的应用。而高斯描绘子方法对边缘质量没有太高要求,它不要求边缘是封闭的,对一定程度上的边缘变动不敏感。

在图 6 中,(b)、(c)和(d)都是用样条小波对左上角的图像进行多尺度边缘提取的结果,所选尺度因子和阈值的不同,导致 3 个边缘图像的差别。

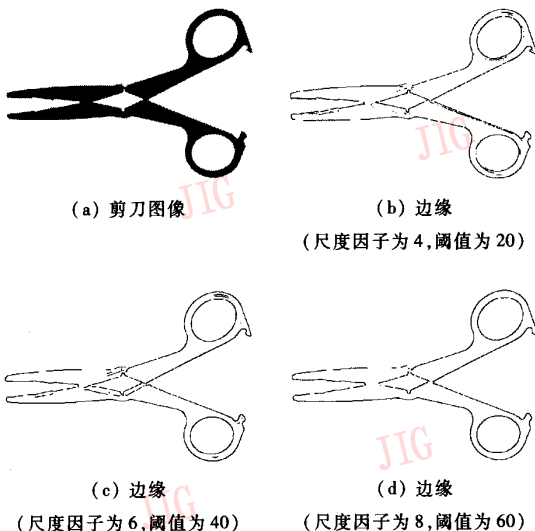


图 6 剪刀图像和它的 3 幅边缘图

Fig. 6 A scissor and its 3 contour images

表 6 给出 3 幅边缘图像的高斯描绘子。从 Chebychev 度量而言,图 6(b)和图 6(c)之间的距离为 0.65,图 6(b)和图 6(d)之间的距离为 0.78,图 6(c)和图 6(d)之间的距离为 0.71。可以看出,边缘的轻微变化所引起的高斯描绘子的数值变化也是轻微的、可以接受的。究其原因有两点:第一,计算 P 点(对照图 1)的高斯势函数 $f(\theta, \lambda)$ 的值时,只考虑落在对应的圆内部的“边缘”,因而边缘变动或噪声的影响具有局部性;第二, $f(\theta, \lambda)$ 中 2 维高斯函数的使用,使得只有离 P 点较近的边缘变动或噪声才对计算结果产生较大影响,但所谓的“较大影响”也是有限的——因为高斯函数的取值范围是 $[0, 1]$,故任何变动或噪声都不可能引起 $f(\theta, \lambda)$ 函数值的急剧变化——也就是说,边缘变动或噪声的影响具有“平和”性。

表 6 剪刀图像的高斯描绘子

Tab. 6 Gaussian descriptors of the scissor images

图 6	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
(b)	4.71	16.41	22.77	28.82	31.57	32.89	27.54	22.32
(c)	4.85	16.66	23.48	29.03	30.93	32.65	27.77	22.42
(d)	5.49	16.93	23.23	29.14	31.39	32.58	27.68	22.41

4 结 论

基于轮廓的形状特征在模式识别、计算机视觉和 CBRS 中扮演着举足轻重的作用,现有的形状描述方法具有这样或那样的缺陷。本文提出了一种新的形状特征表示法——高斯描绘子,并从理论和实验结果上证明了该方法具有识别/匹配率高、相对于平移、旋转、伸缩和反射不变、计算量小、对适度的边缘变动和噪声不敏感以及适用范围广等优点。可以看出,高斯描绘子从不同角度克服各种现有方法的不足,具有广阔的应用前景。

在以后的工作中,将不断补充、完善和改进高斯描绘子方法。具体地说,将关注以下几方面:(1)构造出具有仿射不变性的高斯描绘子;(2)针对具有闭合外边缘的物体,用外边缘代替圆,已有工作结果表明,这时类间距离明显大于用本文方法得出的类间距离,所以,将研究具有封闭外边缘的物体的高斯描绘子;(3)基于区域的特征虽然有计算量大等缺点,但其抗噪能力明显强于基于轮廓者,所以还将研

究基于区域的高斯描绘子;(4)将高斯描绘子推广到3维空间。

参考文献 (References)

- 1 Liu Yi-shu, Yang Li-hua, Sun Qian. Contour-based moment invariants and their application to the recognition of object shapes [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2004, 9(3): 308 ~ 313. [刘亦书, 杨力华, 孙倩. 轮廓矩不变量及其在物体形状识别中的应用[J]. *中国图象图形学报*, 2004, 9(3): 308 ~ 313.]
- 2 Hu MK. Visual pattern recognition by moment invariants[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1962, 8(2): 179 ~ 187.
- 3 Taubin G, Cooper DB. Recognition and positioning of rigid objects using algebraic moment invariants [A]. In: *SPIE Conference on Geometric Methods in Computer Vision* [C], Florida, USA, 1991: 175 ~ 186.
- 4 The CH, Chin RT. On image analysis by the methods of moments [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1988, 10(4): 496 ~ 513.
- 5 Teague MR. Image analysis via the general theory of moments[J]. *Journal of the Optical Society of America*, 1979, 70(8): 920 ~ 930.
- 6 Goshtasby A. Description and discrimination of planar shapes using shape matrices [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1985, 7(6): 738 ~ 743.
- 7 Sergios Theodoridis, Konstantinos Koutroumbas. *Pattern Recognition (Second Edition)* [M]. New York, USA: Elsevier Science, 2003: 270 ~ 294.
- 8 Gonzalez Rafael C, Woods Richard E. *Digital Image Processing (Second Edition)* [M]. New York, USA: Prentice Hall, 2002: 660 ~ 675.
- 9 Rucklidge WJ. Efficient locating objects using Hausdorff distance [J]. *International Journal of Computer Vision*, 1997, 24(3): 251 ~ 270.
- 10 Davies ER. *Machine Vision: Theory, Algorithms, Practicalities* [M]. New York, USA: Academic Press, 1997: 171 ~ 191.
- 11 Otterloo Peter van. *A Contour-oriented Approach to Shape Analysis* [M]. New York, USA: Prentice Hall, 1991: 90 ~ 108.
- 12 Sonka M, Hlavac V, Boyle R. *Image Processing, Analysis and Machine Vision* [M]. London, UK: Chapman & Hall, 1993: 193 ~ 242.
- 13 Bimbo AD, Pala P. Visual image retrieval by elastic matching of user sketches[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(2): 121 ~ 132.
- 14 Asada H, Brandy M. The curvature primal sketch [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1986, 8(1): 2 ~ 14.
- 15 Chellappa R, Bagdazian R. Fourier coding of image boundaries[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1984, 6(1): 102 ~ 105.
- 16 Tieng QM, Boles WW. Recognition of 2D object contours using the wavelet transform zero-crossing representation[J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1997, 19(8): 910 ~ 916.
- 17 Yang HS, Lee SU, Lee KM. Recognition of 2D object contours using starting-point-independent wavelet coefficient matching[J]. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 1998, 9(2): 171 ~ 181.
- 18 Zhang Dengsheng, Lu Guojun. Review of shape representation and description techniques [J]. *Pattern Recognition*, 2004, 37(1): 1 ~ 19.
- 19 Apostol TM. *Mathematical Analysis* [M]. MA, USA: Addison-Wesley Publishing Company, 1957: 182 ~ 235.
- 20 Mallat S, Hwang WL. Singularity detection and processing with wavelets [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1992, 38(2): 617 ~ 643.
- 21 Mallat S. *Wavelet Tour of Signal Processing(2nd edition)* [M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999: 189 ~ 200.

附录 A 定理 1 的证明

证明

(1) 平移不变性证明 由式(4)显然可知:对于给定的 θ 和 λ , $f(\theta, \lambda)$ 是关于平移不变的。再由式(5)易得: $I(\lambda)$ 具有平移不变性。

(2) 旋转不变性证明 为简便起见,假设坐标原点在曲线 C 的质心处。由式(4)可知,对任意的 $\theta \in [0, 2\pi]$ 和 $\lambda \in (0, +\infty)$, 有

$$f(\theta, \lambda) = f(\theta - 2\pi, \lambda) \quad (A1)$$

设曲线 C 逆时针方向作了角度为 $\Delta\theta \in [0, +\infty)$ 的旋转,记旋转后的曲线为 \tilde{C} , 记 \tilde{C} 的高斯势函数为 $\tilde{f}(\theta, \lambda)$, 则显然有

$$\tilde{f}(\theta, \lambda) = f(\theta + \Delta\theta, \lambda) \quad (A2)$$

记 \tilde{C} 的高斯描绘子为 $\tilde{I}(\lambda)$, 则

$$\begin{aligned} \tilde{I}(\lambda) &= \frac{\int_0^{2\pi} \tilde{f}(\theta, \lambda) d\theta}{2\pi} = \frac{\int_{\Delta\theta}^{2\pi+\Delta\theta} f(\theta, \lambda) d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{\int_0^{2\pi} f(\theta, \lambda) d\theta}{2\pi} = I(\lambda) \end{aligned}$$

(3) 尺度不变性证明 为简便起见,假设坐标原点在曲线 C 的质心处,而且曲线 C_1, C_2, \dots, C_n ($n \geq 1$) 是光滑的(这在实践中是可行的,因为任意曲线都可由一条光滑曲线来逼近)。设曲线 C_i ($1 \leq i \leq n$) 进行尺度因子为 s 的伸缩以后变成 \tilde{C}_i , 记 $\tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \dots + \tilde{C}_n$ 。设曲线 C_i ($1 \leq i \leq n$) 的方程为

$$\begin{cases} x = x_i(t) \\ y = y_i(t) \end{cases} \quad (\alpha_i \leq t \leq \beta_i) \quad (A3)$$

那么, \tilde{C}_i 的方程为

$$\begin{cases} x = \tilde{x}_i(t) = sx_i(t) \\ y = \tilde{y}_i(t) = sy_i(t) \end{cases} \quad (\alpha_i \leq t \leq \beta_i) \quad (A4)$$

显然, 曲线 \tilde{C} 的质心也是原点(0,0)。设曲线 \tilde{C} 的参照圆半径为 \tilde{r} , 由式(3), 得

$$\tilde{r} = \frac{\int_{\tilde{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds}{\int_{\tilde{C}} ds} \quad (A5)$$

由第 1 型曲线积分的计算公式^[19], 有

$$\begin{aligned} \tilde{r} &= \frac{\int_{\tilde{C}} \sqrt{x^2 + y^2} ds}{\int_{\tilde{C}} ds} \\ &= \frac{s \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sqrt{(x_i(t))^2 + (y_i(t))^2} \sqrt{(x'_i(t))^2 + (y'_i(t))^2} dt}{\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_i}^{\beta_i} \sqrt{(x'_i(t))^2 + (y'_i(t))^2} dt} \\ &= sr \end{aligned} \quad (A6)$$

同理可得, 曲线 \tilde{C} 上所有点的分散程度 $\tilde{\sigma}^2$ 为

$$\tilde{\sigma}^2 = s^2 \sigma^2 \quad (A7)$$

类似于 $C^{(\lambda)}$ 的定义, 记 $\tilde{C}^{(\lambda)} = \{(x, y) \mid (x, y) \in \tilde{C}, \text{ 且 } (x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \leq (\lambda \tilde{r})^2\}$ 。由式(A6)可知, $\tilde{C}^{(\lambda)}$ 是 $C^{(\lambda)}$ 伸缩 s 倍的结果。设曲线 C_i 落在圆 $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 \leq (\lambda r)^2$ 内那部分为 $C_i^{(\lambda)}$, 即 $C^{(\lambda)} = C_1^{(\lambda)} + C_2^{(\lambda)} + \dots + C_n^{(\lambda)}$, 再记 $C_i^{(\lambda)}$ 伸缩 s 倍所得曲线为 $\tilde{C}_i^{(\lambda)}$, 则显然有 $\tilde{C}^{(\lambda)} = \tilde{C}_1^{(\lambda)} + \tilde{C}_2^{(\lambda)} + \dots + \tilde{C}_n^{(\lambda)}$ 。设 $C_i^{(\lambda)}$ ($1 \leq i \leq n$) 的参数方程为

$$\begin{cases} x = x_i(t) \\ y = y_i(t) \end{cases} \quad (\alpha_i^{(\lambda)} \leq t \leq \beta_i^{(\lambda)}) \quad (A8)$$

则 $\tilde{C}_i^{(\lambda)}$ ($1 \leq i \leq n$) 的参数方程必为

$$\begin{cases} x = \tilde{x}_i(t) = sx_i(t) \\ y = \tilde{y}_i(t) = sy_i(t) \end{cases} \quad (\alpha_i^{(\lambda)} \leq t \leq \beta_i^{(\lambda)}) \quad (A9)$$

设 $\tilde{C}^{(\lambda)}$ 的高斯势函数为 $\tilde{f}(\theta, \lambda)$, 则由式(4)、(A3)、(A4)、(A6)、(A7)、(A8)和(A9), 有

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta, \lambda) &= \frac{\int_{\tilde{C}^{(\lambda)}} e^{-\frac{(x - \lambda r \cos \theta)^2 + (y - \lambda r \sin \theta)^2}{2\sigma^2}} ds}{\int_{\tilde{C}^{(\lambda)}} ds} \\ &= \frac{\int_{C^{(\lambda)}} e^{-\frac{(x - \lambda r \cos \theta)^2 + (y - \lambda r \sin \theta)^2}{2\sigma^2}} ds}{\int_C ds} \\ &= f(\theta, \lambda) \end{aligned} \quad (A10)$$

记 \tilde{C} 的高斯描绘子为 $\tilde{I}(\lambda)$, 由式(5)和(A10)显然可得

$$\tilde{I}(\lambda) = I(\lambda)$$

(4)反射不变性证明 仍然设坐标原点在曲线 C 的质心处, 而且曲线 C_1, C_2, \dots, C_n ($n \geq 1$) 是光滑的。记曲线 C 关于原点对称的曲线为 \tilde{C} , C_i ($1 \leq i \leq n$) 关于原点对称的曲线为 \tilde{C}_i , 显然, $\tilde{C} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \dots + \tilde{C}_n$ 。

下面证明 $\tilde{I}(\lambda) = I(\lambda)$ 。设曲线 C_i ($1 \leq i \leq n$) 的方程为(A3), 则 \tilde{C}_i 的方程为

$$\begin{cases} x = \tilde{x}_i(t) = -x_i(t) \\ y = \tilde{y}_i(t) = -y_i(t) \end{cases} \quad (\alpha_i \leq t \leq \beta_i) \quad (A11)$$

显然, 曲线 \tilde{C} 的质心也是原点(0,0)。记 \tilde{C} 的参照圆半径为 \tilde{r} , \tilde{C} 上所有点的分散程度为 $\tilde{\sigma}^2$, \tilde{C} 的高斯势函数为 $\tilde{f}(\theta, \lambda)$, 高斯描绘子为 $\tilde{I}(\lambda)$ 。与(3)的证明过程类似, 有

$$\tilde{r} = r \quad (A12)$$

$$\tilde{\sigma} = \sigma^2 \quad (A13)$$

$$\tilde{f}(\theta, \lambda) = f(\theta + \pi, \lambda) \quad (A14)$$

由(A14)和(2)的证明过程, 可知

$$\tilde{I}(\lambda) = I(\lambda)$$

而任意反射变换均可分解为平移、旋转和关于原点的对称变换, 既然 $I(\lambda)$ 关于这 3 种变换都是不变的, 那么, $I(\lambda)$ 必具有反射不变性。

证明完毕。