

基于 SOM 的散乱数据点集的 B 样条曲面重建

王宏涛 张丽艳 李忠文 刘胜兰 周儒荣

(南京航空航天大学 CAD/CAM 工程研究中心, 南京 210016)

摘要 利用自组织映射神经网络(SOM)技术对散乱数据点集进行 B 样条曲面重建时,往往存在网络学习时间过长和学习效果不理想等问题。提出了一种新的神经元初始化方法和分块学习算法,该算法首先运用主元素分析方法(PCA)对散乱数据进行分块,将拓扑结构为四边形的输出层神经元初始化在每块散乱数据的最小二乘平面上进行网络学习和训练,将分块学习得到的各网格曲面拼接成一个整体;然后对该整体网格曲面的边界和内部单独学习,得到一张逼近待重建曲面的双线性 B 样条曲面;最后对该 B 样条曲面误差进行了修正。实例证明,该算法可以明显地减少 SOM 网络学习时间,并改善网络学习效果。

关键词 逆向工程 曲面重建 自组织映射神经网络(SOM) 数据分块

中图分类号: TP391 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-8961(2007)02-0349-07

B-spline Surface Reconstruction from Scattered Data Points Based on SOM Neural Network

WANG Hong-tao, ZHANG Li-yan, LI Zhong-wen, LIU Sheng-lan, ZHOU Ru-rong

(Research Center of CAD/CAM Engineering, Nanjing University of Aeronautics & Astronautics, Nanjing 210016)

Abstract There often exist some problems, such as long training time and bad training effect etc., when self-organizing map neural network(SOM) technology is employed in reverse engineering to reconstruct B-spline surface from scattered data points. In this paper, a new initialization method and a divide-and-conquer training scheme is presented. The approach functions as follows: firstly, the scattered data points are split into segments through principal component analysis(PCA); the neurons of output layer with quadrilateral topology are initialized on the least-square fitting planes of every segment. All the mesh surfaces obtained by training every segment respectively are integrated into a whole. Secondly, the boundary and interior neurons in the whole mesh surface are then trained and an approximate bi-linear B-spline surface is reconstructed. Finally, the B-spline surface reconstruction error is improved. Experiments show the proposed method can reduce SOM network training time and improve neural network training effect obviously.

Keywords reverse engineering, surface reconstruction, self-organizing map neural network(SOM), data segmentation

1 引言

根据实物样件的测量数据进行模型重建是逆向工程中的关键技术,按采集的数据分布形式可分为有序数据的模型重建和散乱数据的模型重建。根据参数域的不同,重建后曲面的表示形式可大体分为

两大类:一是基于矩形参数域,建立 B 样条(B-spline)和 NURBS(非均匀有理 B 样条)曲面模型;二是基于三角参数域,建立以三角 Bézier 曲面为代表的曲面模型。作为 NURBS 曲面的特例,B 样条曲面是通用 CAD 系统中曲面表示的常用形式,在 CAD 领域具有不可替代的重要地位。因此,B 样条曲面的重建工作受到了国内外学者的普遍关注。

基金项目:国家自然科学基金项目(50475041);霍英东教育基金会第九届高校青年教师基金(03-915053);航空科学基金项目(03H52059)

收稿日期:2005-05-10;改回日期:2005-11-14

第一作者简介:王宏涛(1968~),女,副教授,南京航空航天大学机电学院在职博士研究生。主要研究方向为反求工程、CAD/CAM 技术、测控技术。发表论文 10 余篇。E-mail: meehtwang@nuaa.edu.cn

Sarkar^[1]和Rogers^[2]用单张B样条曲面实现了具有矩形拓扑的测量数据拟合。为满足具有复杂拓扑模型曲面的重建要求,近年来国内外学者针对多张B样条曲面的光滑重建以及散乱数据的参数化问题进行了许多研究,Milroy^[3]提出了一种近似的全局G¹连续的分片B样条曲面拟合方法;Krnuth^[4]和崔^[5]研究了散乱点在满足位置、切矢或曲率连续等约束条件时的B样条曲面拟合;Eck^[6]用协调映射建立空间区域与平面凸四边形域之间的映射关系,实现模型的重新采样和参数化,然后应用曲面样条及一个嵌套迭代的参数优化过程实现分片连续的B样条曲面拟合;Ma^[7]利用将测量点投影到基曲面上的方法实现了散乱点的参数化。

近年来,也有许多学者提出了运用神经网络技术实现散乱数据的B样条曲面重建。Gu等人^[8]提出了利用BP(back propagation)神经网络来实现曲面上某些局部损坏部位的重建;Yu^[9]提出了利用SOM(self-organizing map)神经网络实现三角网格曲面模型的重建;Hoffmann等人^[10-12]提出了采用输出层为四边形拓扑结构的SOM神经网络实现散乱数据的曲面重建,但没有给出工程应用实例;Barhak等人^[13]选取不同于Hoffmann的学习率和邻域半径,并且通过对散乱数据的边界进行单独判断和学习进行散乱数据的曲面重建,取得了优于Hoffmann的学习效果,但未对采用该方法能处理的散乱数据的数量和学习效率等问题进行讨论。

本文实现了一种新的SOM神经网络神经元初始化方法,提出了一种利用该网络对散乱数据进行分块学习、从而实现B样条曲面重建的算法。该算法的基本思想是:通过计算散乱数据点集的重心和建立点集的协方差矩阵完成其主元素分析(PCA),实现点集的分块;运用拓扑结构为四边形的SOM神经网络,输出层神经元初始化在每块散乱数据集的最小二乘平面上,对网络进行分块学习和训练,将学习后得到的各网格曲面拼接成一个整体曲面;对该整体网格曲面的边界和内部进行单独学习,得到一张逼近待重建曲面的初始双线性B样条曲面;运用将散乱点向基曲面投影的方法实现该B样条曲面的参数化,运用B样条神经网络实现待重建曲面误差的修正。

2 算法描述

运用SOM神经网络、通过分块学习的思想实现

散乱数据的B样条曲面重建。

SOM神经网络模型^[14]的基本结构如图1所示,其中圆圈表示神经元,网络由输入层和输出层组成,输入层的神经元通过权与输出层的每一个神经元相连,输出层中的神经元相互间也通过权局部连接,并且连接权值具有一定的分布,邻近的神经元相互激励,而较远的神经元则相互抑制,网络学习的过程就是输出层神经元之间相互竞争的过程。

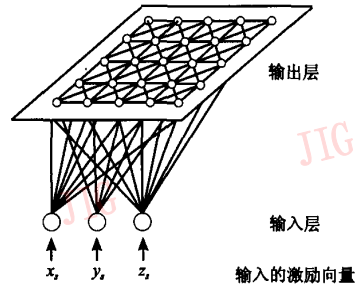


图1 SOM神经网络结构

Fig. 1 The structure of SOM neural network

SOM神经网络的学习规则如下:

(1) 初始化网络的权值 $w_{ij}(t)$ ($i=1,2,3; j=1,2,\dots,m$)。 $w_{ij}(t)$ 表示输入层神经元节点 i 到输出层神经元节点 j 在学习次数为 t 次时的权值。网络权值 w_{ij} 可以初始化为一个随机值,设散乱数据点集 $\{P_s | P_s = (x_s, y_s, z_s)\}$ ($s=1,2,\dots,N, N$ 为散乱点个数)的 X, Y, Z 坐标的最小、最大值分别为: $x_{\min}, x_{\max}, y_{\min}, y_{\max}$ 和 z_{\min}, z_{\max} , 这里分别将 w_{1j}, w_{2j}, w_{3j} 初始化为区间 $[x_{\min}, x_{\max}]$ 、 $[y_{\min}, y_{\max}]$ 和 $[z_{\min}, z_{\max}]$ 内的随机值。输出层神经元个数 m 可选择为 $m < N$ 。

(2) 加入激励输入向量。学习次数为 t 次时随机加入输入向量

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t)] = [x_s, y_s, z_s]$$

$x_i(t)$ 表示对节点 i 的输入,对应于随机输入的单个散乱数据点 P_s 的3维坐标值 x_s, y_s, z_s 。将模型的散乱数据点全部随机输入网络1次作为网络完成1次学习, t 值由用户设定。

(3) 计算输入节点 i 与任何输出节点 j 之间的距离

$$d_j = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (x_i(t) - w_{ij}(t))^2} \\ = \sqrt{(x_s - w_{1j}(t))^2 + (y_s - w_{2j}(t))^2 + (z_s - w_{3j}(t))^2} \quad (1)$$

(4) 选择最小距离 $d_{j_{\min}}$, 确定与其对应的输出

节点 j^* 。

(5) 调整权值。调整权值只对节点 j^* 及其相邻节点进行,相邻节点由邻域半径 $N_j^*(t)$ 决定,新的权值为

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(t)[x_i(t) - w_{ij}(t)] \quad (2)$$

式中, $\eta(t)$ 为学习率,是一个随时间减小的增益项, $0 < \eta(t) < 1$ 。采用与文献[13]相同的学习率和邻域半径函数形式。

(6) 若还有输入的向量样本,返回第2步,重复上述步骤。

网络训练结束输出的具有四边形拓扑结构的3维网格即是对模型表面的离散逼近,可以看作为一个双线性的B样条曲面,进而可以实现3次或更高次B样条曲面的重建。

本文算法主要分为以下几步:散乱数据的分块学习及网格曲面的拼接、散乱数据的边界学习及内部学习、曲面的自适应参数化及曲面重建误差调整。

2.1 分块学习及拼接

测量装置采样测得的实体模型数据一般非常庞大,为节省SOM神经网络对散乱数据的学习时间、有效地提高神经网络的学习效率,改善网络的学习效果,提出一种新的输出层神经元初始化方法,并采用了对散乱数据点分块学习的方法。新的输出层神经元初始化方法就是将神经元初始化在散乱数据的最小二乘平面上,由于最小二乘平面对散乱数据所确定的平面进行粗略拟合而得到的平面,所以输出层神经元组成的网格平面即是对散乱数据的粗略拟合,这种方法有利于提高网络的学习效率、改善网络的学习效果。采用分块学习的策略,将对海量散乱数据点集的学习转化为对各个较少散乱数据点集的学习,网络的学习时间大大减少,显著提高了网络的学习效率。分块学习及拼接的具体算法描述如下:

(1) 对散乱数据点集进行主元素分析。计算原始散乱数据点集的重心

$$\begin{aligned} O &= (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \\ &= \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i, \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N z_i \right) \end{aligned} \quad (3)$$

建立散乱数据点集的协方差矩阵

$$C = \begin{bmatrix} P_1 - O \\ P_2 - O \\ \vdots \\ P_i - O \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P_1 - O \\ P_2 - O \\ \vdots \\ P_i - O \end{bmatrix} \quad (4)$$

该协方差矩阵是一个 3×3 的半正定矩阵,存在3个

实数特征值,分别为 λ_0 、 λ_1 和 λ_2 (设 $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$), 它们对应的特征向量分别为 v_0 、 v_1 和 v_2 。

(2) 散乱数据点集的分块。初始时,用通过重心 O 、以 v_2 为法向量的平面 $TL(O, v_2)$ 将散乱数据点集 $\{P_i | P_i = (x_i, y_i, z_i)\}$ 一分为两块;然后,对每块数据点集进行主元素分析,再以同样的方法分块,直到每个分块数据点集的点数小于预先设置的阈值 α 时止, α 值设定为略大于 $\frac{1}{2^n}N$ (n 表示分块次数, $n = 0, 1, 2, \dots$)。整个数据分块过程形同一棵完全二叉树的形成过程。

(3) 输出层神经元的初始化。确定每块散乱数据的最小二乘平面,其为过该块散乱数据重心,并以该块散乱数据的协方差矩阵的最小特征值对应的特征向量为法向量的平面,则原始散乱数据点集 $\{P_i | P_i = (x_i, y_i, z_i)\}$ 的最小二乘平面 $PL(O, v_0)$ 满足

$$(P_i - O) \cdot v_0 = 0 \quad (5)$$

选用输出层拓扑结构为四边形的SOM神经网络,选取神经元个数 m ,确定位于散乱数据最小二乘平面上的初始网格平面的范围,使其不超出散乱数据在最小二乘平面上的投影范围即可。初始化网络连接权值 w_{ij} 。

(4) 网络的分块学习。对每块数据点集按上述SOM神经网络的学习规则进行网络训练,网络训练结束得到的各个具有四边形拓扑结构的3维网格曲面即是对各数据点集的离散逼近,可以看作为双线性B样条曲面。

(5) 网格曲面的拼接。对上述得到的各个网格曲面,根据相邻两网格曲面距离最近的两条边界边上离散节点的个数和排列方向,对相邻网格曲面按照节点的对应次序进行拼接。

2.2 边界和内部学习

上述分块学习策略使得网络的学习效率明显提高,但由于网络学习得到的网格曲面是由各块散乱数据单独学习得到的各个网格曲面拼接而成的,因此也带来了如何使各曲面拼接光滑的问题。另外,最后输出的网格曲面的边界学习效果较差。为此,借鉴文献[13]提出的“边界首先 (boundary first) 学习”的改进方法,针对拼接后得到的网格曲面,首先进行边界单独学习以解决边界学习效果较差的问题。为解决各分块曲面间的光滑拼接问题,采取对网格曲面的中间部分进行整体再学习。由于此时的

网格曲面是经分块学习及边界学习后得到的网格曲面,已实现对原始测量数据点集较好的拟合,因此所需的整体学习次数较少,实验结果证明,只要再进行一到两次的整体学习,就实现了各分块曲面间的光滑拼接。具体步骤如下:

(1) 提取网格曲面附近的散乱数据点集中的边界点;

(2) 用提取的这些边界数据点作为训练样本,对网格曲面边界上的神经元进行单独训练;

(3) 边界学习完成后,用非边界的散乱数据点对网格曲面中间部分的神经元(即非边界上的神经元)再进行一到两次训练,得到一整张网格曲面,该曲面即是一张逼近待重建曲面的双线性 B 样条曲面。

2.3 参数化和曲面重建误差修正

对上述得到的双线性 B 样条曲面,可由位于该表面上的离散数据点(网格节点)确定其控制顶点及其节点参数^[15],这样就完全定义了一张待重建曲面的逼近曲面:

$$P(u, v) = \sum_{\xi=0}^k \sum_{\zeta=0}^l V_{\xi, \zeta} \cdot B_{\xi}(u) \cdot B_{\zeta}(v) \quad (6)$$

其中, $P(u, v)$ (u, v 为参数) 为表面上的点, $V_{\xi, \zeta}$ ($\xi = 0, 1, \dots, k; \zeta = 0, 1, \dots, l$) 为控制顶点, $B_{\xi}(u)$, $B_{\zeta}(v)$ 为 B 样条基函数。这里选用 B 样条基函数的次数为 3 次。

目前得到的 B 样条曲面还是对点集模型学习后得到的离散逼近曲面,肯定存在一定程度的误差,需要对其进行修正。误差修正前,首先要确定各散乱数据点的节点参数,文献[16]提出了一种曲面自适应参数化方法,基本思想是将式(6)表示的 B 样条曲面看作为一个初始基表面,运用将各个散乱数据点 P_i 投影于该基表面的方法来确定各点 P_i 的节点参数 (u_i, v_i) 。然后按下述的 B 样条神经网络方法进行曲面误差修正。曲面每经过一次误差修正,都作为新的投影基表面,即基表面不断被更新,所以 P_i 点的节点参数 (u_i, v_i) 也是随基表面的更新而不断改变的。这样将数据点向基表面投影、确定数据点的节点参数、曲面经误差修正后作为新的基表面、再投影...,如此迭代,直到迭代次数或曲面误差满足一定的阈值时止。具体方法如下:

(1) 确定误差修正阈值 δ 和误差修正迭代次数 λ 。这里 δ 的缺省值为每个散乱数据点 P_i 距离初始

基表面的距离的平均值,也可以设定误差阈值 δ ;

(2) 对 N 个散乱数据点按照随机方式重新排序;

(3) 对每一个散乱数据点 P_i 及其参数 (u_i, v_i)

计算 P_i 在其参数值为 (u_i, v_i) 时与 B 样条曲面的距离

$$Err_i = P_i - \sum_{\xi=0}^k \sum_{\zeta=0}^l V_{\xi, \zeta} \cdot B_{\xi}(u_i) \cdot B_{\zeta}(v_i) \quad (7)$$

如果 $|Err_i| > \delta$, 则按下式所表示的 B 样条神经网络方法调整曲面控制顶点。

$$V_{\xi, \zeta} = V_{\xi, \zeta} + \varepsilon \sum_{i=1}^N B_{\xi}(u_i) \cdot B_{\zeta}(v_i) \cdot Err_i \quad (8)$$

($\varepsilon < 1$)

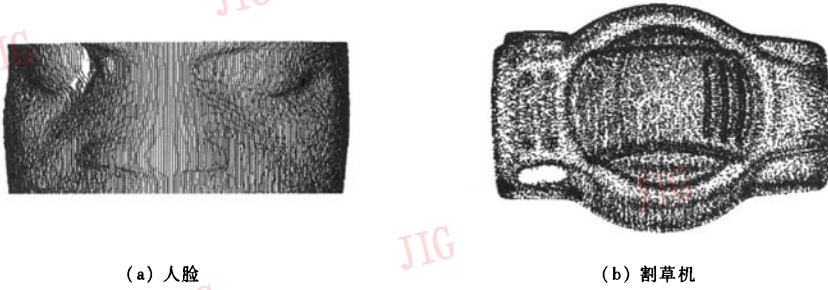
(4) 重复步骤 3, 直到所有散乱数据点距离当前基表面的距离均小于给定的阈值 δ 或误差修正次数等于 λ 。

3 应用实例

在将拓扑结构为四边形的 SOM 神经网络技术用于曲面重建的文献中,还未见关于样本数量和学习时间的具体报道,出于比较的目的,在 Pentium IV (主频 1.7GHz、内存 256M) 的计算机上,首先使用 VC++ 6.0 编程实现了文献[13]的算法。

运用文献[13]提出的随机初始化方法分别对人脸模型和割草机模型进行了整块学习。图 2(a) 所示的人脸模型的散乱数据点数为 44 150 个,由激光扫描测量仪实测获得;图 2(b) 所示为割草机的散乱数据模型,点数为 25 155 个。网络学习时选取的神经元个数 m 分别是 15×23 和 15×30 、学习次数 t 分别为 8 次和 10 次,对人脸模型和割草机模型的学习效果图分别见图 3(a)、图 4(a);运用本文提出的神经元初始化方法,选取同样的神经元个数 m 、学习同样的次数 t ,学习效果图分别见图 3(b)、图 4(b)。

由图 3、图 4 显而易见,本文的神经元初始化方法获得的网格曲面的规则程度优于文献[13]的随机初始化方法获得的网格曲面,从而验证了本文提出的初始化方法有利于提高网络学习效率、改善学习效果;由于网格曲面即是对散乱数据点集的初次逼近的双线性 B 样条曲面,所以,本文提出的初始化方法使误差调整前的重建曲面效果明显优于文献[13]。尽管经过增加网络学习次数 t 后,文

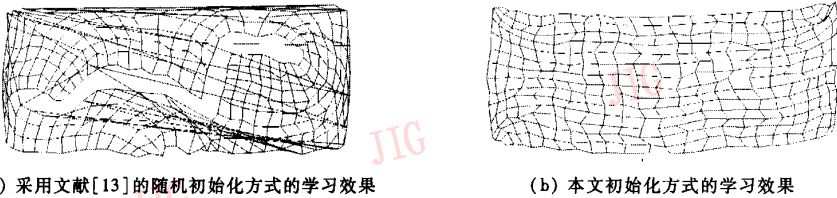


(a) 人脸

(b) 割草机

图 2 点集模型

Fig.2 The data model

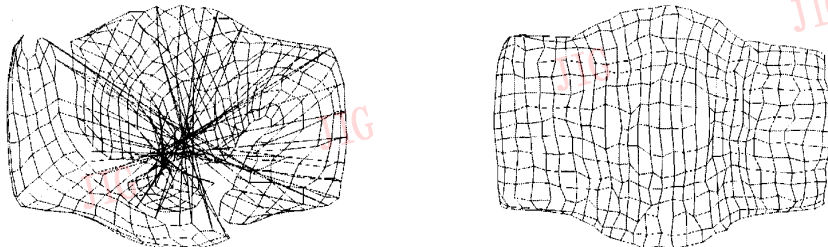


(a) 采用文献[13]的随机初始化方式的学习效果

(b) 本文初始化方式的学习效果

图 3 人脸模型的学习效果

Fig.3 The training effect of the face model



(a) 采用文献[13]的随机初始化方式的学习效果

(b) 本文初始化方式的学习效果

图 4 割草机模型的学习效果

Fig.4 The training effect of the mower model

献[13]的方法获得的网格曲面的规则程度可以得到较好改善,但这必然导致网络学习时间加长,网络学习效率下降。

依照本文提出的分块学习算法,选择不同的数据点集分块的阈值 α ,实现了对上述人脸模型和割草机模型分别分 8 块(分块次数 $n=3$)进行网络学习、拼接,效果图分别如图 5(a)、图 6(a)。为比较学习时间,使用与分 8 块同样的神经元总数 m 对模型整块及分 2 块学习同样的次数 t ,具体的网络学习时间和各参数的取值如表 1 所示。可见,采用分块学习策略的网络学习效率明显高于整块学习。学习相同的次数 t ,分 2 块时的网络学习时间大约是整块

学习时的 1/2;分 8 块时的学习时间,对于人脸模型约是整块学习时的 1/6,对于割草机模型则约是整块学习时的 1/9。

运用边界和内部学习算法,对分 8 块进行网络学习、拼接后的人脸模型和割草机模型分别进行边界学习后,得到的样条曲面如图 5(b)、图 6(b)所示,再经过内部学习后得到的样条曲面如图 5(c)、图 6(c)所示。

运用曲面重建误差修正算法,设定曲面误差调整阈值 δ 为 0.1,分别对上述得到的人脸模型和割草机模型的 B 样条曲面实现了误差修正,修正后的曲面光照图分别如图 5(d)、图 6(d)所示。

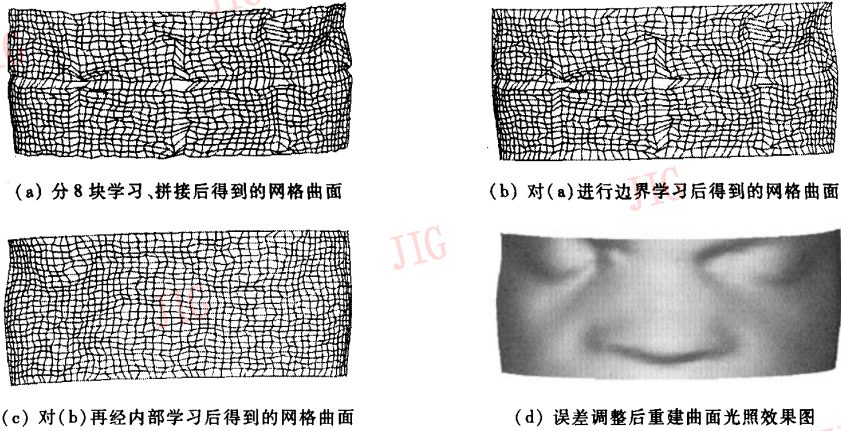


图 5 人脸模型的 B 样条曲面重建

Fig. 5 The B-spline surface reconstruction of the face model

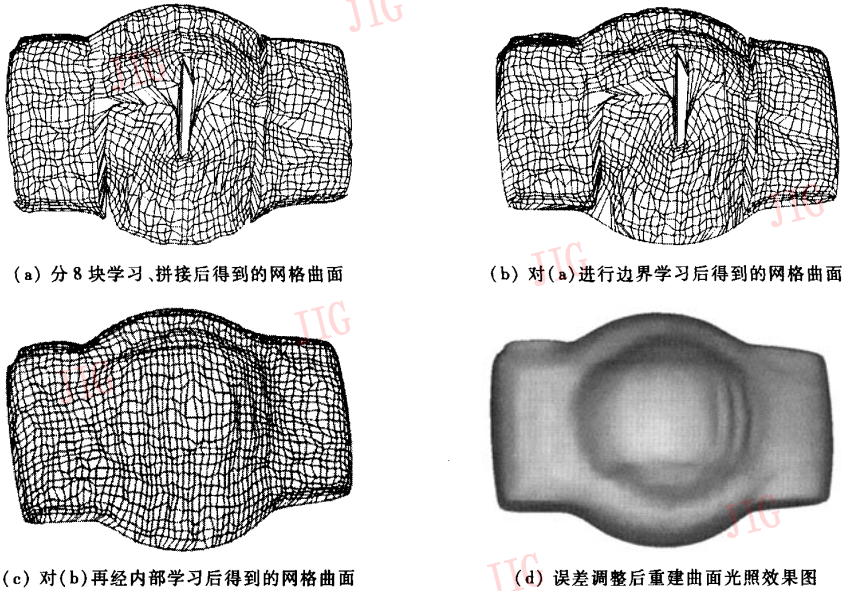


图 6 割草机模型的 B 样条曲面重建

Fig. 6 The B-spline surface reconstruction of the mower model

表 1 点集模型的学习时间比较

Tab. 1 The comparison of training time of data models

点数	人脸			割草机		
	$n=0$	$n=1$	$n=3$	$n=0$	$n=1$	$n=3$
分块次数 n	$n=0$	$n=1$	$n=3$	$n=0$	$n=1$	$n=3$
分块阈值 α (点数)	45 000	25 000	5 800	26 000	15 000	3 500
原始点集的分块数	整块	2 块	8 块	整块	2 块	8 块
网络学习次数 t (次)	120	120	120	160	160	160
每块点集的输出层神经元排列(长 \times 宽)(个)	30×45	26×26	13×13	30×60	30×30	15×15
神经元总数 m (个)	1 350	1 352	1 352	1 800	1 800	1 800
学习总时间(s)	2 557.3	1 467.3	423.5	1 526.5	840.9	160.8

4 结 论

在利用 SOM 神经网络技术实现散乱数据点集的 B 样条曲面重建时,提出了一种新的网络初始化方法,并且采用了对散乱数据先分块再学习的策略。实例证明,该方法可以显著节省网络训练时间并改善学习效果,对流形、开曲面的 B 样条曲面重建是行之有效的,将该方法进一步应用于流形闭曲面的 B 样条曲面重建是今后科研工作中努力解决和实现的目标。

参考文献 (References)

- 1 Sarkar B, Menq C H. Parameter optimization in approximating curves and surfaces to measurement data [J]. *Computer Aided Geometric Design*, 1991, 8(3): 267 ~ 291.
- 2 Rogers D, Fog N. Constrained B-spline curve and surface fitting [J]. *Computer-Aided Design*, 1989, 21(6): 641 ~ 648.
- 3 Milroy M J, Bradley C, Vickers G W, *et al.* C^1 continuity of B-spline surface patches in reverse engineering [J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(6): 471 ~ 478.
- 4 Kruth J P, Kerstens A. Reverse engineering modeling of free-form surfaces from point clouds subject to boundary conditions [J]. *Journal of Materials Processing Technology*, 1998, 76(1 ~ 3): 120 ~ 127.
- 5 Cui Han-feng, Ma Wei-yin, Lin Yi-hong, *et al.* Study of multi-surfaces topology and smooth reconstruction [J]. *Journal of Computer Aided Design and Computer Graphics*, 2000, 12(10): 740 ~ 745. [崔汉锋, 马维垠, 林奕鸿等. 多个曲面拓扑模型及光滑重建方法的研究 [J]. *计算机辅助设计与图形学学报*, 2000, 12(10): 740 ~ 745.]
- 6 Eck M, Hoppe H. Automatic reconstruction of B-spline surfaces of arbitrary topological type [J]. *Computer Graphics*, 1996, 30(4): 325 ~ 334.
- 7 Ma W, Kruth J P. Parametrization of randomly measured points for least squares fitting of B-spline curves and surfaces [J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(9): 663 ~ 675.
- 8 Gu P, Yan X. Neural network approach to the reconstruction of freeform surfaces for reverse engineering [J]. *Computer-Aided Design*, 1995, 27(1): 59 ~ 64.
- 9 Yu Y Z. Surface reconstruction from unorganized points using self-organizing neural networks [A]. In: *Proceedings of IEEE Visualization '99 LBHT [C]*, San Francisco, CA, USA, 1999: 61 ~ 64.
- 10 Hoffmann M, Várady L. Free-form surfaces for scattered data by neural networks [J]. *Journal for Geometry Graphics*, 1998, 2(1): 1 ~ 6.
- 11 Hoffmann M. Modified Kohonen neural network for surface reconstruction [J]. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 1999, (54): 857 ~ 864.
- 12 Hoffmann M. Local update of B-spline surface by kohonen neural network [A]. In: *Proceeding of the 5th International Conference on Computer Graphics and Artificial Intelligence [C]*, Limoges, France, 2002: 103 ~ 112.
- 13 Barhak J, Fischer A. Adaptive reconstruction of freeform objects with 3D SOM neural network grids [J]. *Computers & Graphics*, 2002, 26(5): 745 ~ 751.
- 14 Kohonen T. The self-organizing map [J]. *Proceedings of the IEEE*, 1990, 78(9): 1461 ~ 1480.
- 15 Shi F Z. *Computer Aided Geometric Design and Non-Uniform Rational B-Spline (CAGD & NURBS) [M]*. Beijing: Beijing University of Aeronautics & Astronautics Press, 1994: 298 ~ 303. [施法中著. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条 (CAGD&NURBS) [M]. 北京:北京航空航天大学出版社, 1994: 298 ~ 303.]
- 16 Barhak J, Fischer A. Parameterization and reconstruction from 3D scattered points based on neural network and PDE techniques [J]. *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics*, 2001, 7(1): 1 ~ 16.