

基于双正交多小波变换的多光谱与 全色图像融合研究

洪日昌 吴秀清 袁勋

(中国科学技术大学电子工程与信息科学技术系, 合肥 230027)

摘要 针对多光谱与全色图像融合中存在的光谱扭曲问题,提出了一种利用双正交多小波进行多分辨率分析,并结合平均与选择法处理小波高频系数的融合算法。该算法首先对已配准的多光谱图像进行IHS变换,然后分别对变换得到的强度分量I与全色图像进行双正交多小波分解,为增强融合图像的空间信息,对分解得到的高频系数利用平均与选择相结合的方法来确定,低频系数则通过邻域方差准则得到。最后由新的小波低频和高频系数重构并进行IHS逆变换得到融合图像。实验结果表明,该方法可以有效减少光谱扭曲,并提高图像的空间分辨率,保留图像中的边缘细节。

关键词 图像融合 双正交多小波 多分辨率分析 平均与选择 边缘细节

中图分类号: TP751.1 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)04-0684-07

Fusion of Multispectral and Panchromatic Images Based on Biorthogonal Multiwavelet Transform

HONG Ri-chang, WU Xiu-qing, YUAN Xun

(Department of Electronics Engineering and Information Science, University of Science and Technology of China, Hefei 230027)

Abstract In order to solve the problem of spectral distortion existed in the panchromatic and multispectral images fusion algorithm, a novel algorithm based on the biorthogonal multiwavelet transform and the method of combination of average and selection is presented. First it decomposes the intensity components which obtained by IHS transform of the registered multispectral image and biorthogonal multi-wavelet transform of the panchromatic image. Then the method of combination of average and selection and the local variance rule is separately adopted to obtain new high frequency and low frequency coefficients to enhance the edge information of fused images. Finally these images are reconstructed with composite wavelet coefficients and by performing the inverse IHS transform. The experimental results show that this algorithm can improve the spatial resolution of multispectral image while reducing spectral distortion and still maintaining its edge detail.

Keywords image fusion, biorthogonal multi-wavelet, multiresolution analysis, average and selection, edge detail

1 引言

多光谱图像和全色图像是目前卫星遥感领域最常见的传感器图像。为了更充分地发挥这两类遥感图像的价值,人们利用这两类数据的互补性,将多传感器数据融合技术引入了遥感图像处理领域。多光

谱与全色遥感图像融合的基本原理是从全色图像中提取空间信息加入到多光谱图像中,并在尽量减少多光谱图像光谱信息损失的同时增强其空间信息。

融合中常采用基于IHS(intensity-hue saturation)变换^[1]、PCA(principal component analysis)主成分分析^[2]的方法,此类方法在融合策略上主要利用“主分量替代”,但融合图像存在较大的光谱扭曲^[3]。

基金项目:国家“863”项目(2004AA783052)

收稿日期:2005-10-31;改回日期:2005-12-05

第一作者简介:洪日昌(1981~),男,现为中国科学技术大学电子工程与信息科学技术系博士研究生。研究方向为数字图像处理、多源数据融合和计算机视觉。E-mail:richong@mail.ustc.edu.cn

因此 Chavez 提出了 HPF (high-pass filter) 高通滤波法^[4],该方法首先利用高通滤波器对具有高空间分辨率的全色图像进行滤波,然后将滤波得到的结果即空间信息加入到低分辨率多光谱图像中。有效降低了融合图像中的光谱扭曲。

近来小波变换作为一种有效的图像分析工具在图像融合中得到了应用。基于小波变换的融合算法主要采用 Mallat 分解算法^[5,6]或 à trous wavelet 算法^[7]。它们利用小波变换分离图像的空间特征和光谱特征,并结合 IHS 变换、PCA 主成分分析等方法进行融合^[8,9]。取得了一定的效果。随着小波在图像融合中的应用研究的深入,还出现了一些新的方法,如利用 Mallat 算法和多波段小波变换 (M-band WT) 融合 SPOT 全色和多光谱图像^[10];利用曲线小波变换 (Curvelet transform) 提取 ETM + (Landsat Enhanced Thematic Mapper Plus) 图像中的空间信息加入到多光谱图像中,提高融合图像的空间和多光谱信息^[11]。这些方法为改善融合图像的光谱质量提供了新途径。

本文引入双正交多小波 (GHM 基) 分解方法,并且在融合策略上充分利用待融合图像之间的相关性,采用平均与选择相结合确定新的小波低频系数,高频系数则由邻域方差准则来确定。实验结果表明:本文提出的方案能够有效减少光谱扭曲,提高多光谱图像的空间信息量,并且能够较好地保留图像的边缘细节。

2 双正交多小波变换

2.1 双正交多小波的多分辨率分析

多小波理论是单小波理论的发展。在构造上多小波较单小波具有更大的自由度,而且可以同时保证正交性和对称性的要求。如果用两个双正交基代替一个正交基则可以得到双正交多小波^[12]。其中两个双正交基由两个互相对偶的尺度函数构成,一个用于分解,另一个用于重建。对每一个尺度函数 $\Phi(t)$ 及相应的小波函数 $\Psi(t)$,仍然满足下列双尺度方程:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} C_k \Phi(2t - k) \\ \Psi(t) &= \sum_{k=0}^{m-1} D_k \Psi(2t - k) \end{aligned} \quad (1)$$

式中

$$\Phi(t) = [\varphi_0(t) \varphi_1(t) \cdots \varphi_{r-1}(t)]^T$$

$$\Psi(t) = [\psi_0(t) \psi_1(t) \cdots \psi_{r-1}(t)]^T$$

r 为矢量小波函数的维数, C_k 和 D_k 为 $r \times r$ 的常数矩阵。当 $r=1$ 时,双正交多小波就变为普通的标量双正交小波。

Geronimo 构造了同时具有紧支性、对称性、正交性的 GHM 多小波^[13]。文献[14]基于 GHM 多小波进行图像融合,取得了一定的效果。后来 Strela 在普通 GHM 正交多小波的基础上构造了双正交多小波^[15],得到 $r=2$ 的两个对偶矢量尺度函数 $\Phi_1(t)$ 、 $\Phi_2(t)$ (如图 1 所示) 及相应的两个矢量小波函数 $\Psi_1(t)$ 、 $\Psi_2(t)$,其中图 1(a)、图 1(b) 为 $\Phi_1(t)$ 的两个尺度函数,图 1(c)、图 1(d) 为 $\Phi_2(t)$ 的两个尺度函数。

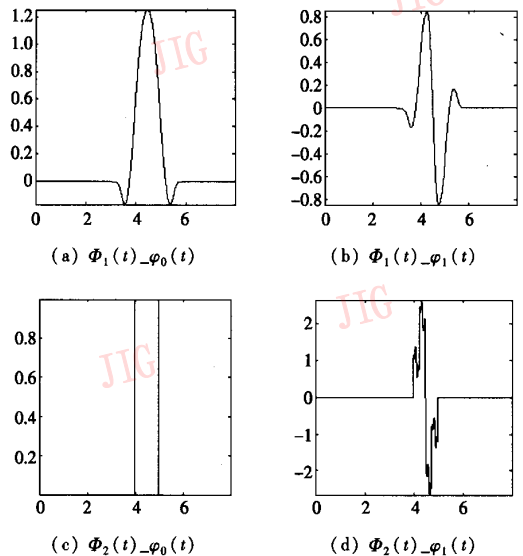


图 1 双正交多小波 (GHM 基) 尺度函数

Fig. 1 The scaling function of biorthogonal multi-wavelet (GHM basis)

从图 1 中可以看出双正交多小波 (GHM 基) 尺度函数具有对称 (或反对称) 性、短支撑集,且 $\Phi_1(t)$ 具有 3 阶消失矩,同理 $\Psi_1(t)$ 也具有 3 阶消失矩,比普通 GHM 小波要高。由于双正交条件更容易满足,所以双正交多小波构造有更大的自由度,可选择的基更多。

2.2 图像的双正交多小波分解与重构

对图像进行双正交多小波分解的过程与普通多小波分解类似,都是通过矢量滤波器组来实现的,只是分解和重建使用不同的滤波器组。矢量滤波器要求输入信号为矢量,这就要求对图像数据进行预滤波得到矢量信号。预滤波器的设计是离散多小波分析中特有的问题,Strela 曾经对多小波预滤波器的设

计方法有详细的描述。经过预滤波以后,图像被等分为 $r \times r$ 块进行矢量小波分解,容易证明, L 级多小波变换将图像分解为 $r^2(3L+1)$ 块子图像。以 $r=2$ 为例,图像经过第 1 层多小波分析后被分解为 16 个子图像,如图 2 所示。

$L_1 L_1$	$L_2 L_1$	$H_1 L_1$	$H_2 L_1$
$L_1 L_2$	$L_2 L_2$	$H_1 L_2$	$H_2 L_2$
$L_1 H_1$	$L_2 H_1$	$H_1 H_1$	$H_2 H_1$
$L_1 H_2$	$L_2 H_2$	$H_1 H_2$	$H_2 H_2$

图 2 多小波 1 层分解图示

Fig. 2 Multi-wavelet decomposition on level 1

这里以双正交多小波为例说明,如矩阵块 $H_2 L_1$ 则表示用尺度函数 $\Phi_1(t)_{-\varphi_0(t)}$ 对应的低通滤波器

在水平方向进行滤波,然后用小波函数 $\Psi_1(t)_{-\psi_1(t)}$ 对应的高通滤波器在垂直方向进行滤波得到的子图像块。在图像重构时,则分别使用 $\Phi_2(t)$ 和 $\Psi_2(t)$ 对应的滤波器组进行滤波得到矢量图像信号,然后通过后处理完全重构图像。

3 基于小波系数特征的融合算法

3.1 基于双正交多小波的图像融合算法流程

融合的基本思想是把图像分解成不同频率段的子图,针对不同子图的变换域特性采用不同的融合策略^[9]。用双正交多小波进行图像融合的流程如图 3 所示。对于配准后的多光谱图像首先通过 IHS 变换提取出强度分量 I , 然后分别对全色图像和 I 分量实施双正交多小波一级分解。将待融合图像分解成不同方向和频率段的小波系数。

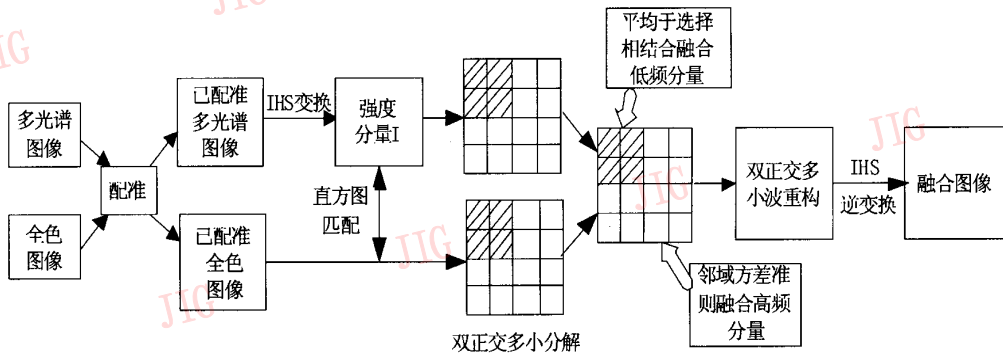


图 3 双正交多小波融合流程图

Fig. 3 The flow chart of fusion using biorthogonal multi-wavelet

分解后的小波系数子块中,有 4 个低频子块,12 个高频子块。低频子块保留了图像的基本灰度与轮廓信息;高频系数反映图像的细节信息,绝对值较大的系数反映出图像中的灰度突变部分,高频系数的邻域方差则表示图像中细节的丰富程度。由图 2 可知,多小波分解的方向性丰富,每个滤波方向都对应 4 个小波系数块,并且这 4 个子块对应不同的滤波器组。基于多小波变换的以上特点,对小波系数融合分别采用平均与选择相结合以及邻域方差准则。因此融合图像可以更多地加入全色图像中的空间信息,保留图像中目标的边缘细节。

3.2 小波系数融合规则

3.2.1 平均与选择法融合低频系数

对于小波分解后低频段尺度系数的融合,平均与选择相结合的方法在融合性能上更为有效^[16],该

方法考察两幅图像之间的相关性,根据相关性的大小分别采用平均与选择的方法进行融合。当两幅图像相关性较强时采用平均的方法,相关性较弱时则选择局部能量较大的点。这种方法能有效突出较为显著的像素点,增强视觉效果。

本文以 $S(X, p)$ 表示图像 X 在 p 点处尺度系数的显著性,其值由考察点的一个小邻域 R 内的能量或者方差来衡量。其中 R 为以 p 为考察点的 3×3 或 5×5 邻域,也可以只取 p 点。则

$$S(X, p) = \sum_{m, n \in R} w(m, n) C_N^2(X, m, n) \quad (2)$$

式中, $w(m, n)$ 表示权值,定义为 $1/2^d$, d 为距离考察点 p 的 4 邻域像素距离。所以离 p 点越近,权值越大。 C_N 为尺度系数。图像 Y 在 p 点的显著性 $S(Y, p)$ 符合同样的定义,接着定义匹配矩阵为

$$M(p) = \frac{2 \sum_{m,n \in R} w(m,n) C_N(X,m,n) C_N(Y,m,n)}{S(X,p) + S(Y,p)} \quad (3)$$

显然,匹配矩阵 $M(p)$ 值的范围在 0 和 1 之间。 $M(p)$ 接近 0 说明两幅图的相关程度低,接近 1 说明相关程度高。当匹配矩阵在某一点的值小于某一阈值 T 时,就选择显著性高的尺度系数作为合成图像的尺度系数,当匹配矩阵的值较大(接近 1)时则选择两幅图像尺度系数的加权平均值作为合成图像在这一点上的尺度系数。其中阈值 $0 < T < 1$,一般取较小值,因为较小的阈值能保证在两幅图像的相关性较弱时的尺度系数选取原则符合视觉原理。

所以融合函数可以描述为

$$C_N(Z,p) = W(X,p)C_N(X,p) + W(Y,p)C_N(Y,p) \quad (4)$$

其中, $C_N(Z,p)$ 为融合得到的尺度系数。 $W(X,p)$ 和 $W(Y,p)$ 如下计算:

$$\begin{aligned} \text{If } M(p) \leq T \quad & w_{\min} = 0, w_{\max} = 1 \\ \text{Else} \quad & w_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - M(p)}{1 - T} \right) \quad w_{\max} = 1 - w_{\min} \\ \text{If } S(X,p) \geq S(Y,p) \quad & W(X,p) = w_{\max} \quad W(Y,p) = w_{\min} \\ \text{Else} \quad & W(X,p) = w_{\min} \quad W(Y,p) = w_{\max} \end{aligned}$$

由于考虑到了图像之间的相关特性,所以这种方法能更加有效地突出较为显著的像素点,增强图像的空间信息。然后在高频系数的选择上提出能够有效提取空间细节信息的邻域方差准则。

3.2.2 利用邻域方差准则进行对应的高频系数融合

设 $S_{AH}(x,y)$ 、 $S_{BH}(x,y)$ 分别为图像 A 和 B 的高频系数子块, $R_{FH}(x,y)$ 表示融合后的系数。 $\sigma_a(x,y)$ 、 $\sigma_b(x,y)$ 分别表示以 (x,y) 为中心 3×3 邻域内的方差。则

$$R_{FH}(x,y) = \begin{cases} S_{AH}(x,y) & (\sigma_a(x,y) \geq \sigma_b(x,y)) \\ S_{BH}(x,y) & (\sigma_a(x,y) < \sigma_b(x,y)) \end{cases} \quad (5)$$

然后对高频融合系数进行同滤波方向的一致性调整。因为图像多小波分解的每一个滤波方向都有 4 个系数子块,例如图 2 中的 L_1H_1 、 L_2H_1 、 L_1H_2 、 L_2H_2 4 个子块表示用不同滤波器组进行水平方向高通滤波的结果。如果对 L_1H_1 子块的某一像素 (x,y) ,同一滤波方向的其他 3 个子块中相同位置的像素都选择了原图像 A 的变换系数,则像素 (x,y) 也调整为图 A 的变换系数。

3.3 融合算法步骤

(1) 通过重采样使得多光谱与全色图像具有相同的空间分辨率,并进行空间配准。

(2) 对多光谱图像实施 IHS 变换,然后对全色图像与多光谱图像 IHS 变换后得到的强度分量 I 进行直方图匹配。

(3) 分别对直方图匹配后的全色图像和多光谱图像强度分量 I 进行双正交多小波(GHM 基)一级分解,分解得到的小波低频系数利用平均与选择相结合的方法进行融合,高频系数则由邻域方差准则得到。

(4) 由新的小波低频和高频系数实施双正交多小波(GHM 基)重构,得到已加入全色图像中空间信息的强度分量 I' ,结合 H 和 S 分量进行 HIS 逆变换得到融合图像。

4 实验结果分析

实验采用 SPOT 卫星 20m 分辨率多光谱图像和 10m 分辨率全色图像各一幅,并且将低空间分辨率的多光谱图像重采样为 10m 高空间分辨率图像,然后经过配准处理,配准后两幅图像大小均为 256×256 pixels。算法利用 Visual C++6.0 实现,所用微机 CPU 为 PIV1.8,内存 512M。实验结果如图 4 所示(本文中相关性阈值 T 取 0.3)。

从主观目视判决可以看出,融合后图像中跑道、建筑物纹理信息更加丰富,边缘细节更为明显。但很难判断出融合图像空间信息量的增减。因此选用均值、熵、平均梯度和相关系数以及偏差指数对各种方法的融合结果进行客观评价,结果如表 1 所示。其中图像熵值大小反映了图像所包含的平均信息量的多少;平均梯度可以反映图像对微小细节反差表达的能力,可以用来衡量图像的清晰度;均值与相关系数都反映出融合图像与多光谱源图像的相似程度;而偏差指数则反映出融合图像与源图像之间的偏离程度。

从表 1 数据可以看出,直接加权平均法得到融合图像的熵值优于 IHS 变换和 PCA 主成分分析法,但其余的 4 项指标均低于后两种方法,而 IHS 变换法和 PCA 变换法得到的融合图像与小波融合图像相比,均值、相关系数和偏差指数 3 项指标均明显低于后者,说明直接加权平均法、IHS 变换法和 PCA 变换法在提高多光谱图像空间信息的同时存在较大的光谱扭曲。相比较而言,小波融合方法则效果较为明显,尤其是双正交多小波(GHM 基)大部分指标均高于 D4 单小波和 GHM 多小波。因为要在提

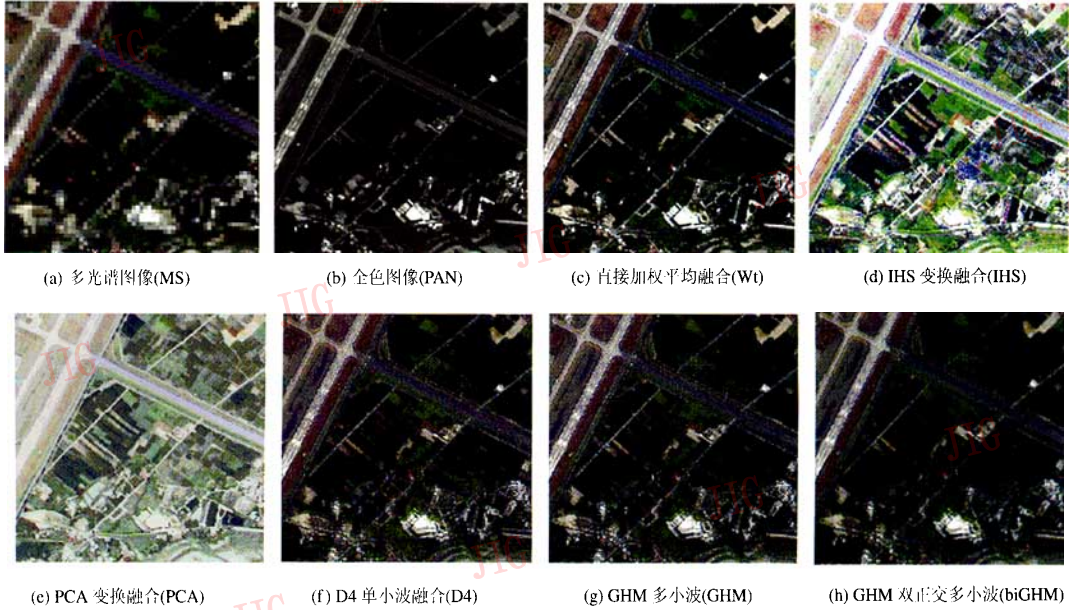


图 4 融合图像效果比较图

Fig. 4 Contrast among the fused images

表 1 6 种融合图像统计参数比较

Tab. 1 Statistics contrast among the six fusion algorithm

融合方法	波段	统计参数						
		源多光谱	加权平均法	IHS	PCA	D4 单小波	GHM	本文方法
熵	R	5.823 1	6.312 7	6.012 4	6.080 8	6.388 6	6.399 2	6.369 4
	G	6.131 5	6.620 5	6.659 5	6.438 2	6.623 8	6.640 4	6.623 4
	B	6.108 4	6.513 7	6.220 8	6.505 8	6.528 0	6.542 0	6.542 5
均值	R	119.63	114.82	112.37	112.93	115.06	115.95	118.71
	G	120.02	117.47	127.27	124.00	117.67	118.51	121.38
	B	119.81	114.91	117.64	120.01	115.03	115.80	118.43
平均梯度	R	29.669	41.379	57.475	53.804	47.245	48.966	57.565
	G	32.361	41.746	58.723	58.390	48.730	50.590	59.581
	B	28.638	39.980	54.044	58.681	46.048	47.731	56.086
相关系数	R	—	0.917 66	0.803 33	0.797 21	0.965 33	0.974 91	0.955 19
	G	—	0.900 25	0.753 30	0.724 14	0.957 28	0.968 52	0.946 83
	B	—	0.912 93	0.772 05	0.993 36	0.960 74	0.970 86	0.950 85
偏差指数	R	—	0.374 79	0.904 79	0.956 23	0.279 41	0.196 52	0.236 61
	G	—	0.333 54	0.532 25	0.552 17	0.223 56	0.219 96	0.257 13
	B	—	0.351 53	0.441 75	0.123 53	0.265 47	0.203 34	0.233 17

高多光谱图像空间信息量的同时保持光谱信息是比较困难的,所以在表 1 中也可以看出 D4 单小波和 GHM 多小波融合方法在平均梯度指标低于 IHS 变换和 PCA 变换法。本文中的双正交多小波

(GHM 基)方法则不仅有效地提高了图像的空间信息量,减少了光谱扭曲,而且二者之间到了很好的平衡。

以上给出了不同算法融合图像之间的总体性能

参数和评价。为了更好地突出本文方法能够有效减少光谱扭曲,还选择融合前后图像中的典型地物做出光谱变化曲线,如图 5 所示,其中变化曲线的横坐

标为多光谱图像的波段(Band = 3),纵坐标为幅值(Gray = 0 ~ 255)。然后以欧式距离衡量光谱变化的程度,典型地物以机场、公路和建筑物为例。

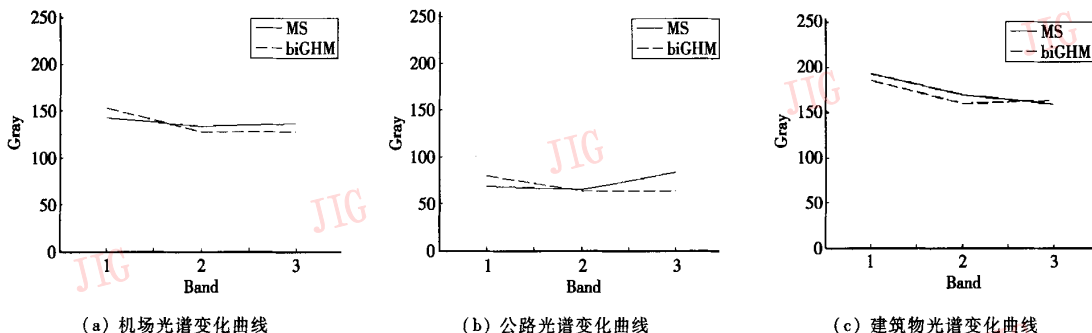


图 5 典型地物光谱变化曲线

Fig. 5 Variation graph of selected object's spectrum

欧式距离可以很好地度量向量的相似度,定义为

$$\delta_E(x_k, x_l) = [(x_k - x_l)^T(x_k - x_l)]^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^d (x_{kj} - x_{lj})^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

其中, x_k, x_l 为向量, d 为向量的维数 ($d = 3$)。分别计算出不同融合算法下典型地物的平均光谱变化

$\delta_E = \sum_{i=1}^3 \delta_{E_i} / 3$, $\delta_{E_1}, \delta_{E_2}, \delta_{E_3}$ 分别为机场、公路和建筑物光谱变化的欧式距离。并做归一化处理: $\delta = \delta_{E_k} / \max(\delta_{E_j}), j = 1, 2, \dots, 6$ 为 6 种不同的融合算法。计算结果如表 2 所示,即为各种融合算法下典型地物的归一化相对平均光谱变化。

表 2 不同融合算法下典型地物的归一化相对平均光谱变化

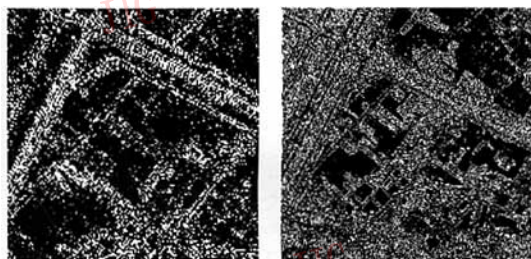
Tab. 2 Normalized average spectrum of selected object under above fusion algorithms

	加权平均法	IHS	PCA	D4 单小波	GHM	本文方法
δ	0.8921	0.9752	1.0000	0.8108	0.5297	0.2365

从表 2 中可以看出 IHS 变换法和 PCA 变换法得到的融合图像光谱扭曲较为严重,加权平均法和 D4 单小波次之,GHM 多小波也能取得较好的光谱保持效果,而本文方法则能最小化光谱扭曲,因此效果更好。

同时本文选用 Laplace 算子做进一步处理以更加直观地评估 biGHM 能够较好地保留图像中的边缘细节^[5]。图 6 即为全色图像和融合图像利用 Laplace 算子提取的边缘效果图。为了更好地反映

出融合前后图像的边缘细节的变化,从待比较图像(均为 256×256 pixels)中分割出其中部分边缘细节比较丰富的区域(128×128 pixels)来做比较。显然,融合图像的边缘细节信息较之全色图像更为丰富,有利于图像分割,目标识别等后处理。



(a) 全色图像边缘细节 (b) 融合图像边缘细节

图 6 全色与融合图像 Laplace 边缘提取

Fig. 6 Edge extraction from panchromatic and fused image by Laplace operator

5 结 论

本文分析了双正交多小波的特点,利用多小波变换的时频局部性,方向丰富性,提出采用平均与选择相结合法和邻域方差准则进行小波低频和低频系数融合,并且对同滤波方向系数进行一致性检测。在有效减少光谱扭曲的同时较好地保留了图像的光谱信息的边缘细节。实验中采用双正交多小波(GHM 基)对不同传感器特性的遥感图像进行融

合,并与其他融合方法得到的结果进行了主观和客观的比较。实验结果分析表明,在遥感图像融合应用中,基于双正交多小波的融合方法优于 IHS、PCA、D4 单小波以及 GHM 多小波等方法。

参考文献 (References)

- 1 Carper J, Lillesand T M, Kiefer R W. The use of intensity-hue-saturation transforms for merging SPOT panchromatic and multispectral image data[J]. *Photogramm Eng Remote Sens*, 1990, **56**(5): 459 ~ 467.
- 2 Chavez P S, Stuart J, Sides C, *et al.* Comparison of three different methods to merge multiresolution and multispectral data; Landsat TM and SPOT panchromatic[J]. *Photogramm Eng Remote Sens*, 1991, **57**(3): 259 ~ 303.
- 3 Yéson H, Besnus Y, Polet J. Extraction of spectral information from landsat TM data and merger with SPOT panchromatic imagery-A contribution to be study of geological structures[J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 1993, **48**(5): 2336.
- 4 Chavez P S. Digital merging of Landsat TM and digitized NHAP data for 1:24.000 scale image mapping[J]. *Photogramm Eng Remote Sens*, 1986, **52**(10): 1637 ~ 1646.
- 5 Ranchin T, Wald L. Fusion of high spatial and spectral resolution images: The ARSIS concept and its implementation[J]. *Photogramm Eng Remote Sens*, 2000, **66**(1): 49 ~ 61.
- 6 Aiazzi B, Alparone L, Baronti S, *et al.* Context-driven fusion of high spatial and spectral resolution images based on oversampled multi-resolution analysis[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2002, **40**(10): 2300 ~ 2312.
- 7 Ranchin T, Aiazzi B, Alparone L, *et al.* Image fusion——The ARSIS concept and some successful implementation schemes[J]. *ISPRS J Photogramm Remote Sens*, 2003, **58**: 4 ~ 18.
- 8 Chen Hao, Yu Neng-hai, Liu Zheng-kai, *et al.* A new data fusion algorithm for improving remote sensing images resolution[J]. *Journal of Software*, 2001, **12**(10): 1534 ~ 1539. [陈豪,俞能海,刘政凯等. 面向提高图像分辨率的遥感数据融合新算法[J]. *软件学报*, 2001, **12**(10): 1534 ~ 1539.]
- 9 María González-Audicana, José Luis Saleta, Raquel García Catalán, *et al.* Fusion of multispectral and panchromatic images using improved IHS and PCA mergers based on wavelet decomposition[J]. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, 2004, **42**(6): 1291 ~ 1299.
- 10 Shi W Z, Zhu C Q, Zhu C Y, *et al.* Multi-bandwavelet for fusing SPOT panchromatic and multi-spectral images[J]. *Photogramm Eng Remote Sens*, 2003, **69**(5): 513 ~ 520.
- 11 Myungjin Choi, Rae Young Kim, Myeong-Ryong Nam, *et al.* Fusion of multispectral and panchromatic satellite images using the curvelet transform[J]. *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, 2005, **2**(2): 136 ~ 140.
- 12 Strela V. *Multiwavelets: Theory and Applications* [D]. Massachusetts, USA: Massachusetts Institute of Technology, 1996.
- 13 Geronimo J S, Hardin D P, Massopust P R. Fractal functions and wavelet expansions based on several scaling functions[J]. *Journal of Approximation Theory*, 1994, **78**(3): 373 ~ 401.
- 14 Wan Hai-hui, Peng Jia-xiong. A study of image fusion based on multiwavelet transform[J]. *Journal of Image and Graphics*, 2004, **9**(8): 1002 ~ 1007. [王海晖,彭嘉雄. 基于多小波变换的图像融合研究[J]. *中国图象图形学报*, 2004, **9**(8): 1002 ~ 1007.]
- 15 Strela V. A note on Construction of biorthogonal multi-scaling functions [A]. In: *Contemporary Mathematics, Wavelets Multiwavelets and Their Applications*[M], A. Aldroubi and E. B. Lin eds. Pennsylvania, USA: AMS Philadelphia, 1998: 149 ~ 157.
- 16 Burt P T, Adelson E H. The laplacian pyramid as a compact image code[J]. *IEEE Transactions on Communication*, 1983, **31**(4): 532 ~ 540.