

# 各向异性多尺度自相似随机场与地形构建

李旭涛 朱光喜 曹汉强 彭复员

(华中科技大学电子与信息工程系, 武汉 430074)

**摘要** 在长期自然环境的作用下,实际的地形表面是一个各向异性、非线性的2维场,且地形的自相似特性在整个尺度空间上并非恒定的,而是与度量的尺度范围相关。由于传统的自相似随机场的构建方法并不能准确反映地形的实际特性,因此提出一种首先应用多尺度自相似随机场构建各向同性地形表面,然后引入表征各向异性的结构滤波器,再通过谱变换构建具有各向异性的多尺度自相似地形的的方法。实验结果表明,该地形构建方法不仅能够反映实际地形的自相似性依尺度而变化的特点,而且能构建山脉的走向。

**关键词** 分形 多尺度自相似性 各向异性 地形构建

**中图法分类号:** TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)07-1286-05

## Anisotropy Multi-scale Self-similarity Random Field and Terrain Construction

LI Xu-tao, ZHU Guang-xi, CAO Han-qiang, PENG Fu-yuan

(Department of Electronics and Information Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074)

**Abstract** Due to long period natural evolvement, real terrain surface is an anisotropic and nonlinear field. Moreover, terrain surface is not always so perfect that it keeps invariable self-similar characteristic in whole scale space. Traditional construction method based on isotropic single self-similar field has weaker ability to describe such complex surface. Consequently, multi-scale self-similar random field are used to construct isotropic multi-scale self-similar surface. And then, a structure filter, which transforms an isotropic field to an anisotropic field by spectrum filtering, is introduced to construct anisotropic multi-scale self-similar terrain. Simulation results show that presented approach not only constructs the orientation of mountain but also accord with varying degrees of roughness at different scales.

**Keywords** fractal, multi-scale self-similarity, anisotropy, terrain construction

## 1 引言

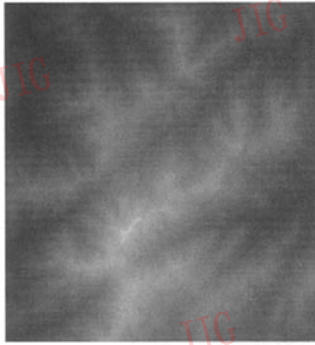
地形表面的数学描述是地理学和自动化导航等研究的重要课题,该课题的研究归结为合理的数学模型的建立。地形的数字化通常采用基于数字高程(digital elevation models, DEM)和三角网格(triangulated irregular network, TIN)的方法<sup>[1]</sup>,而且在其数学建模中存在随机统计过程、回归过程和分形等不同的模型<sup>[2]</sup>。其中,在分形模型中占统治地位的

是分数布朗运动(fractal brownian motion, FBM)<sup>[3]</sup>模型。20世纪80年代初,Pentland提出了自然表面粗糙度的分形描述<sup>[4]</sup>,并以Hurst指数 $H$ 的大小表征纹理的复杂程度,从而给出了一种描述自然表面非线性本质特征的方法。自相似性也即标度的不变性是分形体重要特征,若自然表面具有良好的自相似性,则其自相似性曲线应该在整个度量空间上保持良好的线性。研究表明,地形表面是长期自然演化的产物<sup>[5]</sup>,具有显著的各向异性和非线性的特点,且其标度往往仅在某些度量区间上保持不变,如图1(a)

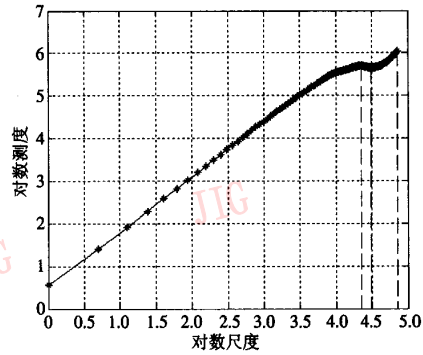
基金项目:国家自然科学基金资助项目(60475024,60272099)

收稿日期:2006-02-17; 改回日期:2006-06-09

第一作者简介:李旭涛(1971~),男,2006年于华中科技大学获博士学位,现为华南理工大学电子与信息学院博士后。主要研究方向为信号建模和图像处理。E-mail: xutao\_li@163.com



(a) 地形表面



(b) 自相似特性曲线

图 1 地形表面的自相似性

Fig. 1 The self-similarity of terrain surface

所示的地形表面,其大尺度条件下的自相似性同小尺度条件下的自相似性存在明显差异(如图 1(b)所示)。因此,实际地形表面的自相似性应该视为一个同一定尺度范围相关的概念<sup>[6]</sup>。

传统的 2 维 FBM 模型实际上是一个各向同性场,并没有考虑实际地形的各向异性,并且通常认为地形在整个尺度范围内具有理想的自相似特性。Kaplan 首先认识到了自相似性同尺度的相关性,提出了扩展自相似模型(extended self-similar, ESS)<sup>[7]</sup>,但是其模型对于场的各向异性的表征过于复杂,而其他基于不规则 TIN 插值<sup>[1]</sup>的方法数据量又太大。为表征地形的多尺度自相似性和各向异性,本文引入了表征 2 维场各向异性的结构滤波器<sup>[8]</sup>,并将地形表面的自相似指数看作依度量尺度范围而变化的变量  $H_{\Delta}(s)$ 。构建地形表面时,首先采用传统的随机中点置换方法<sup>[3]</sup>生成自相似性依尺度变化的各向同性场;然后通过结构滤波实现了各向异性多尺度自相似随机地形的构建,方法简便有效。

## 2 地形表面的自相似性

一般而言,若用尺度为  $\varepsilon$  的量规测量,测得的分形集的测度为  $N(\varepsilon)$ 。集合  $S$  由  $N(\varepsilon)$  个不相交的子集构成,每个子集同集合  $S$  具有  $\varepsilon S$  的关系<sup>[2]</sup>,即自相似集  $S$  的每一部分同整体之间总是相似的。令  $D$  为自相似性的标度,其具有对尺度的不变性,代表了分形集的维数。 $N(\varepsilon)$  随测量尺度  $\varepsilon$  而变化,并具有关系式

$$N(\varepsilon) \propto \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^D, \varepsilon \rightarrow 0 \quad (1)$$

或者

$$D = -\ln(N(\varepsilon))/\ln(\varepsilon) + C \quad (2)$$

其中,  $C$  为常数,  $D$  为集合  $S$  的 Hausdorff 维数,或自相似维数和分形维数。常见的统计自相似模型, FBM 模型将自然表面的粗糙现象归结为随机行走的结果。Hurst 指数为  $H$ , 当  $t > 0$ , 初值为  $B_0$  的 FBM 定义为

$$B_H(0) = B_0$$

$$\begin{aligned} B_H(t) - B_H(0) &= \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \int_{-\infty}^t k(t - \hat{t}) dB(\hat{t}) \\ &= \frac{1}{\Gamma(H + 1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^0 (|t - s|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2}) dB(s) + \int_0^t |t - s|^{H-1/2} dB(s) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $0 < H < 1$ , 分形维数  $D = E + 1 - H$ 。其中  $E$  为集合  $S$  的欧氏维数,对于 2 维地形表面,  $E = 2$ 。一般,一个分数布朗函数由零均值高斯增量的随机过程描述,即

$$\text{var}(B_H(t + s) - B_H(t)) = \sigma^2 |s|^{2H} \quad (4)$$

对于 2 维表面,

$$\langle |f(x, y) - f(x + \Delta x, y + \Delta y)|^2 \rangle = \sigma^2 |\Delta x^2 + \Delta y^2|^H \quad (5)$$

其中,  $\sigma^2$  为随机场的方差。为刻画地形表面的自相似性,可采用矩估计法,选择二阶矩为测度  $\mu(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon$  代表相应的度量尺度,尺度的范围为  $1 \leq \varepsilon \leq L/2$ 。刻画地形表面的自相似性时,令  $\mu(\varepsilon)$  为集合  $S$  的测

度,  $\varepsilon$  为度量的尺度, 其变化范围为  $[\varepsilon_{\min}, \varepsilon_{\max}]$ , 对于具有  $L \times L$  个数据点的 2 维地形表面,  $\varepsilon_{\min} = 1, \varepsilon_{\max} = L/2$ ; 然后计算尺度和测度的对数, 并在双对数坐标上绘制出自相似性曲线 (如图 1(b) 所示); 最后通过最小均方回归计算出自相似性曲线的斜率, 此斜率就代表了地形表面的自相似性指数。

### 3 自相似性的多尺度表征

为扩展自相似性以适应多尺度表征的目的, 将指数  $H$  视为依度量尺度范围而变化的变量  $H_{\Delta}(s)$ , 因此将式(4)描述的尺度幂率关系重新定义为

$$\text{var}(B_H(t+s) - B_H(t)) = \sigma^2 |s|^{2H_{\Delta}(s)} \quad (6)$$

其相应的 2 维场为

$$\langle |f(x,y) - f(x+\Delta x, y+\Delta y)|^2 \rangle = \sigma^2 |\Delta x^2 + \Delta y^2|^{H_{\Delta}(s)} \quad (7)$$

因此, 多尺度自相似随机场实际是相对的局部自相似随机场。若数据按  $2^m$  降采样, 则  $s = 2^{-m}$ ,  $m = 0, 1, \dots, N, N = \text{lb}V$ , 这里  $V$  为数据的空间尺寸, 这就为应用小波多尺度特性和随机中点置换法<sup>[3]</sup>实现模型的仿真提供了方便。

### 4 各向异性的表征

由 2 维各向同性场扩展到各向异性场的途径很多, 且均可归结为结构函数  $\varphi(\Delta)$  ( $\Delta \in \mathbb{R}^2$ ) 的使用, 而具有更广泛意义的结构函数则刻画了 2 维场的各向异性特征<sup>[8]</sup>。考虑一个由 2 维正交坐标系  $(x, y)$  定义的具有平稳增量的随机场  $F(x, y)$ , 对任意的空间方向  $(\Delta_x, \Delta_y)$ ,  $F(x, y)$  能够通过其结构函数  $\varphi(\Delta_x, \Delta_y)$  刻画, 该结构函数表征了在所有方向  $(\Delta_x, \Delta_y)$  上增量的变化以及平稳增量场的自相关。结构函数的空间表示为

$$\varphi(x, y) = \rho^{2H} f(\theta) \quad (8)$$

其中,  $0 < H < 1, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \text{angle}(x, y)$ ,  $f$  是一个以  $\pi$  为周期的函数, 对于各向同性的 FBM 场,  $f$  为常数。一个 2 维各向异性场  $F_{\Delta}(x, y)$  能够将一个各向同性场  $F_1(x, y)$  通过滤波器  $h_{\varphi}(x, y)$  可得到

$$F_{\Delta}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} h_{\varphi}(u, v) F_1(x-u, y-v) d(u, v) \quad (9)$$

其相应的谱表示为

$$S_{\Delta}(\omega_x, \omega_y) = S_1(\omega_x, \omega_y) H_{\varphi}(\omega_x, \omega_y) \quad (10)$$

这里将  $H_{\varphi}(\omega_x, \omega_y)$  称为表征各向异性的结构滤波

器, 其具体形式为

$$H_{\varphi}(\omega_x, \omega_y) = (1 + \alpha - 2\alpha \cos^2(\omega_{\theta} - \theta_0))^{-1} \quad (11)$$

其中,  $\omega_{\theta} = \arctan(\omega_y/\omega_x)$ , 参数  $\alpha \in [0, 1]$  称为各向异性强度因子, 不难看出, 当  $\alpha = 0$  时, 结构滤波器并不改变场的相关特性, 而  $\theta_0 \in [0, \pi]$  则表征了各向异性场的方向。同  $F_1(x, y)$  相比, 在方向  $\theta_0$  上,  $F_{\Delta}(x, y)$  的相关性得到了增强, 而在同  $\theta_0$  垂直的方向上,  $F_{\Delta}(x, y)$  的相关性被削弱。

### 5 仿真方法与结果

应用上述方法, 具体构建各向异性多尺度自相似地形的步骤为:

- (1) 根据生成地形的需要设定地形的 4 个特征点, 也即随机场的 4 个端点, 以确定地形的坡度;
- (2) 先依据需仿真的地形表面特性, 再依尺度构造自相似指数  $H_{\Delta}(s)$ ,  $s = 2^{-m}$ ,  $m = 1, \dots, N$ ,  $N = \text{lb}V$ ,  $V$  为所要构建地形数据的大小;
- (3) 应用小波合成、谱合成以及随机中点置换由多尺度  $H_{\Delta}(s)$  对应的尺度关系合成 2 维各向同性随机场  $F_1(x, y)$ ;
- (4) 将所获取的  $F_1(x, y)$  进行离散傅里叶变换 (DFT) 即得到各向同性场的谱  $S_1(\omega_x, \omega_y)$ ;
- (5) 对  $S_1(\omega_x, \omega_y)$ , 由式(10)通过式(11)所定义的结构滤波变换, 即得到各向异性场的谱  $S_{\Delta}(\omega_x, \omega_y)$ ;
- (6) 对  $S_{\Delta}(\omega_x, \omega_y)$  进行 IDFT (逆离散傅里叶变换), 即获得所需方向和强度的各向异性场  $F_{\Delta}(x, y)$ 。

为便于说明合成地形的多尺度自相似特性, 本文采用随机中点置换法,  $m = 1$  代表了最初的迭代置换 (对应于大尺度),  $m = N$  对应最终的迭代置换 (对应于小尺度)。不失一般性, 令  $V = 128$ , 则  $N = 7$ , 为验证本文方法的效果, 进行了两组仿真实验, 第 1 组在参数分别选择  $H_{\Delta}(s) = [0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9]$  和  $H_{\Delta}(s) = [0.9, 0.9, 0.9, 0.5, 0.3, 0.3, 0.3]$  时, 考察各向同性多尺度自相似地形与传统 FBM 场 (Hurst 指数  $H = 0.9$  和  $H = 0.3$ ) 的差异; 第 2 组考察当  $H_{\Delta}(s) = [0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9]$  时, 不同结构滤波器参数对生成的各向异性多尺度自相似地形的影响。

第 1 组实验, 当  $H_{\Delta}(s) = [0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.9, 0.9, 0.9]$  时, 表明大尺度条件下地形表面的粗

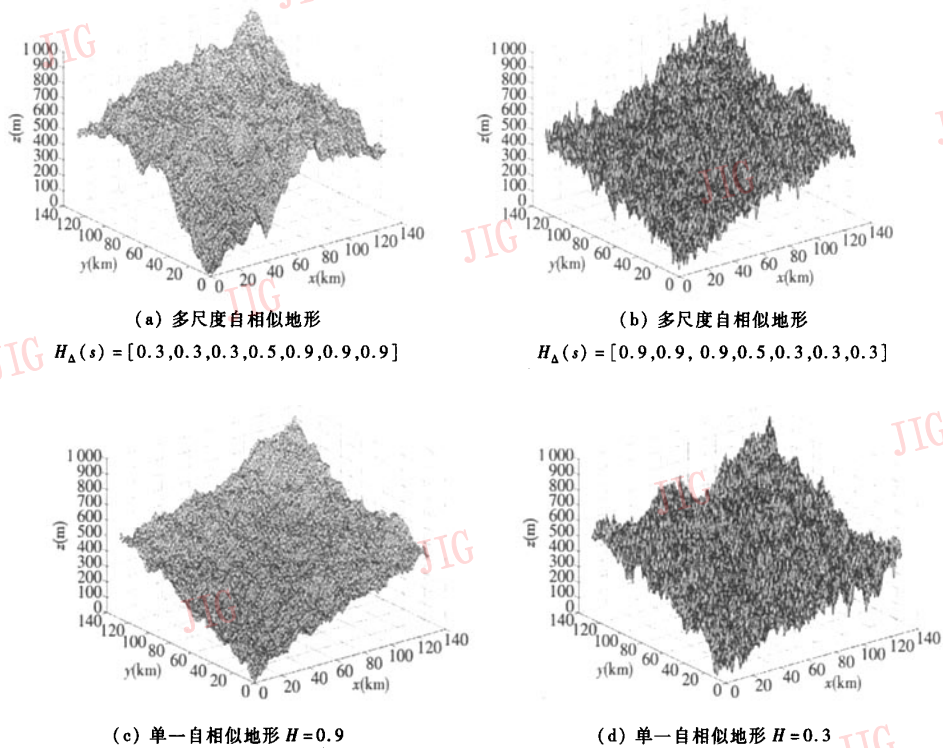


图 2 各向同性地形表面

Fig. 2 Isotropic self-similar terrain surfaces

糙度大于小尺度时的粗糙度,所构建的具有多尺度自相似性各向同性的地形表面如图 2(a)所示;当  $H_{\Delta}(s) = [0.9, 0.9, 0.9, 0.5, 0.3, 0.3, 0.3]$  时,表明大尺度条件下地形表面的粗糙度小于小尺度时的粗糙度,其所构建的具有多尺度自相似性各向同性的地形表面如图 2(b)所示;采用传统 FBM 场由 Hurst 指数  $H = 0.9$ 、 $H = 0.3$  所构建的地形表面分别如图 2(c)和图 2(d)所示。为便于显示,4 个起始特征点高程值分别设定为 1000m, 500m, 500m, 0m, 以使生成的地形具有一定的坡度,而令每单位(分辨率)地形的尺寸为 1km。仿真结果表明,单一自相似的地形由于其自相似性在整个尺度空间上保持恒定,也即无论在小尺度还是大尺度条件下,其表面的粗糙度一致。而多尺度自相似地形表面的自相似性,由于在大尺度和小尺度条件下具有差异,因而使得宏观和局部的粗糙度明显不同。由图 2 可以看出,多尺度自相似地形具有比单一自相似地形更为丰富的自相似特征,同时也更加符合实际地形具有复杂而丰富表现的特性。

第 2 组实验,  $H_{\Delta}(s) = [0.3, 0.3, 0.3, 0.5, 0.9,$

$0.9, 0.9]$  时,当  $\theta_0 = \pi/4$  时,由  $\alpha = 0.8$  和  $\alpha = 0.9$  所生成的各向异性多尺度自相似地形分别如图 3(a)和图 3(b)所示。实验结果表明,当  $\alpha = 0.9$  时,地形的各向异性要明显强于  $\alpha = 0.8$  时,即  $\alpha$  越大,则各向异性越强。当  $\alpha = 0.8$  时,由  $\theta_0 = \pi/3$  和  $\theta_0 = \pi/6$  所生成的地形如图 3(c)和图 3(d)所示,结果表明,  $\theta_0$  控制着地形走向。图 3 所示的各向异性多尺度自相似地形除具有上述多尺度自相似地形的特点外,同时还突出表征了山脉的走向。

### 6 结 论

地形表面是一类复杂的自然表面,其自相似性具有尺度的相关性,即多尺度特性,并且各向异性在实际地形中非常常见。传统的基于各向同性的 FBM 场的构建方法并不完全符合实际需要,为此本文提出了一种描述地形多尺度自相似性的方法,并且通过引入表征各向异性的结构滤波器,实现了各向异性多尺度地形表面的构建,仿真表明,新的方法能够反映传统方法所无法表征的特性。

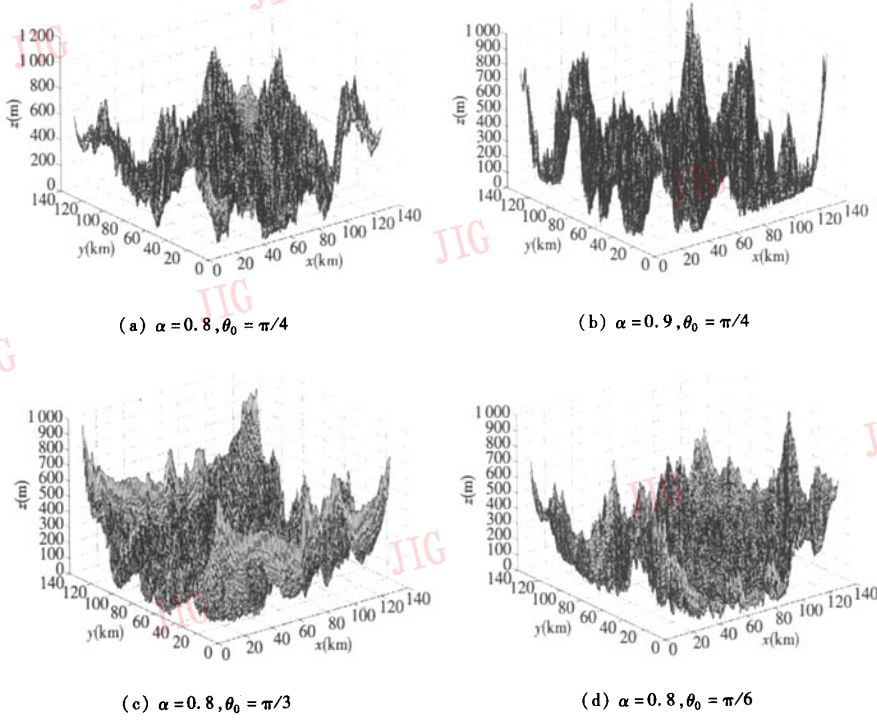


图 3 各向异性多尺度自相似地形表面

Fig. 3 Anisotropic multi-scale self-similar terrain surface

参考文献 (References)

- 1 Lonley P A, Goodchild M F, Maguire D J, et al. Eds. Geographical Information System Vol. 1[M]. New York: John Wiley. Sons, Inc., 1999.
- 2 Zhang Ji-xian, Liu Jian, Li De-ren. Technical approach to realistic terrain generation[J]. Journal of Image and Graphics, 1997, 2(9): 638 ~ 645. [张继贤,柳健,李德仁. 地形生成技术与方法的研究[J]. 中国图象图形学报, 1997,2(9): 638 ~ 645.]
- 3 Falconer K J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications[M]. New York: John Wiley. Sons, Inc., 1990.
- 4 Pentland A. Fractal-based description of natural scenes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1984, 6(11): 666 ~ 674.
- 5 Li Meng, Zhu Ling-ren, Long Hai-ying. On self-affine fractal and

- multi-fractal properties of landform system in the Tianshan area, Xinjiang[J]. Earth Quake Research in China, 2002, 18(4): 401 ~ 408. [李猛,朱令人,龙海英. 天山地区地貌系统的自仿射分形与多重分形特征研究[J]. 中国地震, 2002, 18(4): 401 ~ 408.]
- 6 Li Xu-tao, Cao Han-qiang, Zhu Guang-xi, et al. Complicated self-similarity of terrain surface [A]. In: Proceedings of SPIE, The Fourth International Symposium on Multispectral Image Processing and Pattern Recognition 2005 [C], Wuhan China, 2005, 6044: 414 ~ 424.
- 7 Kaplan L M, Kuo C C J. Extending self-similarity for fractional Brownian motion [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1994, 42(12): 3526 ~ 3530.
- 8 Pesquet-Popescu B, Vehel J L. Stochastic fractal models for image processing[J]. IEEE Transactions on Signal Processing Magazine, 2002, 19(9): 48 ~ 62.