

多孔介质3维孔隙空间的隐式曲面造型方法

黄丰 卢德唐 王磊 李道伦

(中国科学技术大学工程科学软件研究所, 合肥 230027)

摘要 多孔介质中孔隙空间的结构描述和问题求解是许多复杂形态实体微观分析和科学计算的基础,而实际的多孔介质孔隙空间结构由于异常复杂,采用简单的造型方法往往不能满足绘制和进一步计算的要求。为此,针对自然岩石核磁共振的3维体数据,提出了一种适用于多孔介质孔隙空间的造型方法。该方法首先通过最大球方法识别体数据中的孔隙空间,然后根据孔隙的层次关系和连通关系,通过建立孔隙空间的孔洞-网络模型来描述孔隙空间的拓扑结构,并结合隐式曲面造型方法来构造多孔介质孔隙空间的模型。将该方法运用到自然岩石的3维图像分析中的实验结果表明,该方法不仅使得多孔介质孔隙空间的复杂拓扑结构得以保留,而且保证了重建曲面的光滑性。

关键词 体数据 多孔介质造型 孔洞-网络模型 隐式曲面

中图分类号: TP391.7 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2007)05-0899-06

Modeling Technique Based on Implicit Polynomials for 3D Pore Structure in Porous Media

HUANG Feng, LU De-tang, WANG Lei, LI Dao-lun

(The Institute of Engineering and Science Software of USTC, Hefei 230027)

Abstract The description of the pore structure in porous media is the base of microcosmic analysis and scientific computation of many complex shape entities. Traditional approaches do not fit for efficient rendering and further computation because the actual pore space in porous media is extra complex. In this paper, a new approach to study the morphology (shapes and connectivity) of the pore space of sandrock is presented. This approach uses an efficient algorithm to describe the 3D pore structure based on the pore-network model and implicit polynomials. The pore-network model uses maximal balls to recognize the pore space in magnetic resonance imaging data, and to distinguish between the "pore bodies" and "pore throats", and then establishes their respective connectivity. After the pore bodies of the pore-network model are constructed, a smooth implicit surface is generated to describe the pore space using the technique for blending implicit functions. This algorithm has been tested on the natural sandrock's magnetic resonance images. The experimental results show that this model not only remains the complicated topological structure, but also assures the smoothness of the reconstructed surface. The results also show the microstructure characters of the pore space are in accord with the fractal model.

Keywords volume data, porous media modeling, pore-network model, implicit surface

1 引言

随着图形技术的发展,以现代图形技术为核心

的计算机图形生成技术已得到了极大的发展和广泛的应用。但由于受实验条件(如分辨率问题)和计算方法(大数据量及复杂图形构造)的限制,计算机图形生成技术还有许多方面需要进一步地完善。尤

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10102020);中国科学院知识创新工程重大项目(KZCX1-SW-04);油气藏地质开发工程国家重点实验室开放基金项目(PLN0409)

收稿日期:2005-03-14;改回日期:2006-01-16

第一作者简介:黄丰(1979~),男,现为中国科学技术大学工程科学软件研究所博士生。主要研究方向为数字图像处理、并行计算等。

E-mail:hfeng@mail.ustc.edu.cn

其是直接利用实验(如超声波、电镜成像、微层析成像技术等)得到的 3 维体数据描述多孔介质中孔隙形状的研究就更少,其主要困难在于数据量庞大和孔隙空间结构异常复杂。而这些多孔介质的孔隙形状正是判定材料微观结构有无缺陷^[1]、生物内流微观分析^[2]以及石油开采的精细计算的基础。

对于一些理想结构的多孔介质,毛细管束模型已经能够做出定性或定量的解释,但对于更加复杂的孔隙结构,这一模型却表现出一些不足^[3]。另外,对于一些随机、无序的多孔介质,分形模型也取得了一定的进展^[4]。然而如何选择合适的表征多孔介质结构的分形参数和建立合适的多孔介质分形模型,都需要对多孔介质孔隙空间的微细结构有更深入的了解;同时为了考察各微细孔隙内的物理、化学、生物学和力学特性的细节,以及为了能够使用解析或半解析的方法求解相关问题获得宏观机理和规律的更深层次的原因,都需要更加精细的多孔介质孔隙空间的描述方法。

虽然现实的多孔介质的尺度跨越非常大,从一个数 km 跨径的油田,到更小一些的生物脏器,但是最终的精细计算结果可以归结到由无数 $\mu\text{m} \sim \text{nm}$ 量级的单元的组合。最近一些对自然界中的岩石进行精细 3 维成像的研究,由于辅助以一定的造型手段,使得人们对岩石的孔隙层次上的一些结构特性有了一定的了解^[5],也使更精细的描述孔隙空间成为可能。

前人已经进行了一些 3 维造型的方法的研究^[6,7],但主要侧重从绘制的角度出发。而实际问题的求解不仅要求对孔隙空间的边界有清楚的数学描述,同时要对孔隙微结构的特征(分叉情况、喉道弯曲情况等)及孔洞之间的连通关系有所了解。

为此,本文从自然岩石的核磁共振 3 维体数据出发,针对多孔介质的固有特性,提出了一种将多孔介质孔洞-网络模型和隐式曲面相结合的孔隙空间描述方法。一般来说,多孔介质的内部孔隙结构是异常复杂的,而隐式曲面则被认为在描述复杂边界上有它鲜明的优点。用户可以方便地判断空间点与隐式曲面的相对位置,并且用一组函数就可以描述整个空间的边界情况,也便于做进一步的求解。但是由于实际用到的多孔介质的 3 维体数据的数据量是非常庞大的,因此直接用隐式曲面去构造在现有计算条件下是不合适的,必须辅助其他的一些处理手段。考虑到传统的隐式曲面造型方法可以分为实体变形法和多个实体相互作用法,而简单的实体变

形显然难以描述异常复杂的孔隙结构,而采用多个实体相互作用来构造孔隙空间的隐式曲面则是可行的情况,但需首先提取孔隙空间的特征结构。很多现有的骨架构造算法都是基于细分算法的^[8]。细分意味着要去掉某些多余的元素来保留整个孔隙空间的拓扑结构。上述文献的测试结果表明,当图像的精度提升到某一程度时,细化反而导致了一个较差的结果。而另外一类骨架构造算法,则试图保留原始图像的所有几何特性^[9]。虽然这种方法可以被应用到更高维的骨架刻画,但是算法的稳定性要依赖于起始点的选择。因此,针对多孔介质的特性(即孔洞占据了孔隙空间的主体)决定了孔隙度及较小的喉道决定了渗透率的特性,本文先采取寻找“最大球”的方法来逐步识别孔隙空间;然后根据孔隙的大小和连通关系来建立多孔介质的孔洞-网络模型;最后,在此模型基础上,借助隐式曲面来描述多孔介质孔隙空间。借助此模型,也可进一步考察孔洞尺寸分布、喉道尺寸分布、喉道长度分布等孔隙微结构特征。

2 多孔介质孔洞-网络模型

2.1 基本概念

下面给出最大球和骨架的定义。在某些情况下,骨架的概念常常容易和中轴的概念混淆。但是从严格的意义讲,它们并不是相同的,中轴只是骨架的一个子集。对于 3 维空间 \mathbf{R}^3 上的体素可以用 3 维笛卡儿坐标 (x, y, z) 来表示。这里为了表示简单,体素用向量 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ 来表示。那么任意两点之间的距离可以定义为

$$\text{dist}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

在离散的情况下,定义球心为 \mathbf{p}_0 , 半径为 R 的球为所有 $\text{dist}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_0) \leq R$ 的点的集合,把这样的球记为 $B_R(\mathbf{p}_0)$ 。令 M 为所要求的孔隙空间(M 是 \mathbf{R}^3 的子集),记 M 的补集为 \bar{M} 。那么最大球可以定义为:如果球 $B_R(\mathbf{p}_0)$ 是最大球,当且仅当它是 M' 的一个子集,且不被 M 中的其他球所包含。定义 M 上的骨架 $K(M)$ 为:如果 M 上的一点 $\mathbf{p} \in K(M)$,当且仅当 \mathbf{p} 是一个最大球的球心。明显可以看出,对于给定的一个 $\mathbf{p} \in K(M)$,由 \mathbf{p} 决定的最大球是唯一的。 M 上的任意一个球如果和 \bar{M} 有接触的话,那么这个球就是一个最大球,且球心是骨架上的点。但是反过来说就不对了。下面给出一个平行六面体的骨架

例子,它和直觉上的骨架还是有区别的。

另外一个常用的概念是连通性。根据体素的接触关系,可能有几种不同的体素相邻的定义:例如一个体素和 6 个体素共面,和 12 个体素共边,和 8 个体素共点。如果两个体素在同一个由相邻体素排成的序列中,则认为它们是连通的。

对于孔洞和喉道,目前还没有一个被广泛接受的严格定义。从直观上说,孔洞是多孔介质中较大的缝隙,具有存储能力,它决定了多孔介质的孔隙度;而喉道则是用以连接孔洞的较小的缝隙。也有人把孔洞定义为骨架中多个分支的交点(如图 1 所示)。下面给出孔洞和喉道的检测算法。

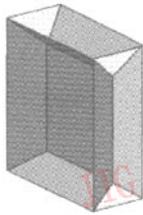


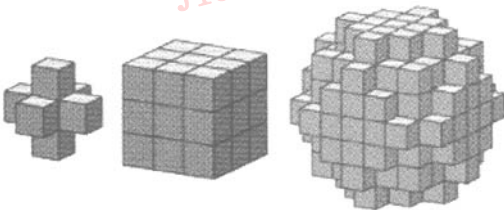
图 1 平行六面体的骨架

Fig.1 The skeleton of a parallelepiped

2.2 孔洞和喉道的检测算法

检测算法可以分为以下几个步骤:

(1) 寻找由体素决定的最大球。根据上文的定义,对于图像中的每一个体素,它都有一个唯一确定的最大球。在下面的计算中,定义单位长度为体素的边长。检测时,首先确定由所有体素决定的最大球的半径。以指定的体素为球心,半径从 0 开始(此时即是体素本身)逐渐变大,直到碰到固体边界。设孔隙空间的边长为 n ,最大球的半径为 R_{max} ,则算法的复杂度为 $O(n^3 \cdot R_{max}^3)$ 。随着图像的分辨率增加,算法的复杂度迅速上升。图 2 给出了在离散情况下几个不同半径的球的示例。



(a) $R=1$ (b) $R=\sqrt{3}$ (c) $R=\sqrt{13}$

图 2 离散情况下的球形

Fig.2 A discretized ball or sphere

为了减少不必要的开方计算,在搜索过程中只记录 R^2 。

整个搜索过程分为两部分:

① 确定搜索空间 Γ 首先从指定的体素出发,沿相邻的 26 个体素向空间发展,直到碰到固体边界为止,就可以得到 26 个扩展终止时的 L^2 ;然后取其中最小的 L^2 ,用来确定搜索空间 Γ ;如果 Γ 超出样品空间,则将 Γ 缩小到样品空间,记新的边长为 $2r$,并且记 $L^2 = (r + 1)^2$ 。对于一个半径为 $2r$ 的立方体,里面所含的最大球半径必小于 $r + 1$ (沿立方体的面的方向是扩展最快的),而最大球的半径平方必小于 $(r + 1)^2$ 。

② 确定由 Γ 决定的最大球。总可以将最大球的半径平方表示成 $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ 。这样就可满足条件 $x^2 + y^2 + z^2 < L^2$ 下,首先寻找非孔隙空间下的最小的 $x^2 + y^2 + z^2$,记为 F^2 ;然后寻找孔隙空间下的最大的 $x^2 + y^2 + z^2$,记为 G^2 。如果找到了这样的 F^2 ,则重新计算满足条件 $x^2 + y^2 + z^2 < F^2$ 的最大的 $x^2 + y^2 + z^2$,此时 $L^2 = F^2 + 1$;如果没有找到,则 Γ 一定是接触样品空间边界的,最大球的半径平方为 G^2 ,此时 $L^2 = L^2 + 1$ 。

(2) 删除被包含的球

当孔隙空间中所有的最大球都被搜索出来以后,其中有一部分球是其他球的子集(如图 3 所示)。当然这种图形只会在离散的情况下出现。由于被包含的球所代表的孔隙空间的信息已经被其他球所包含了,因此算法需要将这一部分球删除掉。删除时,首先按照体素所对应的最大球的半径平方的大小,将体素排成一个链表。这样当处理到 $R^2 = 0$ 时,算法就可以停止了。为了加快算法的处理速度,本文引入了一个参考表。表中的 (x, y, z) 是一个指向球心在 (x, y, z) 处的最大球,如果没有这样的最大球,则为空指针。这样对于一个球心在 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$,半径为 R_0 的最大球来说,只需要在参考表中搜索与满足条件 $dist(p, p_0)^2 \leq R_0^2$ 的体素 p 对应的最大球,并判断是否和指定的球存在包含关系即可,如果找到一个包含的最大球,则将它从链表中删除,同时将它参考表中的指针置为空指针。最后在链表中留下的就是没有被其他球所包含的最大球。

值得注意的是,在连续的情况下,若一个球心在 c_1 ,半径为 R_1 的球包含了一个球心在 c_2 ,半径为 R_2 的球,则有 $R_2 + dist(c_1, c_2) \leq R_1$,但在离散的情况下,上式不再成立。例如在图 2 中,球 A 被球 C 包含(如

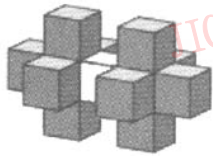


图 3 一个半径为 0 的球被两个半径为 1 的球包含
Fig. 3 The white voxel is a zero-radius ball include in two other balls of radius 1

图 4 所示)。球心之间的距离为 $\sqrt{8}$, 但是 $1 + \sqrt{8} > \sqrt{13}$, 结果判定 A 没有被 C 包含。此时如果使用最大球的半径上限 L_1 , 将判定式改为 $R_2 + dist(c_1, c_2) \leq L_1$, 则可以处理较大一部分这样的情况。

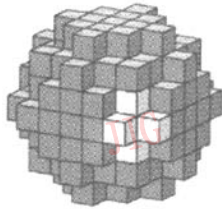


图 4 图 2 中(a)被(c)包含
Fig. 4 Ball (a) include in ball (c) of Fig. 2

(3) 确定其中的连通关系

通过上述算法, 即得到了最大球的链表, 而与最大球对应的体素则表示了整个孔隙空间的骨架。但是由于在真实物理模型中会有部分和其他区域不连通的空间, 因此需要将这一部分数据删除掉, 同时确定最大球之间的连通关系。

对于两个相交或相切的球, 可定义半径小的球为半径大的球的附属球。通过搜索所有最大球的附属球来建立孔隙空间的层次关系。这里为链表中的每一个元素分配一个附属球集合。对于一个半径为 R 的球来说, 只需要在半径为 $2R$ 的范围内搜索就可以了。建立好这样的层次关系以后, 就可以看出很多附属球又有自己的附属球(如图 5 所示)。为了刻画孔隙空间的特征, 需要把处在层次最上层的体素找出来, 但首先要将不是任何球的附属的最大球找出来, 称之为超球; 然后通过深度优先搜索的策略, 对每一个超球, 将附属球的附属球也添加到自己的附属球集合中, 如果一个球是多个超球的附属, 则建立这些超球之间的连通关系; 最后从链表中删除所有被附属的球。

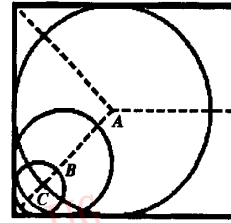


图 5 球 B 是球 A 的附属, 球 C 是球 B 的附属
建立层次后, 球 B、C 都只是球 A 的附属
Fig. 5 Ball B is a slave of A, and a master of C.
After a rearrangement, ball C has only one master of A

这样就得到了一个超球的链表。其中超球和它的附属球集合代表了一个孔洞的特征, 而超球之间的连通关系则代表了喉道的特性。如果一个超球或它的附属球与样品空间的边界接触, 则标记为可到达; 如果一个超球是可到达的, 则所有和它连通的超球也是可到达的; 最后将不可到达的超球从链表中删除。最终即建立了多孔介质的孔洞-网络模型。

3 隐式曲面的重建

通过简单实体构造复杂形状的隐式曲面造型的方法是在 20 世纪 80 年代后期发展起来的。它在许多方面优于其他的造型方法, 即生成的曲面总是光滑的, 其不仅能够较大地压缩数据量, 而且对于复杂拓扑结构可以采用 CSG (constructive solid geometry) 的方法造型等等。

定义重构的曲面为: $S = \{p \in R^3 \mid f(p) = 0\}$, 其中

$$f(p) = \sum_{i=1}^n f_i(p)$$

它可以是多个势函数的叠加。比较典型的势函数定义有 Blinn 的指数函数^[10]、Muraki 的“blobby”^[11]、Wyvill 的“软物体”^[12]等等。

一般来说, 直接构造整个孔隙空间的势函数和抽取其等值面, 会带来巨大的计算耗费, 对于较大的样品数据来说也是不合适的。本文首先分别构造超球及其附属球的势函数 $f_i(p)$, 进而将这些势函数融合成一个复杂的势函数 $f(p)$, 最后抽取势函数 $f(p)$ 的等值面即得最终曲面。

对于球形, 可以很方便地给出它的势函数, 这里主要考虑如何将超球及其附属球的势函数进行融合, 而且其隐式曲面之间是直接光滑过渡的。设球

A 和 B 所定义的势函数分别为 f_A 和 f_B , 则可通过简单地将它们相加来得到它们的光滑融合, 即新的势函数为 $f_{A \cdot B} = f_A + f_B$ 。更进一步, 可以将新的势函数定义为^[13] $f_{A \cdot B} = (f_A^n + f_B^n)^{1/n}$, $n \in \mathbf{R}$, 参数 n 用来控制它们的过渡方式。由于上述过渡方法中势函数之间的影响是整个空间的, 且距离越远影响越大, 这样当考虑多个球串连时, 生成的曲面会严重变形, 为此, 需要引入势函数 g , 使得这种影响随距离增大而衰减, 同时还给出了一个影响距离 d 。定义 $f(p)$ 所对应的曲面的球心为 s , 则新的势函数就被表示成

$$G(p) = \begin{cases} g(f(p)) & \text{dist}(p, s) < d \\ 0 & \text{dist}(p, s) \geq d \end{cases}$$

对于势函数 g 的选择有许多种。文献[7]给出了取 $g(t) = e^{-t}$ 时, 在不同的影响距离 d 和指数 n 下的两球形融合的例子。对于影响距离 d 的选取, 本文中采用了球形的半径为 d 的函数 $D(R)$ 。

最终的算法可以表述为: (1) 通过构造超球 i 及其附属球的势函数, 并按照半径大小依次融合, 首先得到孔洞区域的势函数 $S_i(p)$; (2) 任取超球 i , 通过深度来优先搜索与它连通的超球 j , 如果 j 没有重建, 则将 $S_i(p)$ 和 $S_j(p)$ 融合; (3) 依次取没有重建的超球, 重复步骤(2); (4) 最后得到一组势函数, 依次抽取这些势函数的等值面, 即可得到最后重构的曲面。

这样会有一些新的问题, 当用来构造势函数的实体个数太多时, 生成的隐函数的项数偏多, 但可以修改算法的第(1)步, 直接构造由超球 i 及其附属球决定的孔洞区域的势函数 $S_i(p)$ 。在搜索最大球的过程中, 实际已经得到了球与固体边界的接触点, 然后取这些点为控制点, 也可以较方便地构造出合适的势函数。

4 实例分析

为了验证本文方法的有效性, 利用自然岩石的核磁共振成像的体数据进行了实验。实验时, 首先对体数据中孔隙空间所占据的体素进行分类标记; 然后确定由这些体素决定的最大球, 同时建立它们之间的层次关系和连通关系; 最后得到由它们确定的孔隙空间的隐式曲面表达。

本文取了一个自然岩石的体数据 (128 × 128 × 128 体素, 样品分辨率为 3 μm) 进行了造型实验。本文的算法可以通过 VC++ 实现, 在具体实现过程中, 对最大球加以分类标记、半径控制等手段, 可以

有效提高造型速度。图 6、图 7 为所构造的孔隙空间的模型。图 6 为由体数据得到的超球集, 图 7 为重建后的结果。从图 7 中可以看出, 采用本文方法的造型不仅保留了孔隙空间的拓扑结构, 而且绘制的结果也有较强的立体感。

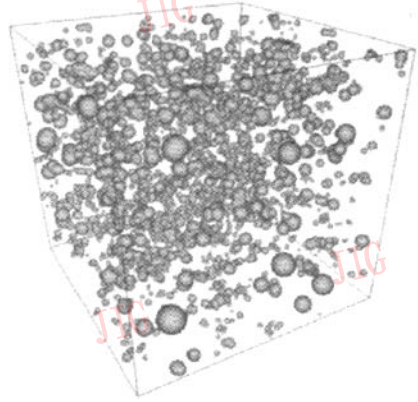


图 6 造型前的超球集

Fig. 6 "Super ball" set before modeling

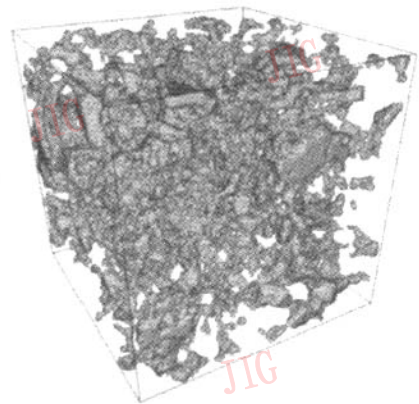


图 7 造型后的重建结果

Fig. 7 Reconstruction image after modeling

利用重建后的孔隙空间的结果, 可以进一步计算该岩石的有效孔隙度和渗透率。本文分别利用原始的成像数据和本文方法处理后的数据, 计算了其有效孔隙度和渗透率。

表 1 处理前后得到的有效孔隙度和渗透率比较

Tab. 1 Comparison of effective porosity and permeability

	有效孔隙度	渗透率
原始成像数据	$\varphi_1 = 0.178$	$K_1 = 0.075 \mu\text{m}^2$
处理后的数据	$\varphi_2 = 0.171$	$K_2 = 0.066 \mu\text{m}^2$

这里应用了渗透率的 Kozeny 公式^[14] $K = G\varphi^3 d_p^2 / (1 - \varphi)^2$ 。由于自然界中的多孔介质通常存在不连通的孔洞区域, 直接从原始数据得到的有效孔隙度往往偏大, 由此得到的流动特性也不准确, 所以在处理某些高孔隙度低渗透率的情况时, 本文的方法就有一定的意义。

5 结 论

本文讨论了利用孔洞-网络模型与隐式曲面相结合对自然岩石等多孔介质进行造型的方法, 即首先介绍了利用“最大球”的方法来识别自然岩石的核磁共振 3 维体数据中的孔隙空间, 并在此基础上构建多孔介质孔洞-网络模型的方法; 然后推导出隐式曲面的势能函数, 并利用它来控制曲面的重建过程。这种隐式曲面的表达方式简洁合理, 且易于绘制。实验结果表明, 重建后的曲面过渡比较平滑, 且拓扑结构保存完好。从实验得到的孔隙微结构的特征来看, 也有助于对多孔介质的了解和其他问题求解的需要。

另外, 在更高的分辨率下, 由于实际的多孔介质产生的体数据往往非常庞大, 因此如果在本文的基础上, 考虑分块建立模型和采用并行的手段构造曲面, 则可以扩大本方法适用的范围, 但这些问题还要做进一步的研究。

参考文献 (References)

- 1 TANG Chu-nan, FU Yu-fang, ZHU Wan-cheng. Numerical simulation of failure process in short fiber reinforced composite material[J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2000, 32(3): 373 ~ 378. [唐春安, 傅宇方, 朱万成. 短纤维增强复合材料破坏过程的数值模拟[J]. *力学学报*, 2000, 32(3): 373 ~ 378.]
- 2 GUO Shang-ping, YU Da-shen, LIU Ze-yang, *et al.* Study on the characteristics of porous flow in biological organs-experimental studies on the porous flow of biofluid in rabbit kidney[A]. In: *Proceedings of the 2nd International Conference on Fluid Mechanics*[C], Beijing, 1993.
- 3 Brunauer S, Skalny J, Odler I. Pore structure and properties of materials[J]. *Academia*, Prague, 1973, 5(1): 3 ~ 26.
- 4 YU Bo-ming. Advances of fractal analysis of transport properties for porous media[J]. *Advances in Mechanics*, 2003, 33(3): 333 ~ 346. [郁伯铭. 多孔介质输运性质的分形研究进展[J]. *力学进展*, 2003, 33(3): 333 ~ 346.]
- 5 Qen P E, Bakke S. Process based reconstruction of sandstones and prediction of transport properties[J]. *Transport in Porous Media*, 2002, 46(2-3): 311 ~ 343.
- 6 GUO Hong-hui, PENG Qun-sheng, LI Jie. Modeling technique based on media-ax is and metaball for vessel biomedical structure [J]. *Journal of Software*, 1999, 10(5): 455 ~ 461. [郭红晖, 彭群生, 李捷. 管状组织的中轴-元球造型方法[J]. *软件学报*, 1999, 10(5): 455 ~ 461.]
- 7 FANG Xiang, BAO Hu-jun, WANG Ping'an, *et al.* Implicit surface modeling based on general skeletons[J]. *Journal of Software*, 2000, 11(9): 1214 ~ 1220. [方向, 鲍虎军, 王平安等. 基于任意骨架的隐式曲面造型技术[J]. *软件学报*, 2000, 11(9): 1214 ~ 1220.]
- 8 Venkatarangan Arun, Lindquist W B, Dunsmuir J, *et al.* Pore and throat size distributions measured from synchrotron X-ray tomographic images of fontainebleau sandstones [J]. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, 2000, 105(9): 21509 ~ 21527.
- 9 Jonker P P. Skeletons in n dimensions using shape primitives[J]. *Pattern Recognition letters*, 2002, 23(4): 677 ~ 686.
- 10 Blinn J F. A generalization of algebraic surface drawing[J]. *ACM Transactions on Graphics*, 1982, 1(3): 235 ~ 256.
- 11 Muraki S. Volumetric shape description of range data using blobby model[J]. *Computer Graphics*, 1991, 25(4): 227 ~ 235.
- 12 Wyvill G, McPheeters C, Wyvill B. Data structure for soft objects [J]. *The Visual Computer*, 1986, 2(8): 227 ~ 234.
- 13 Bloomenthal J, Bajaj C. *Introduction to Implicit Surfaces*[M]. San Francisco: Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1997: 178 ~ 178.
- 14 Bear J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*[M]. New York: American Elsevier Publishing Company, 1972: 111.