用小波系数估计图像边缘方向的相干增强扩散图像降噪算法

赵佰秋　黄凤岗　唐立群
(哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院,哈尔滨　150001)

摘　要　在分析相干增强扩散方法和小波阈值收缩方法之间关系的基础上,给出了相干增强扩散在小波分析意义下的解释,同时解释了相干增强扩散方法与小波阈值收缩方法在图像性质上的等价性。针对相干增强扩散计算扩散矩阵较慢的缺点,提出了一种用小波系数估计图像边缘方向的相干增强扩散图像降噪算法。仿真试验结果表明,该扩散算子可以很好地定位图像边缘,较好地运用了小波的时频分析功能。

关键词　相干增强扩散　小波变换　图像降噪
中图法分类号: TP391　　**文献标识码**: A　　**文章编号**: 1006-8961(2007)12-2096-05

An Image De-noising Algorithm Based on Coherence Enhancing Diffusion: Use Wavelet Coefficients to Estimate Image Edge

ZHAO Bai-qiu, HUANG Feng-gang, TANG Li-qun
(*College of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin* 150001)

Abstract　Firstly, this paper analyzed the relationship between coherence enhancing diffusion and wavelet shrinkage. Then, it interpreted that the interpretation of the coherence enhancing diffusion under wavelet analysis and the equivalency between coherence enhancing diffusion and wavelet shrinkage in image attribute. Finally, it gave an image de-noising algorithm of coherence enhancing diffusion, which used wavelet coefficients to estimate the image edge according to the wavelet's time-frequent analysis function. Experimental results showed that the presented diffusion factor can orient image edge accurately, and the presented algorithm can reduce the noise effectively.

Keywords　coherence enhancing diffusion, wavelet shrinkage, image de-noising

1　引　言

图像降噪是图像处理的重要环节之一,其目的是为了提高图像的信噪比,改善图像质量,尽可能减少噪声对后续图像处理的影响。传统的图像降噪方法主要滤除图像的高频成分,然而图像的细节也分布在高频区域,所以总是在对噪声进行滤除的同时也模糊了图像的边缘。近年来,基于偏微分方程[1,2]和基于小波变换[3,4]的图像处理方法受到人们的广泛关注。而各向异性扩散[1]和小波收缩方法[3]是其中较为有效的两种降噪手段。2002 年, Steidl 和 Weickert 证明了 1 维情况下一次 PM 扩散等效于一次 Haar 小波收缩,并推导了收缩函数与扩散函数之间的相互关系[5],随后 Mrazek 和 Weickert 又证明了 2 维情况下 PM 扩散和小波收缩的等价性[6]。随着研究的深入,研究人员从不同角度给出了相干增强扩散和小波收缩之间的等价性证明[4~10]。Weickert 于 1999 年提出了相干增强扩散[1],它和 PM 扩散一样也是各向异性扩散,不同的是它考虑了图像边缘方向信息,使扩散过程按照图像边缘方向进行。文中分析了 2 维情况下相干增强

收稿日期:2006-07-12;**改回日期**:2006-08-24

第一作者简介:赵佰秋(1982～　),女。现为哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院硕士研究生。主要研究方向为图像处理、模式识别。E-mail: zhaobaiqiu@hotmail.com

扩散与小波阈值收缩算法之间的关系,提出了一种用小波系数估计图像边缘方向的相干增强扩散图像降噪算法。

2　相干增强扩散方法和小波收缩方法及其等价性

2.1　相干增强扩散方法

Weickert 于 1999 年提出以下相干增强扩散模型:

$$\begin{cases}\partial_t \boldsymbol{u} = \operatorname{div}(\boldsymbol{D}\cdot\nabla \boldsymbol{u}) \\ \boldsymbol{u}(x,y,0) = u_0(x,y)\end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{D}$ 为 2×2 的扩散矩阵。$\boldsymbol{D}$ 的特征向量与结构描述算子 $J_\rho(\nabla \boldsymbol{u}_\delta)$ 相同,

$$J_\rho(\nabla \boldsymbol{u}_\delta) = G_\rho * (\nabla \boldsymbol{u}_\delta \otimes \nabla \boldsymbol{u}_\delta) \tag{2}$$

其中,“ $*$ ”代表卷积,$\otimes$代表张量积。

特征值取为

$$\lambda_1 = \alpha$$

$$\lambda_2 = \begin{cases}\alpha & \mu_1 = \mu_2 \\ \alpha + (1-\alpha)\exp\left(-\dfrac{C}{(\mu_1-\mu_2)^2}\right) & \text{其他}\end{cases} \tag{3}$$

其中,$\alpha\in(0,1)$ 常取一个较小的值,μ_1,μ_2 为 $\nabla \boldsymbol{u}_\delta\otimes\nabla \boldsymbol{u}_\delta$的特征值,$C$ 为大于零的常数。

2.2　小波收缩方法

图像经过 2 维离散小波变换后,能量主要集中在低频部分,而高频部分的能量较低。高频小波系数主要由图像边缘和噪声构成,理论分析表明,图像边缘对应的小波系数幅值较大,噪声对应的小波系数幅值较小。由于噪声主要集中在图像的高频部分,因此可以通过收缩小波系数的方法达到去除图像噪声的目的。下面以 Haar 小波为例分析离散图像的小波收缩去噪过程。

设 $\boldsymbol{u}$ 为原始图像信号,$\boldsymbol{\nu}$ 为低频小波系数,$\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$、$\boldsymbol{\omega}_3$ 分别为水平、垂直和对角线方向的高频小波系数。对 $\boldsymbol{u}$ 进行小波分解,不失一般性,只给出 $\boldsymbol{u}=\{u_{i,j},u_{i+1,j},u_{i,j+1},u_{i+1,j+1}\}$ 的小波变换系数:

$$\begin{cases}\boldsymbol{\nu} = \dfrac{u_{i,j}+u_{i+1,j}+u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}}{2} \\ \boldsymbol{\omega}_1 = \dfrac{u_{i,j}-u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}}{2} \\ \boldsymbol{\omega}_2 = \dfrac{u_{i,j}+u_{i+1,j}-u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}}{2} \\ \boldsymbol{\omega}_3 = \dfrac{u_{i,j}-u_{i+1,j}-u_{i,j+1}+u_{i+1,j+1}}{2}\end{cases} \tag{4}$$

应用收缩函数 S_θ 收缩小波系数,再重构得到 2 维信号:

$$\begin{cases}\hat{u}_{i,j} = \dfrac{\boldsymbol{\nu}+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_1)+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_2)+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_3)}{2} \\ \hat{u}_{i+1,j} = \dfrac{\boldsymbol{\nu}-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_1)+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_2)-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_3)}{2} \\ \hat{u}_{i,j+1} = \dfrac{\boldsymbol{\nu}+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_1)-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_2)-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_3)}{2} \\ \hat{u}_{i+1,j+1} = \dfrac{\boldsymbol{\nu}-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_1)-S_\theta(\boldsymbol{\omega}_2)+S_\theta(\boldsymbol{\omega}_3)}{2}\end{cases} \tag{5}$$

2.3　相干增强扩散与小波收缩方法的等价性分析

为便于比较,同样对 $\boldsymbol{u}=\{u_{i,j},u_{i+1,j},u_{i,j+1},u_{i+1,j+1}\}$进行相干增强扩散,并对边界采取周期延拓。采用差分方法对扩散方程进行离散化,取$\partial_x \boldsymbol{u} = u_{i+1,j}-u_{i,j}$,$\partial_{xx}\boldsymbol{u} = \dfrac{u_{i+1,j}+u_{i-1,j}-2u_{i,j}}{2}$,设扩散矩阵 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}$,则扩散方程(式(1))可写成:

$$\begin{aligned}\partial_t \boldsymbol{u} &= (\partial_x \quad \partial_y)\begin{pmatrix}a & b\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_x \boldsymbol{u}\\ \partial_y \boldsymbol{u}\end{pmatrix} \\ &= \partial_x(a\partial_x\boldsymbol{u}+b\partial_y\boldsymbol{u})+\partial_y(b\partial_x\boldsymbol{u}+c\partial_y\boldsymbol{u}) \\ &= \partial_x(a\partial_x\boldsymbol{u})+\partial_x(b\partial_y\boldsymbol{u})+\partial_y(b\partial_x\boldsymbol{u})+\partial_y(c\partial_y\boldsymbol{u})\end{aligned} \tag{6}$$

离散化上式各项:

$$\begin{aligned}\partial_x(a\partial_x\boldsymbol{u}) &= a_{i+1,j}(u_{i+1,j}-u_{i,j})-a_{i,j}(u_{i,j}-u_{i-1,j}) \\ &= (a_{i+1,j}+a_{i,j})(u_{i+1,j}-u_{i,j})\end{aligned} \tag{7}$$

同理:

$$\partial_y(a\partial_y\boldsymbol{u}) = (c_{i,j+1}+c_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j}) \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\partial_x(b\partial_y\boldsymbol{u}) = {} & b_{i+1,j}(u_{i,j}-u_{i+1,j}) + \\ & b_{i,j}(u_{i,j}-u_{i,j+1}) - \\ & b_{i+1,j}(u_{i,j}-u_{i+1,j+1})\end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}\partial_y(b\partial_x\boldsymbol{u}) = {} & b_{i,j}(u_{i,j}-u_{i+1,j}) + \\ & b_{i,j+1}(u_{i,j}-u_{i,j+1}) - \\ & b_{i,j+1}(u_{i,j}-u_{i+1,j+1})\end{aligned} \tag{10}$$

将式(7)~式(10)式代入式(6),用式(4)化简得到扩散的小波系数表示如下:

$$\begin{aligned}\hat{u}_{i,j} = u_{i,j} + \mathrm{d}t[\,& (b_{i,j}-a_{i+1,j}-a_{i,j})(u_{i,j}-u_{i+1,j}) + \\ & (b_{i,j}-c_{i,j+1}-c_{i,j})(u_{i,j}-u_{i,j+1}) + \\ & b_{i+1,j}(u_{i+1,j+1}-u_{i+1,j}) + \\ & b_{i,j+1}(u_{i+1,j+1}-u_{i,j+1})\,]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2} + \left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j} - b_{i,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_1 + \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j} - b_{i+1,j} - c_{i,j+1} - c_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_2 + \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(2b_{i,j} + b_{i+1,j} + b_{i,j+1} - \right. \\
&\left. a_{i+1,j} - a_{i,j} - c_{i,j+1} - c_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_3
\end{aligned} \tag{11}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{i+1,j} = &\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i+1,j} - b_{i+1,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_1 + \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i+1,j} - b_{i,j} - c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j})\right]\boldsymbol{\omega}_2 - \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(2b_{i+1,j} + b_{i,j} + b_{i+1,j+1} - \right. \\
&\left. a_{i+1,j} - a_{i,j} - c_{i+1,j+1} - c_{i+1,j})\right]\boldsymbol{\omega}_3
\end{aligned} \tag{12}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{i,j+1} = &\frac{\alpha}{2} + \left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j+1} - b_{i,j} - a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1})\right]\boldsymbol{\omega}_1 - \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j+1} - b_{i+1,j+1} - c_{i,j+1} - c_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_2 - \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j} + 2b_{i,j+1} + b_{i+1,j+1} - \right. \\
&\left. a_{i+1,j+1} - a_{i,j+1} - c_{i,j+1} - c_{i,j})\right]\boldsymbol{\omega}_3
\end{aligned} \tag{13}
$$

$$
\begin{aligned}
\hat{u}_{i+1,j+1} = &\frac{\alpha}{2} - \left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i+1,j+1} - b_{i+1,j} - a_{i,j+1} - a_{i+1,j+1})\right]\boldsymbol{\omega}_1 - \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i+1,j+1} - b_{i,j+1} - c_{i+1,j} - c_{i+1,j+1})\right]\boldsymbol{\omega}_2 + \\
&\left[\frac{1}{2} + \mathrm{d}t(2b_{i+1,j+1} + b_{i,j+1} + b_{i+1,j} - \right. \\
&\left. a_{i,j+1} - a_{i+1,j+1} - c_{i+1,j} - c_{i+1,j+1})\right]\boldsymbol{\omega}_3
\end{aligned} \tag{14}
$$

为方便与式(5)对比,令

$$
\begin{cases}
H_{i,j} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j} - b_{i,j+1} - a_{i+1,j} - a_{i,j}) \\
V_{i,j} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{d}t(b_{i,j} - b_{i+1,j} - c_{i,j+1} - c_{i,j}) \\
D_{i,j} = \dfrac{1}{2} + \mathrm{d}t(2b_{i,j} + b_{i+1,j} + b_{i,j+1} - \\
\qquad a_{i+1,j} - a_{i,j} - c_{i,j+1} - c_{i,j})
\end{cases} \tag{15}
$$

则对 $\boldsymbol{u}$ 进行一次相干增强扩散可以用方程描述如下:

$$
\begin{cases}
\hat{u}_{i,j} = \dfrac{\alpha}{2} + H_{i,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + V_{i,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + D_{i,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_3 \\
\hat{u}_{i+1,j} = \dfrac{\alpha}{2} - H_{i+1,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 + V_{i+1,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - D_{i+1,j} \cdot \boldsymbol{\omega}_3 \\
\hat{u}_{i,j+1} = \dfrac{\alpha}{2} + H_{i,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 - V_{i,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 - D_{i,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_3 \\
\hat{u}_{i+1,j+1} = \dfrac{\alpha}{2} - H_{i+1,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_1 - V_{i+1,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_2 + D_{i+1,j+1} \cdot \boldsymbol{\omega}_3
\end{cases} \tag{16}
$$

比较式(5)和式(16),显然在表现形式上,相干增强扩散方法与小波收缩方法是等价的。同时可得相干增强扩散在小波分析意义下的解释,相干增强扩散对小波分解的低频部分不进行扩散,而对于小波分解的高频部分,根据扩散系数对小波系数进行收缩,然后重构得到降噪后的图像。

另外,二阶偏微分方程的性质决定了用各向异性扩散方法得到的降噪图像是分片恒定的。而图像经过小波变换后,其边缘信息主要集中在小波高频系数中,但是选用不同的小波基进行小波变换,小波高频系数的特征不同。用 Haar 小波基对大小为 $2^8 \times 2^8$ 的图像进行一次小波变换,小波高频系数表示图像在 $\frac{1}{2^8} \times \frac{1}{2^8}$ 的矩形区域内为常数的分量,因此用 Haar 小波对图像进行一次小波变换,对高频小波系数收缩后重构得到的图像是分片恒定的。这说明在图像性质上,各向异性扩散方法与小波收缩方法的降噪结果是等价的。

下面给出扩散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的具体形式。为了表示方便,用 $\nabla \boldsymbol{u} \otimes \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 代替 $J_\rho(\nabla \boldsymbol{u}_\delta)$ 推导 $\boldsymbol{D}$ 的表达式。通过计算可得结构描述算子 $\nabla \boldsymbol{u} \otimes \nabla \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 的特征向量:

$$
\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{(\partial_x \boldsymbol{u})^2 + (\partial_y \boldsymbol{u})^2}} (\partial_x \boldsymbol{u} \quad \partial_y \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \tag{17}
$$

$$
\boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{(\partial_x \boldsymbol{u})^2 + (\partial_y \boldsymbol{u})^2}} (\partial_x \boldsymbol{u} \quad -\partial_y \boldsymbol{u})^{\mathrm{T}} \tag{18}
$$

显然 $\boldsymbol{v}_1$ 是梯度方向,$\boldsymbol{v}_2$ 是梯度垂直方向。

为方便推导 $\boldsymbol{D}$ 的具体形式,设 $x = \dfrac{\partial_x \boldsymbol{u}}{\sqrt{(\partial_x \boldsymbol{u})^2 + (\partial_y \boldsymbol{u})^2}}$, $y = \dfrac{\partial_y \boldsymbol{u}}{\sqrt{(\partial_x \boldsymbol{u})^2 + (\partial_y \boldsymbol{u})^2}}$,则根据矩阵与特征值和特征向量的关系有:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{D} &= \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 & \lambda_1 xy - \lambda_2 xy \\ \lambda_1 xy - \lambda_2 xy & \lambda_1 y^2 + \lambda_2 x^2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{(\partial_x \boldsymbol{u})^2 + (\partial_y \boldsymbol{u})^2} \times \begin{bmatrix} \lambda_1 (\partial_x \boldsymbol{u})^2 + \lambda_2 (\partial_y \boldsymbol{u})^2 & (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_x \boldsymbol{u} \partial_y \boldsymbol{u} \\ (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_x \boldsymbol{u} \partial_y \boldsymbol{u} & \lambda_1 (\partial_y \boldsymbol{u})^2 + \lambda_2 (\partial_x \boldsymbol{u})^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\lambda_1(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2+\lambda_2(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2}{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2+(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2} & \dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)(u_{i+1,j}-u_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j})}{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2+(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2} \\ \dfrac{(\lambda_1-\lambda_2)(u_{i+1,j}-u_{i,j})(u_{i,j+1}-u_{i,j})}{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2+(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2} & \dfrac{\lambda_1(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2+\lambda_2(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2}{(u_{i+1,j}-u_{i,j})^2+(u_{i,j+1}-u_{i,j})^2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

从式(16)和式(19)可以看出,相干增强扩散在重构像素点时,根据对应点的梯度大小对小波系数进行了不同程度的收缩,同时扩散参数中又包含了图像边缘的定向信息,这使其扩散过程自适应于图像特征,但其扩散系数的复杂计算过程占用了该算法的大量时间。

3　用小波系数估计图像边缘方向的相干增强扩散图像降噪算法

现在进一步分析相干增强扩散的扩散系数矩阵,用 2×2 模板来估计图像的水平和垂直梯度,对图像来说这是合理的,

$$(\partial_x \boldsymbol{u})^2 \approx \left(\frac{u_{i,j}-u_{i+1,j}+u_{i,j+1}-u_{i+1,j+1}}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\omega}_1^2$$

同理$(\partial_y \boldsymbol{u})^2 \approx \boldsymbol{\omega}_2^2$,代入式(19)得:

$$\boldsymbol{D} = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_1^2+\boldsymbol{\omega}_2^2}\begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{\omega}_1^2+\lambda_2\boldsymbol{\omega}_2^2 & (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2 \\ (\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_2 & \lambda_1\boldsymbol{\omega}_2^2+\lambda_2\boldsymbol{\omega}_1^2 \end{bmatrix} \tag{20}$$

式(20)表明用小波系数估计图像边缘方向,构造扩散矩阵是合理的。

文中算法的主要步骤:

(1) 获取高频小波分量。设 $\boldsymbol{u}$ 表示原始图像,$\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega}_i(i=1,2,3)$表示 $\boldsymbol{u}$ 经小波变换后的低频和高频系数。双正交小波具有线性相位和紧支撑的特性,使得图像在分解过程中失真很小,重构信号的平衡性也很好,可以有效去除一部分噪声,提高边缘定位的精度。因此选用双正交 9/7 小波对含噪声图像进行一次小波分解,收缩高频小波分量,重构得到一次降噪后的图像 $\hat{\boldsymbol{u}}$。Haar 小波具有精确的时频定位功能,因此选用 Haar 小波对 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 进行一次小波分解,得到低频分量 $\boldsymbol{\nu}$,高频分量 $\boldsymbol{\omega}_1$、$\boldsymbol{\omega}_2$、$\boldsymbol{\omega}_3$。

(2) 构造扩散矩阵。传统相干增强扩散算法用$\nabla \boldsymbol{u}$ 来构造结构张量,大家知道,$\nabla \boldsymbol{u}$ 表示图像灰度下降最快的方向,而$\nabla \boldsymbol{\omega}$ 则表示小波系数下降最快的方向,即频率下降最快的方向,所以可用$\nabla \boldsymbol{\omega}$ 来估计图像边缘方向,令扩散矩阵 $\boldsymbol{D}$ 的特征向量与结构描述算子$\nabla \boldsymbol{\omega}_3 \otimes \nabla \boldsymbol{\omega}_3^{\mathrm{T}}$ 的特征向量相同,特征值为

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = \alpha \\ \hat{\lambda}_2 = \begin{cases} \alpha & \hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 \\ \alpha + (1-\alpha)\exp\left(-\dfrac{C}{(\hat{\mu}_1-\hat{\mu}_2)^2}\right) & \text{其他} \end{cases} \end{cases} \tag{21}$$

其中,$\alpha \in (0,1)$常取一个较小的值,$\hat{\mu}_1$,$\hat{\mu}_2$ 为$\nabla \boldsymbol{\omega}_3 \otimes \nabla \boldsymbol{\omega}_3^{\mathrm{T}}$ 的特征值,C 为大于零的常数。

(3) 用相干增强扩散方法对 $\hat{\boldsymbol{u}}$ 进行扩散。

4　仿真实验及结果

选取大小为 256×256 的 Lena 灰度图像作为仿真实验图像,选用双正交 9/7 小波对图像进行小波收缩,然后选用 Haar 小波分解图像,构造扩散矩阵。最后根据式(6)进行扩散。图 1 是 3 种算法降噪效果对比图。图 1(a)是原始图像。图 1(b)是加入高斯白噪声的含噪图像,方差为 0.01。图 1(c)是相干增强扩散方法降噪后的图像,步长取 0.01,循环 100 次的结果。图 1(d)是小波软阈值收缩降噪后的图像。图 1(e)是用本文方法降噪后的图像,步长 0.01,循环 100 次。表 1 是在不同噪声水平下,3 种算法降噪后的峰值信噪比。

(a) 原始图像　(b) 噪声图像　(c) 相干增强扩散方法　(d) 小波阈值方法　(e) 本文方法

图 1　3 种算法的降噪效果

Fig. 1　The result image of the three algorithms

从表 1 可以看出,当噪声方差大于 0.01 时,本文方法要优于其他方法,当方差小于 0.01 时,降噪效果虽然没有相干增强扩散方法好,但相差不大。这表明本文的扩散算子可以很好地定位图像边缘,较好地运用了小波的时频分析功能。

表 1 不同噪声水平下 3 种算法的峰值信噪比(dB)

Tab. 1 The PSNR of the three algorithms under different noise level(dB)

方法	不同噪声水平下的峰值信噪比(dB)			
	0.005	0.01	0.05	0.1
噪声图像	23.0331	20.0984	13.6702	11.3819
相干增强扩散	27.5443	26.2064	21.7464	19.7453
小波阈值收缩	26.9462	24.1009	16.1754	13.3907
本文方法	27.3526	26.3127	22.0838	19.8199

5 结 论

相干增强扩散在计算扩散矩阵时两次运用高斯滤波,从而降低了程序运行速度,而小波方法具有有效去除部分噪声和计算速度快的优点,因此本文提出用小波系数估计图像边缘方向的相干增强扩散图像降噪算法。实验结果表明,本文方法可以很好地保护图像边缘,在噪声较大时可以取得较好的降噪效果。

参考文献(References)

1 Weickert J. Coherence enhancing diffusion filtering[J]. International Journal of Computer Vision, 1999, **31**(2-3): 111 ~ 127.

2 Wang Zheng-ming, Xie Mei-hua. A review of the application of partial differential equation in image denoising[J]. Mathematica Applicata, 2005, **18**(2): 219 ~ 224. [王正明,谢美华. 偏微分方程在图像去噪中的应用[J]. 应用数学, 2005, **18**(2): 219 ~ 224.]

3 Donoho D L. Denoising by soft thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, **41**(3): 613 ~ 627.

4 Shen J. A note on wavelets and diffusions[J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2003, **5**(1): 147 ~ 159.

5 Steidl G, Weickert J. Relations between soft wavelet Shrinkage and total variation denoising[A]. In: Proceedings of 24th Deutsche Arbeitsgemeinschaft fur Musterkennung Symposium on Pattern Recognition[C], Berlin, 2002: 198 ~ 205.

6 Mrazek P, Weickert J. Rotationally invariant wavelet shrinkage[A]. In: Michaelis B, Krell G. Pattern Recognition : Lecture Notes in Computer Science[C], Berlin: Springer Verlag, 2003: 156 ~ 163.

7 Steidl G, Weickert J, Brox T, *et al.* On the equivalence of soft wavelet shrinkage, total variation diffusion, total voriation regularization, and SIDEs[J]. Society for Industrial and Applied Mathematics Numerical Analysis, 2004, **42**(2): 686 ~ 713.

8 Wu Ya-dong, Sun Shi-xin. A new hybrid image de-noising algorithm based on 2D wavelet shrinkage and nonlinear diffusion[J]. Acta Electronica Sinica, 2006, **34**(1): 163 ~ 166. [吴亚东,孙世新. 基于二维小波收缩与非线性扩散的混合图像去噪算法[J]. 电子学报, 2006, **34**(1): 163 ~ 166.]

9 Bredies K, Lorenz D A, Maass P. Mathematical concepts of multiscale smoothing[J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2005, **19**(2): 141 ~ 161.

10 Welk M, Weickert J, Steidl G. A four-pixel scheme for singular differential equations[A]. In: Kimmel R, Sochen N, Weickert J. Scale-Space and PDE Methods in Computer Vision[C], Berlin, Springer, 2005: 610 ~ 621.