

一种新的 TSP 问题环路构造算法及其在 激光雕刻机路径控制中的应用

阮亮中 张利 吴超

(清华大学电子工程系, 北京 100084)

摘要 通过引入全局构造原则,并借鉴了 Kruskal、2-opt 等算法的思想,提出了一种新的时间复杂度为 $O(N^2)$ 的环路构造算法,并将其运用于激光雕刻机雕刻复杂图形时的路径优化。本算法生成路径长度约为理论下限的 1.1 倍,上浮幅度与 NN 和 GD 算法比较,分别下降了 58% 和 42%。将此算法嵌入激光雕刻机控制程序,可将雕刻头空走的距离缩减 88%。

关键词 激光雕刻 TSP 环路构造算法 全局构造原则

中图分类号: TP301 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)06-1114-05

A New Tour Construction Algorithm and its Application in Laser Carving Path Control

RUAN Liang-zhong, ZHANG Li, WU Chao

(Department of Electronic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084)

Abstract By Bring in integral principle and the idea of Kruskal/2-opt algorithm, a new tour construction algorithm with time complicity $O(N^2)$ is presented in this paper. In fact, carving path of laser carving machine could be transferred to the traveling salesman problem(TSP) and optimized for laser carving process(LCP). In this algorithm, some reasonable small loops are constructed in the first step, then larger loops are progressively synthesized with the small ones from bottom to top and in the end, a near-optimal resolution can be captured in this way. Moving distance resulted from this calculation is about 1.1 times of lower bound due to Held and Karp. Experimental results show that in the case of laser engraving machine, this algorithm can reduce the vacancy path by 88%.

Keywords laser engraving, TSP(Traveling salesman problem), tour construction algorithm, global construction principle

1 引言

利用激光在金属或其他材料表面进行快速雕刻文字、图形或图像,已是一种受到广泛重视的新兴技术。激光雕刻机在雕刻复杂图形时,由于图形的不连续性,必须经常转移激光头,有时这种空走的距离长度占用雕刻机激光头移动距离中的相当大的一部分,降低了雕刻机工作效率。若要解决这一问题,必须优化激光头的运行路线。由于雕刻过程中,非常

复杂的图形是由许多小的环线构成的(见图3),又由于激光头移动时存在一定误差,为减少误差带来的图形失真,一般设计成同一个圈一次刻完。这样,激光头空走距离最小化的问题便转化为大规模的狭义 TSP 问题^[1]。它可以被简单地描述为:设给定欧几里德平面上的 N 个点 $C = \{C_1, C_2, C_3, \dots, C_n\}$,其中任意点的坐标记为 $d(X_i, Y_j)$,求一条经过 C 中点一次且仅一次的一条路径 $(C_{n(1)}, C_{n(2)}, C_{n(3)}, \dots, C_{n(N)})$,使得闭合路径长度为最小。同时,在工程实践中,对激光雕刻机的控制程序还有以下两个要求:

基金项目:国家自然科学基金项目(60572087)

收稿日期:2005-11-15; 改回日期:2006-03-21

第一作者简介:阮亮中(1984 -),男,清华大学电子信息工程专业 2003 级本科生。E-mail:rlz03@tsinghua.edu.cn

(1)时间复杂度:雕刻的图形一般相对精细、复杂,往往转化为大规模到超大规模的 TSP 问题。因此,要求算法有较低的时间复杂度。(2)通用性和稳定性:雕刻的图形特征各不相同,这就要求算法对各种图形都能够稳定地给出近似最优解,应避免出现对某些分布明显恶化或需要反复调整参数的情况。

TSP 问题的解法可分为环路构造算法和环路改进算法两种^[2]。前者从某个非法解开始,直至得到一个合法解为止。后者则是在给定初始的合法解之后,通过某种增广策略逐步改进该初始解,包括局部搜索、模拟退火、遗传算法等。两种解法相比,环路改进算法解的质量更好,但环路构造算法时间复杂度低,且算法过程相对简单,可控性更强,稳定性和通用性都比较好。

另一方面,我们注意到,近几年来,在环路构造算法上的研究相对较少,但事实上,环路构造算法是环路改进算法的基础。一个好的构造算法,可以为下一步的环路改进算法提供优质的初始解,提高改进算法的效率。

基于以上原因,本文将主要研究环路构造算法,以提高环路构造算法效率。

目前的环路构造算法主要包括时间复杂度为 $O(N^2)$ 的最近邻算法(NN)、贪心算法(GD)、复杂度为 $O(N^2 \log N)$ 的 Clarke-Wright 算法^[3]和复杂度为 $O(N^3)$ 的 Christofides 算法^[4]等。

本文在已有构造算法基础上引入全局构造原则,提出了一种自底向上,通过逐步融合各个局部小圈,最终得到一个 Hamilton 环路作为近似解的算法,并用该算法进行模拟计算。模拟计算结果显示,在相同复杂度的算法中,这种算法具有快捷稳定的优越性能;将该算法结果运用到激光雕刻机上,效果良好,可将雕刻头空走的距离缩减 88%。

局构造原则。

设在构造中的某一步,已经生成了若干个子路径,每个子路径都是一个小环,不妨标记为 A, B, C, D, E, \dots (如图 1),暂时假设圈上的点都足够密,可以忽略其离散性。考虑如何将它们融合成一个圈,使新增加的路径长度最短。

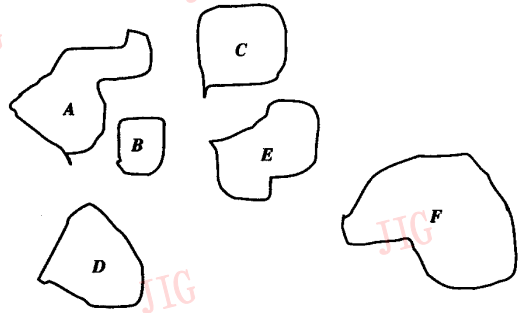


图 1 子路径示意图

Fig. 1 Image of sub-path

设: $A = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$, $B = \{B_0, B_1, B_2, \dots, B_m\}$, 定义两圈距离:

$$D_{AB} = \min \{ |A_i B_k| + |A_{i+1} B_{k+1}| - |A_i A_{i+1}| - |B_k B_{k+1}|, |A_i B_{k+1}| + |A_{i+1} B_k| - |A_i A_{i+1}| - |B_k B_{k+1}| \}$$

其中, $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, $k \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ 。

这是因为,以 A_1, A_2 和 B_1, B_2 为例,如果以后两圈在此处融合,则有两种可能: $A_1 B_1, A_2 B_2$ 相连,去除原有 $A_1 A_2, B_1 B_2$ 之间的连接,如图中点线所示;或者 $A_1 B_2, A_2 B_1$ 相连,去除原有 $A_1 A_2, B_1 B_2$ 之间的连接,如图中虚线所示。两种情况下路径总长度的增量分别为 $|A_1 B_1| + |A_2 B_2| - |A_1 A_2| - |B_1 B_2|$ 和 $|A_1 B_2| + |A_2 B_1| - |A_1 A_2| - |B_1 B_2|$ 。

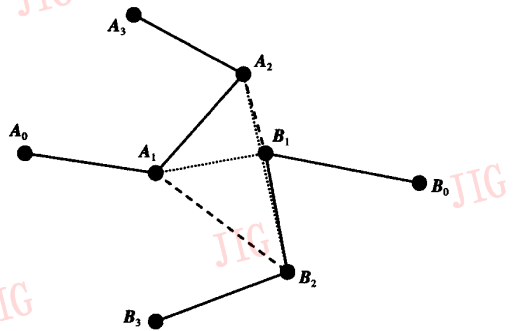


图 2 融圈算法的构造树

Fig. 2 Tree structure of loop calculation

这就是前面两圈距离定义式的来源。之所以要考虑两种可能,则是受到 2-opt 算法的启发。2-opt 的

2 算法的基本思想

目前常用的最近邻法(NN)和贪婪法(GD)都可以看作是最小生成树经典算法:Prim 算法和 Kruskal 算法限制节点的度为 2 后的结果。但由于这两种算法中,点的加入仅由局部两点的点距离决定,缺乏全局指导;另一方面,该算法没有充分考虑到节点的度受限后的特殊性,使致在构造过程中,只能在现有路径的两端加入新的点,局部路径一旦生成,无法修改。为了克服这一问题,我们考虑引入全

每一步搜索,实际上是通过颠倒路径中某一段子路径的顺序来搜索更优路径。而前面考虑的两种融合方法,区别恰在于融合后原来 B 圈中的点的顺序是否颠倒。也就是说,我们通过这一方法,把 2-opt 的部分效果融入到了构造过程之中。下文将连接 A_1B_1, A_2B_2 称为逆序融合,连接 A_1B_2, A_2B_1 , 称为同序融合。

基于以上讨论,我们只需要在第一步合理地构造若干个小圈,就可以自底向上的逐步将各个小圈融合成一个大圈,得到一个接近于最优解的解。

3 算法描述

3.1 算法

输入:待排序的点集 $Z = \{z_0, z_1, z_2, \dots, z_{N-1}\}$

输出:该点阵的一个近似最优路径 $Path = \{p_0, p_1, p_2, \dots, p_{N-1}\}$

Begin

(1) 初始化,构造初始小圈集:在边集中按升序取出一组两两互不相交的边,每条边视为一个在两个顶点间来回一次形成的圈。若存在没有被归入取出边的顶点,视为一个自身到自身的圈。记此初始化圈集 $Loop = \{loop_0, loop_1, \dots, loop_{M-1}\}$ 显然 M 将略大于 $N/2$ 。

(2) 逐步构造 Hamilton 环路 H_0 :

每轮循环中:

- 找出当前最近的两个圈;
- 将两个圈合并;
- 将其其他圈到这两个圈的距离修改为此圈到原来两圈距离的较小者;
- 分别计算新增加的两条边到其他圈上的边的距离,如果较原来距离更短,调整相应距离;
- 若 c 中最短距离位置与融合位置冲突,以新增加的边到相应圈的最短距离为最小距离。

(3) 辅助补偿:

对链长 $p = 2, \dots, [N/10]$ 的子链

在 $Loop[0]$ 中依序截取长度为 p 个顶点的链 w 将子路径 w 调转顺序,若总的边权降低则将子路径调转。

End

3.2 算法合理性的证明

定理:算法的时间复杂度为 $O(N^2)$

证明:1) 初始化过程中:计算所有点两两之间距离时间复杂度为 $O(N^2)$,若采用高级排序方法,

排序复杂度为 $O(M \log N)$,判断两条线段是否交叉的需常数时间,一共不超过 $N/2$ 条线段。

2) 构造过程中:外层循环的次数近似为 $N/2$;逐步构造过程中各步骤时间复杂度:

- 若采用高级排序方法,复杂度 $< O(\log N)$;
 - 常数时间;
 - 由于圈数 $< N$,复杂度为 $O(N)$;
 - 由于所有圈中恰共有 N 条线段,复杂度为 $O(N)$ 。
- 因此,构造过程的时间复杂度也不超过 $O(N^2)$ 。

3) 补偿过程循环次数: $N \times N/10$,每次需常数时间。

综上所述,该算法的 3 个步骤的时间复杂度均不超过 $O(N^2)$,故算法的总时间复杂度也为 $O(N^2)$,证毕。

结论:算法正确地求出了狭义 TSP 的近似最优解。

证明:由于初始化保证了所有点无遗漏或重复地加入初始小圈集,以后每一步融合两个圈时,都可以保证新融合的路径是一个局部的 Hamilton 环路,且每一次融合都恰是剩余的总圈数下降 1,这样,经过初始圈数 $M - 1$ 次融合后,必然得到唯一的 Hamilton 环路,作为本问题的合理解。由于融合中充分利用了环路的特性,加入了全局构造原则的指导,可以得质量较好的解。

4 实验结果与比较分析

为方便与激光雕刻机数据生成软件整合,采用 VC 编程,实验平台为 HP Presario M2000。

4.1 随机点阵检验

在随机生成的点阵上运行最近邻 (NN)、贪心 (GD) 和本文提出的算法 (暂记为 LOOP) 等 3 种算法,并将多次运行得到的平均路径长度与理论下限比较。

目前公认的 TSP 问题理论的下限最早由 Held 和 Karp 提出^[5,6],其后许多相关研究进一步改进了这一下限的估计。本文采用由 Johnson 等人^[7]提出的公式作为理论下限,即

对单位正方形内随机分布的 N 点点阵,其对应 Hamilton 环路长度下限为

$$C_{HK}(N) = N^{0.5} \left(0.70805 + \frac{0.52229}{N^{0.5}} + \frac{1.31572}{N} - \frac{3.07474}{N^{1.5}} \right) \quad (1)$$

由于本文采用在 600×600 的正方形区域内的随机

分布点阵,上述公式变换为

$$C_{HK}(N) = 600 \times N^{0.5} \left(0.70805 + \frac{0.52229}{N^{0.5}} + \frac{1.31572}{N} - \frac{3.07474}{N^{1.5}} \right) \quad (2)$$

表 1 NN、GD、LOOP 等 3 种算法编程计算的平均路径长度比较

Tab. 1 Comparisons of Mean moving lengths by M-LOOP with those by GD and NN

	规模: $N=10^2$ 运行 20 次			规模: $N=10^{2.5}$ 运行 20 次			规模: $N=10^3$ 运行 20 次		
	NN	GD	LOOP	NN	GD	LOOP	NN	GD	LOOP
最好值	5 650.4	5 212.4	4 967.6	9 398.2	9 149.1	8 644.6	16 515.6	16 109.0	15 140.5
最坏值	6 449.8	6 023.5	5 383.3	11 019.1	9 733.2	9 014.9	18 385.1	17 352.9	16 064.8
平均值	5 801.3	5 510.2	5 109.1	9 978.6	9 364.4	8 801.8	17 354.1	16 443.2	15 443.5
理论下限		4 622.2			7 903.9			13 770.8	
比率	1.255	1.192	1.105	1.263	1.185	1.113	1.260	1.194	1.121

* 比率 = 平均值/理论下限值

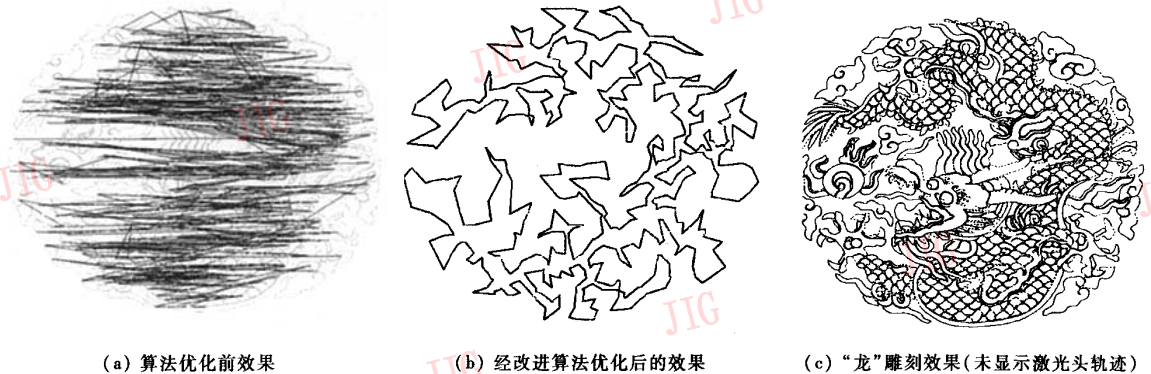
由表 1 实验数据可见,相同复杂度的样本,与 NN 和 GD 算法比较,上浮幅度分别下降了 58% 和 42%。本的路径质量已与时间复杂度为 $N^2 \log N$ 的算法中效果最好的 Clarke-Wright 算法接近,后者在相应规模时的平均/理论下限值分别为 1.092, 1.107, 1.113^[2],改进融圈算法的结果与之相差不超过 0.8%。

4.2 实验数据统计

将最近邻 (NN)、贪心 (GD) 和本算法 (LOOP) 等 3 种算法编程计算后的路径长度实验结果列于表 1。

4.3 仿真检验

将算法嵌入激光雕刻机雕刻顺序控制程序,并用激光雕刻机仿真软件模拟,实验结果如图 3 所示。为了突出显示激光头空走的距离,仿真时将雕刻头空走的部分用粗实线显示。可见相对于原来从上至下的雕刻顺序,优化后的空走距离大大减小。



(a) 算法优化前效果

(b) 经改进算法优化后的效果

(c) “龙”雕刻效果(未显示激光头轨迹)

图 3 “龙”激光仿真雕刻图

Fig. 3 Pictures of China dragon carved by laser

由表 2 可见,通过优化,激光头空走的距离下降为优化前的 12.4%,总距离也下降率为优化前的 45.2%。考虑到本算法的低时间复杂度,这种优化效果可认为应是相当好的。

假设能采用环路改进算法再将空走距离降到理论下限,经计算可得,总距离可降为 750 576.3,为目前优化后总距离的 98.29%,并没有很大的改进,但计算时间将大大延长。由此可见,在激光雕刻机问题中,采用本算法较为理想。

表 2 优化前后激光头的工作运行距离

Tab. 2 Comparisons of moving lengths by optimizing M-LOOP with that by LOOP

	有效距离	空走距离	总距离	比率 (%)
优化前	632 771	1 056 496	1 689 269	62.54
优化后	632 771	130 893	763 665	17.14

注:比率 = 空走距离/总距离。

5 结 论

由实验结果可见,由于本算法中运用了较合理的全局构造原则,充分考虑 Hamilton 环路的特殊性,大幅改进了原有环路构造算法的性能,较好地解决了激光雕刻机雕刻顺序问题,明显提高了激光雕刻机的工作效率。下一步的工作可向两个方向:(1)提出更合理的初始圈集或引入更合理的全局构造原则,进一步改进该算法;(2)考虑利用融圈算法为环路改进算法提供优质的初始解,提高环路改进算法的运行效率。

参考文献 (References)

- 1 WANG Jin-biao. Evolution logic and algorithm for narrow TSP geometric solution[J]. Computer Engineering, 2005, 31(14): 75 ~ 77. [王锦彪. 狭义 TSP 几何解的演化逻辑与算法[J]. 计算机工程, 2005, 31(14): 75 ~ 77.]
- 2 Johnson D S, McGeoch L A. The traveling salesman problem: a case study in local optimization[A]. In: Aarts E H, Lenstra J K, eds. Local Search in Combinatorial Optimization[M], New York: John Wiley and Sons, 1996.
- 3 Clarke G, Wright J W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points [J]. Operations Research, 1964, 12(4): 568 ~ 581. Jul. -Aug., 1964,
- 4 Christofides N. Worst-Case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem. Technical Report [R], No. 388, Pittsburgh, PA: Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.
- 5 Held M, Karp R M. The traveling-salesman problem and minimum spanning trees[J]. Operations Research, 1970, 18(6): 1138 ~ 1162. Nov. -Dec., 1970.
- 6 Held M, Karp R M. The traveling salesman problem and minimum spanning trees: Part II[J]. Mathematical Programming, 1971: 16 ~ 25.
- 7 Johnson D S, McGeoch L A, Rothberg E E. Asymptotic experimental analysis for the Held-Karp traveling salesman bound [A]. In: Proceedings of the seventh Annual ACM—SIAM Symposium on Discrete Algorithms[C], 1996: 341 ~ 350. Atlanta Georgia, United States.