

利用 Barnsley 蕨作为陷阱构造伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集

王兴元^{1),2)} 王婷婷¹⁾

¹⁾(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024) ²⁾(大连海事大学计算机科学与技术学院, 大连 116026)

摘要 本文将 Pickover、Carlson 和叶瑞松的陷阱技术进行了改造,以 Barnsley 蕨类植物叶子(简称 Barnsley 蕨)作为陷阱,并提出了双陷阱技术。将 Carlson 和叶瑞松采用静态陷阱由陷入法构造复多项式 $F(z) = z^4 + (c - a_0)z^2 - a_0c$ 的伪 3D 牛顿变换的准 M 集的方法进行了推广,利用 Barnsley 蕨陷阱构造并研究了复多项式 $F(z) = z^\alpha + (c - a_0)z^\beta - a_0c$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha > \beta \geq 2$) 伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集。研究表明:(1)无论 α 和 β 取何正整数,广义 M 集中都存在着由坏点组成的经典 M 集,且经典 M 集的指向随 α 和 β 的不同而不同;(2)广义 M-J 集中存在着具有 3D 效果且与对应陷阱形状相近的大小不同的彩色元素,并具有自相似特征;(3) α 和 β 为正小数时,相角 θ 主值范围的不同选取将导致广义 M-J 集的不同演化。

关键词 Barnsley 蕨 陷阱技术 伪 3D 牛顿变换 广义 M-J 集

中图分类号: TP301.5 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)04-0700-07

Utilizing Barnsley Fern as Orbit Trap to Construct Virtual Three-Dimension Generalized Mandelbrot-Julia Sets of Newton Transform

WANG Xing-yuan^{1),2)}, WANG Ting-ting¹⁾

¹⁾(School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024)

²⁾(School of Computer Science & Technology, Dalian Maritime University, Dalian 116026)

Abstract We extend Pickover, Carlson and Ye Ruisong's trap technique, come up with Barnsley fern as orbit trap and double-trap technique. Based on Carlson and Ye Ruisong's virtual 3D (three-dimension) Newton transform quasi Mandelbrot sets for $F(z) = z^4 + (c - a_0)z^2 - a_0c$ with static trap, we construct and study the virtual 3D Newton transform generalized Mandelbrot-Julia sets for $F(z) = z^\alpha + (c - a_0)z^\beta - a_0c$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, $\alpha > \beta \geq 2$) using Barnsley fern as orbit trap. Then we find: (1) No matter what positive integer α and β is, it can always be found that there is standard Mandelbrot set structure formed by "bad" points in the generalized 3D Mandelbrot set; (2) In generalized Mandelbrot-Julia sets, there are various 3D color cells that correspond with the shape of the trap; (3) When α and β are positive decimal, the evolutions of Mandelbrot-Julia sets depend on the choices of the principal ranges of the phase angle.

Keywords Barnsley fern, trap technique, virtual 3D, Newton transform, generalized Mandelbrot-Julia set

1 引言

分形理论是数学家 Mandelbrot 为描述所有尺度

上复杂结构的不规则、破碎形状而创造的^[1,2]。目前,分形理论发展极其迅速,新成果层出不穷,用计算机绘制分形的理论与算法也日新月异,并已成为一个独立的研究方向^[2-4]。牛顿迭代是求解非线性

基金项目:国家自然科学基金项目(60573172);辽宁省教育厅高等学校科学技术研究项目(20040081)

收稿日期:2005-05-24;改回日期:2005-11-18

第一作者简介:王兴元(1964~),男,教授,博士生导师。1999年于东北大学获计算机软件与理论专业博士学位。主要研究方向为混沌与分形理论及应用。近年来出版学术专著2部,以第1作者身份在国内外核心期刊上发表论文90余篇(其中被SCI/EI收录共40余篇)。E-mail: Wangxy@dlut.edu.cn

方程的一种常用的数值方法^[5], Cayley 曾将其推广到复数域,分析了方程 $z^3 - 1 = 0 (z \in C)$ 解的特性,并开创了分形学中牛顿变换的 J 集这一研究领域^[6]。为揭示这种分形集更深刻的内容,研究人员先后采用了迭代法和逃逸时间算法构造并研究了牛顿变换的 J 集^[6-15]; Carlson 曾推广了 Peitgen 和 Pickover 的二元分解法和 ε -正交法,提出了陷阱跟踪技术并构造了复多项式

$$F(z) = z^4 + (c - a_0)z^2 - a_0c \quad (1)$$

的伪 3D 牛顿变换的准 M 集和 J 集^[16,17];叶瑞松又以经典 M-J 集为陷阱构造了式(1)准 M 集^[18];文献[19]将 Pickover、Carlson 和叶瑞松的静态陷阱技术进行了改进,提出了圆陷阱、动态陷阱技术和轨道逃出着色法。在上述研究基础上,本文将 Carlson 的模型推广为

$$F(z) = z^\alpha + (c - a_0)z^\beta - a_0c \quad (2)$$

$(\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \text{且 } \alpha > \beta \geq 2)$

采用了 Barnsley 蕨作为陷阱,构造并研究了伪 3D 牛顿变换的 M-J 集。

2 理论与方法

在数值分析中,求实系数方程的根可采用牛顿法。而在复平面上应用牛顿法,同样也可求出复系数方程的数值解:设 $F: C \rightarrow C$ 是复系数多项式,定义有理函数

$$f(z) = z - F(z)/F'(z) \quad (3)$$

称 $f(z)$ 为相应于函数 $F(z)$ 的牛顿变换。与实系数的情形类似,若 $F'(z) \neq 0$,则 z^* 是方程 $F(z) = 0$ 的根的充分必要条件是 $f(z^*) = z^*$,即 z^* 是相应的牛顿变换函数的不动点。

令 ω 为 f 的不动点,若存在大于 1 的最小整数 p ,使 $f^p(\omega) = \omega$,则称 ω 是 f 的周期为 p 的周期点。令复变微商 $(f^p)'(\omega) = \lambda$,若 $\lambda = 0$,则称点 ω 为超吸引的;若 $0 \leq |\lambda| < 1$,则称点 ω 为吸引的;若 $|\lambda| = 1$,则称点 ω 为中性的;若 $|\lambda| > 1$,则称点 ω 为斥性的。有理函数 f 的 Julia 集 J_f 不一定有界(但肯定是闭的)。对于阶数大于 2 的高阶多项式 $F(z)$,如果 F 的零点是 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$,且 $F'(\omega_i) \neq 0$,则牛顿变换 f 的 Julia 集应当是每个零点的吸引域的边界

$$J_f = \partial A(\omega_1) = \dots = \partial A(\omega_n)$$

一个在任何一个吸引域边界上的点,也一定在其他所有吸引域的边界上,而且由于 Julia 集 J_f 是

不可数的,因此这样的多重边界点是非常之多。乍看起来,这是很难想象,实际上也是相当奇异的。

定理 1^[20] Julia 集 J_f 为多项式 f 的斥性周期点的闭包,它是不含孤立点的不可数紧子集,如果 $z \in J_f$,则 J_f 是 $\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-n}(z)$ 的闭包。Julia 集是 f 的包含无穷远点在内的每一吸引不动点的吸引域的边界,而且 f 在 J_f 上的作用是混沌的。

在复动力学研究中,临界点的轨道起着主导作用,所谓临界点即是使 $f'(z) = 0$ 的点 z_0 。故由式(3)可知 f 的临界点应满足如下方程

$$\alpha(\alpha - 1)z^{\alpha-2} + \beta(\beta - 1)(c - a_0)z^{\beta-2} = 0 \quad (4)$$

若 α 和 β 为整数,且 $\alpha > \beta \geq 2$,则解方程(4)可求出 f 的临界点为 $z_0^{(1,2,\dots,\beta-2)} = 0$ 和 $z_0^{(\beta-1,\beta,\dots,\alpha-2)} = \{[\beta(\beta-1)(a_0-c)]/[\alpha(\alpha-1)]\}^{1/(\alpha-\beta)} e^{i[2\pi k/(\alpha-\beta)]}$ ($k=0,1,\dots,\alpha-\beta-1$)。

定义 1 设复映射 $f: z \mapsto z - F(z)/F'(z)$ (α 和 β 为整数,且 $\alpha > \beta \geq 2$)为黎曼球 \hat{C} 上的牛顿变换, M_f 表示 C 中 $z_0^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,\alpha-2$)点的轨道有界的复数 c 的集合,即

$$M_f = \bigcap_{j=1}^{\alpha-2} M_f^{(j)}$$

这里 $M_f^{(j)} = M_f(z_0^{(j)}) = \{c \in C: \{f^k(z_0^{(j)})\}_{k=1}^{\infty} \text{有界}\}$ ($j=1,2,\dots,\alpha-2$), $z_0^{(1,2,\dots,\beta-2)} = 0$ 和 $z_0^{(\beta-1,\beta,\dots,\alpha-2)} = \{[\beta(\beta-1)(a_0-c)]/[\alpha(\alpha-1)]\}^{1/(\alpha-\beta)} e^{i[2\pi k/(\alpha-\beta)]}$ ($k=0,1,\dots,\alpha-\beta-1$),则称 M_f 为相应于 f 的 M 集。

需要指出的是:Carlson 和叶瑞松在构造多项式 $F(z) = z^4 + (c - a_0)z^2 - a_0c$ 的牛顿变换的 M 集时,仅取 $z_0^{(1)} = \sqrt{(a_0 - c)/6}$ 作为初始迭代点,而此时的牛顿变换有两个临界点 $z_0^{(1,2)} = \pm \sqrt{(a_0 - c)/6}$,可见 Carlson 和叶瑞松得到的图像为 $M_f^{(1)}$,而不是真正的 $M_f = M_f^{(1)} \cap M_f^{(2)}$,故作者称其为准 M 集。

构造多项式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集的迭代方法如下:

(1) 将式(3)改写为

$$z_{n+1} = z_n - F(z_n)/F'(z_n) \quad (5)$$

$Err = F(z_n)/F'(z_n)$ 为误差;

(2) 设定视窗 $W (W \subset C \text{ 或 } Z)$, $\exists c \in W$ 且 $W \subset C$,令 $z_0 = 0$ 或 $\{[\beta(\beta-1)(a_0-c)]/[\alpha(\alpha-1)]\}^{1/(\alpha-\beta)} e^{i[2\pi k/(\alpha-\beta)]}$ ($k=0,1,\dots,\alpha-\beta-1$),计算 $z_n^{(j)}$ ($j=1,2,\dots,\alpha-2; n=1,2,\dots,N$; 本文取 $N=3000$); $\exists z_0 \in W$ 且 $W \subset Z$,给定参数 c 的值,计算 z_n ;

(3) 在参数 C 平面上, $\forall j (j=1,2,\dots,\alpha-2)$,

$\exists |F(z_n^{(j)})| \leq Err$ (本文取 $Err = 1E-4$); 在动力 Z 平面上, 若 $|F(z_n)| \leq Err$ 。则可认为 z_n 的值为方程 $F(z) = 0$ 的根, 赋予 z_0 点为白色;

(4) 若 z_0 的轨道落入某陷阱, 则根据落入点 z_n 的位置, 由陷阱和调色板技术赋予 z_0 点相应的颜色;

(5) 若 z_0 的轨道无落入发生, 且 z_n 不满足方程 $F(z) = 0$ 的求根要求, 则称 z_0 为“坏点”, 赋予 z_0 点为黑色;

(6) 重复过程 2 ~ 5, 直到穷尽视窗 W 内所有的点, 即可获得伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集。

2.1 陷阱技术

所谓陷阱是指复平面内划定的某些特殊区域,

这些区域可以是连续的, 也可以是不连续的。复平面上的点经迭代而产生的轨道可能会落入陷阱之中。若轨道落入某一陷阱的初始点被赋予相同的颜色, 则复平面上就会出现一些相同颜色的区域。令陷阱中的点到原点的最大距离为 D , 轨道落入该陷阱的点距原点的距离为 X , 则可利用 $(X/D)^2$ 来控制同一颜色区域的饱和度, 从而在 2D 平面上产生出伪 3D 效果。这里采用 Barnsley 蕨作为陷阱, Barnsley 蕨对应的仿射 IFS(iterated function system) 为

$$R_i: \begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n + e \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n + f \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

IFS 的相关参数及概率 P 如表 1 所示。

表 1 构造 Barnsley 蕨类植物叶子的相关参数及概率 P

Tab. 1 The parameters and probabilities P used for constructing the Barnsley fern

$R_i (i=1,2,3,4)$	a	b	c	d	e	f	$P_i (i=1,2,3,4)$
$i=1$	0	0	0	0.16	0	0	0.01
$i=2$	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
$i=3$	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.11
$i=4$	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.03

构造 Barnsley 蕨类植物叶子, 可采用绘制 IFS 吸引子的随机迭代算法^[2]: 设 (X, ρ) 是度量空间, 若 $\{X, R, P\}$ 是一个双曲的 IFS, 其中 $R = (R_i, i=1, 2, 3, 4), P = (P_i, i=1, 2, 3, 4)$ 为对应概率。首先选取初始点 $x_0 \in X$, 然后从 $\{R_i: P_i\}$ 中随机选取映射 R_{i_1} (R_{i_1} 对应的概率为 P_{i_1}) 去作用点 x_0 , 得到点 $x_1 = R_{i_1}(x_0)$ 。接下来, 按上述方法选取 R_{i_2} (其对应的概率为 P_{i_2}), 得到 $x_2 = R_{i_2}(x_1)$ 。这个过程重复进行, 从而得到一个点序列 $\{x_m\}$ 。选取充分大的整数 M_{max} , 则序列 $\{x_m, m \geq M_{max}\}$ 收敛于 IFS 吸引子 (如图 1 所示)。图 1(a) 为 Barnsley 蕨; 图 1(b) 是图 1(a) 经坐标变换得到的, 其中 1 号叶片与图 1

(a) 相同, 3 号叶片与 1 号叶片关于直线 $y = x$ 成轴对称, 2 号叶片与 3 号叶片关于 y 轴对称; 其余参数不变, 将概率改变为 $P_1 = 0.5, P_2 = 0.3, P_3 = 0.01$ 和 $P_4 = 0.01$, 经坐标变换可得到图 1(c)。

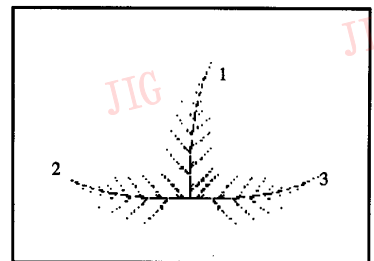
不同于 Pickover、Carlson 和叶瑞松的静态陷阱技术, 本文提出了双陷阱技术: 设存在双陷阱 T_1 和 T_2 , 且 $T_1 \supset T_2$, 若某点的轨道只落入 $T_1 - T_2$ 中, 则根据 T_1 相应的规则对该点着色; 若某点的轨道被 T_2 捕获, 则根据 T_2 相应的规则对该点着色。采用双陷阱算法, 可以增加分形图像的色彩层次, 使得到的广义 M-J 集更具有艺术感染力。本文使用图 1(b) 和图 1(c) 作为双陷阱 T_1 和 T_2 。



(a) Barnsley 蕨类植物叶子



(b) Barnsley 蕨合成叶片



(c) 改变概率的 Barnsley 蕨合成叶片

图 1 由 IFS 算法生成的 Barnsley 蕨

Fig. 1 The Barnsley fern generated by the IFS algorithm

2.2 调色板技术

获得伪 3D 效果的原理为:根据人眼的视觉特性,观察者认为物体中较亮的区域要比比较暗的区域离他更近。因此,若物体的某一个区域从边缘到内部的各像素点的亮度不断增加,则该区域具有凸出的特征;反之,则具有凹入的特征。基于色度学中三基色原理,采用了绿色作为主色的调色板,且根据亮度不同将主色分成 30 个值(表 2 所示),以便对复平面上的各像素点进行着色。由表 2 可知落入陷阱中的点与调色板的颜色一一对应,且其颜色为

$$Color = 29(X/D)^2 + 1 \quad (6)$$

由式(6)可知:若轨道落到陷阱中距离原点的最近点处,则初始点的 Color 为最小值,亮度达到最大值;若轨道落到陷阱中距离原点的最远点,则初始点的 Color 达到最大值 30,亮度为最小值;若陷入点落到其他位置,则初始点的 Color 值非线性地与落入点距原点的距离对应,即如式(6)。

表 2 调色板描述

Tab.2 The description of the color plan

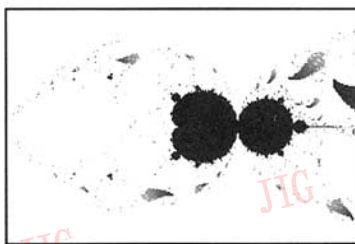
颜色	索引值	RGB 值		
		红	绿	蓝
绿色	1	0	255	108
	10	0	191	80
	20	0	120	48
	30	0	48	16

3 试验与结果

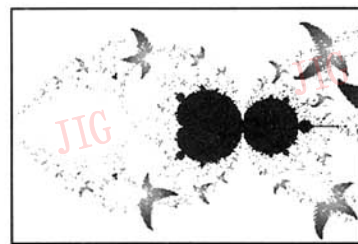
采用迭代法构造式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集,由于判断复平面上任意点的轨道是否被陷阱捕获,都要利用随机迭代算法构造 Barnsley 蕨,然后再将 Barnsley 蕨上的点逐一与轨道上的点相比较,直到穷尽 Barnsley 蕨上所有的点以判断出该点的轨道是否落入陷阱中。可见该算法需要消耗大量机时。为此,作者对该算法做了改进,即首先判断某点的轨道距离原点是否足够近,然后再决定是否做进一步的比较判断,这样可以大大减少算法的循环次数,提高了运算速度。

3.1 α 和 β 为整数

选取 $\alpha = 4, \beta = 2$ 和 $a_0 = 8$, 构造了式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 M 集(如图 2 所示)。其中图 2(a)和(b)分别采用了图 1(a)和(b)所示的陷阱,它们的坐标范围为:左上角坐标(10, 20),右下角坐标(70, -20);图 2(c)给出了图 2(b)中一个叶片的局部放大,图 2(c)的坐标范围为:左上角坐标(25, 8.9),右下角坐标(26.8, 10.1);图 2(d)采用了图 1(b)和(c)所给出的双陷阱,其坐标范围为:左上角坐标(25, 8.9),右下角坐标(26.8, 10.1)。观察图 2(a)和图 2(b),可见 M 集中黑色的坏点组成关于 x 轴对称的经典 M 集,且经典 M 集的每个“芽



(a) 采用 Barnsley 蕨陷阱



(b) 采用 Barnsley 蕨合成叶片陷阱



(c) 图(b)的局部放大



(d) 采用双陷阱

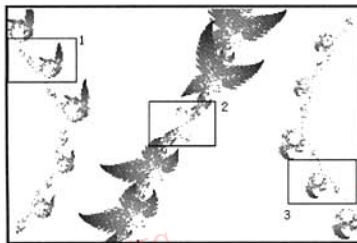
图 2 α 和 β 为整数时,式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 M 集

Fig.2 The virtual 3D generalized Mandelbrot sets of Newton's method of equation (2) with integral α and β

苞”都与一个绿色的 Barnsley 蕨叶片相对应,且大芽苞对应大叶片,小芽苞对应小叶片。图 2(a)和图 2(b)中经典 M 集的左侧斜上、下方还有两个较小的关于 x 轴对称的经典 M 集,将该处放大仍会看到上述芽苞与叶片的对应关系。观察局部放大图 2(c)可见, M 集中存在许多与陷阱——Barnsley 蕨相似的大小不一的叶片元素,这说明 M 集具有无穷嵌套的自相似几何结构。将图 2(d)与图 2(c)比较可见,图 2(d)的 Barnsley 蕨的叶片中增加了叶脉,这再次

说明了此时 M 集的叶片元素与双陷阱形状相似。

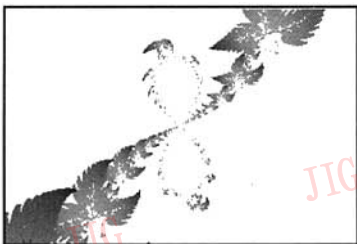
选取 $\alpha=4$ 、 $\beta=2$ 、 $c=i$ 和 $a_0=8$,构造了式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 J 集(如图 3 所示)。其中图 3(a)采用了图 1(b)所示的陷阱,其坐标范围为:左上角坐标 $(-3,2)$,右下角坐标 $(3,-2)$;图 3(b)、3(c)和 3(d)分别为图 3(a)中 3 个小方框区域的局部放大。观察图 3 可见,广义 J 集中出现与对应图 1(b)所示的陷阱形状相近的大小不同的绿色叶片。上述观察说明广义 J 集具有无穷嵌套的自相似几何结构。



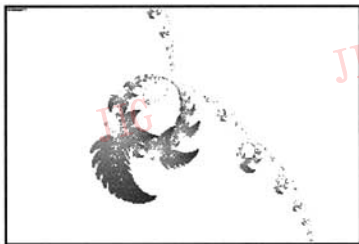
(a) 采用 Barnsley 蕨合成叶片陷阱



(b) 图(a)中小方框1的局部放大



(c) 图(a)中小方框2的局部放大



(d) 图(a)中小方框3的局部放大

图 3 α 和 β 为整数时,式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 J 集

Fig. 3 The virtual 3D generalized Julia sets of Newton's method of equation (2) with integral α and β

3.2 α 和 β 为小数

当 α 和 β 至少有一个为正小数时,构造式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 J 集。图 4 为具有代表性的一例,其采用了图 1(b)所示的陷阱,其坐标范围为:左上角坐标 $(-1.5,1)$,右下角坐标 $(1.5,-1)$,对应参数为 $\alpha=6$ 、 $\beta=2.3$ 、 $c=-1+2i$ 和 $a_0=1.5$ 。当 α 和 β 在两相邻整数间变化时,可将广义 J 集的演化解释为:由复映射式(5)构造广义 J 集,对 z^α 、 z^β 、 $z^{\alpha-1}$ 和 $z^{\beta-1}$ 的计算,采用了 DeMoivre 理论,如

$$z^\alpha = \|z\|^\alpha (\cos(\alpha\theta) + i\sin(\alpha\theta)) \quad (7)$$

这就涉及到相角 θ 主值范围的选取,选取 θ 的范围为以下 4 种情况: $[0, 2\pi)$ 、 $[-\pi, \pi)$ 、 $[-3\pi/2, \pi/2)$ 和 $[-\pi/2, 3\pi/2)$ 。当 α 和 β 为正整数时,将不会影响式(7)的使用,因

$$\begin{cases} \cos(\alpha\theta) = \cos(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \\ \sin(\alpha\theta) = \sin(\alpha\theta + 2\pi\alpha) \end{cases} \quad (8)$$

但 α 为正小数时,式(8)不成立,故 θ 范围的不同选取将导致 J 集的不同演化。另外在使用式(7)时,若 $\alpha\theta$ 超出上述 4 种主值范围,就要使 $\alpha\theta$ 加或减 2π 的整数倍来进行调整,这就导致广义 J 集出现了错动和断裂。而上述相角 θ 的选取在正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处的不连续性,表明错动和断裂出现在相角 θ 不连续的正 x 、正 y 、负 x 或负 y 轴处(图 4 中虚线处)。

α 和 β 为正小数时,如 $\alpha=2.5$ 、 $\beta=2$ 时,利用式(4)求出 f 的临界点,再由迭代法构造 M 集,也会发现:相角 θ 主值范围的不同选取将导致 M 集的不同演化。对这一现象的解释,可参看上述对 J 集演

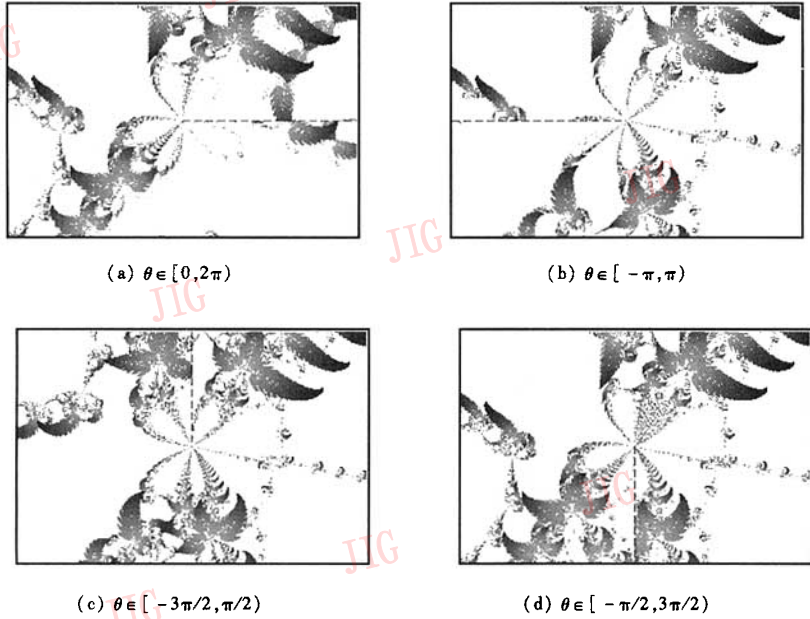


图 4 α 和 β 为小数时,式(2)的伪 3D 牛顿变换的广义 J 集

Fig. 4 The virtual 3D generalized Julia sets of Newton's method of equation (2) with real α and β

化的分析。

4 结 论

本文将 Pickover、Carlson 和叶瑞松的陷阱技术进行了改进,采用 IFS 吸引子——Barnsley 蕨作为陷阱,提出了双陷阱技术;同时将 Carlson 和叶瑞松采用静态陷阱由陷入法构造复多项式 $F(z) = z^4 + (c - a_0)z^2 - a_0c$ 的伪 3D 牛顿变换的准 M 集的方法进行了推广,利用 Barnsley 蕨陷阱和双陷阱技术由陷入法构造并研究了复多项式 $F(z) = z^\alpha + (c - a_0)z^\beta - a_0c$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, 且 $\alpha > \beta \geq 2$) 伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集。研究表明:(1) 无论 α 和 β 取何正整数,广义 M 集中都存在着由坏点组成的经典 M 集,且经典 M 集的指向随 α 和 β 的不同而不同;(2) 广义 M-J 集中存在具有 3D 效果且与对应陷阱形状相近的大小不同的彩色元素,并具有自相似特征;(3) α 和 β 为正小数时,相角 θ 主值范围的不同选取将导致广义 M-J 集的不同演化。

本研究给出了一种利用任意 IFS 吸引子作为陷阱去构造伪 3D 牛顿变换的广义 M-J 集的通用方法。利用 IFS 吸引子种类及形状的不同,可生成大量的具有艺术感染力的分形图像。

参考文献 (References)

- 1 Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature [M]. San Fransisco: Freeman W H, 1982: 5 ~ 47.
- 2 Wang Xing-yuan. Fractal Mechanism of the Generalized Mandelbrot-Julia Sets [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2002: 1 ~ 58. [王兴元著. 广义 M-J 集的分形机理[M]. 大连:大连理工大学出版社, 2002: 1 ~ 58.]
- 3 Peitgen H O, Saupe D. The Science of Fractal Images [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1988: 137 ~ 218.
- 4 Pickover C A. Computers, Pattern, Chaos and Beauty [M]. New York: St. Martin's Press, 1990: 43 ~ 105.
- 5 Zhang Chi-ping, Shi Yun-hui. Calculation Method [M]. Beijing: Science Press, 2002: 257 ~ 260. [张池平,施云慧著. 计算方法[M]. 北京:科学出版社, 2002: 257 ~ 260.]
- 6 Kneisl K. Julia sets for the super-Newton method, Cauchy's method, and Halley's method [J]. Chaos, 2001, 11(2): 359 ~ 370.
- 7 Peitgen H O, Saupe D, Haeseler F V. Cayley's problem and Julia sets [J]. Mathematical Intelligencer, 1984, 6(1): 11 ~ 20.
- 8 Wegner T, Peterson M. Fractal Creations [M]. Mill Valley: The Waite Group Press, 1991: 168 ~ 231.
- 9 Walter D J. Computer art representing the behavior of the Newton-raphson method [J]. Computers & Graphics, 1993, 17(4): 487 ~ 488.
- 10 Walter D J. Systemised serendipity for producing computer art [J]. Computers & Graphics, 1993, 17(6): 699 ~ 700.
- 11 Cartwright J H E. Newton maps: fractals from Newton's method for

- the circle map [J]. *Computers & Graphics*, 1999, 23(4): 607 ~ 612.
- 12 Gilbert W J. Generalizations of Newton's method [J]. *Fractals*, 2001, 9(3): 251 ~ 262.
- 13 Chen N, Zhu X L, Chung K W. M and J sets from Newton's transformation of the transcendental mapping $F(z) = e^{z^m} + c$ with vcp's [J]. *Computers & Graphics*, 2002, 26(3): 371 ~ 383.
- 14 Cilinger F. On infinite area for complex exponential function [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(5): 1189 ~ 1198.
- 15 Wang Xing-yuan, Liu Wei. Three-order generalized Newton transformation Julia sets [J]. *Journal of Engineering Graphics*, 2005, 26(2): 119 ~ 127. [王兴元, 刘威. 三阶广义牛顿变换的 Julia 集 [J]. *工程图学学报*, 2005, 26(2): 119 ~ 127.]
- 16 Carlson P W. Pseudo-3-D rendering methods for fractals in the complex plane [J]. *Computers & Graphics*, 1996, 20(5): 751 ~ 758.
- 17 Carlson P W. Two artistic orbit trap rendering methods for Newton's M-set fractals [J]. *Computers and Graphics*, 1999, 23(6): 925 ~ 931.
- 18 Ye R S. Another choice for orbit traps to generate artistic fractal images [J]. *Computers & Graphics*, 2002, 26(4): 629 ~ 633.
- 19 Wang Xing-yuan, Liu Wei. Utilizing trap technique to construct virtual three-dimension Newton transform Mandelbrot-Julia sets [J]. *Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics*, 2005, 17(4): 754 ~ 760. [王兴元, 刘威. 利用陷阱技术构造伪 3D 牛顿变换的 M-J 集 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2005, 17(4): 754 ~ 760.]
- 20 Blancharel P. Complex analytic dynamics on the Riemann sphere [J]. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1984, 11(1): 88 ~ 144.