

# 基于复小波系数局部方差无偏估计量的图像去噪

赵平<sup>1)</sup> 赵春<sup>2)</sup> 尚赵伟<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> (北京交通大学理学院, 北京 100044) <sup>2)</sup> (天津师范大学数学科学学院, 天津 300074)

<sup>3)</sup> (重庆大学计算机科学学院, 重庆 400044)

**摘要** 为了更有效地去噪, 在考虑了图像局部具有不独立性特点的基础上, 利用双树复小波变换, 提出了一种新的空间适应算法, 该算法对于每个系数利用中心方形窗来估计局部方差, 克服了以前的去噪方法不能有效地去除图像边缘噪声的弱点, 和目前好的实验结果进行的对比结果表明, 该方法有效地改善了去噪效果。

**关键词** 双树复小波变换 图像去噪 小波系数

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)01-0014-05

## Image Denoising Based on Non-biased Estimator of Local Variance for Complex Wavelet Coefficients

ZHAO Ping<sup>1)</sup>, ZHAO Chun<sup>2)</sup>, SHANG Zhao-wei<sup>3)</sup>

<sup>1)</sup> (School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044)

<sup>2)</sup> (Faculty of Mathematics Science, Tianjin Normal University, Tianjin 300074)

<sup>3)</sup> (College of Computer Science, Chongqing University, Chongqing 400044)

**Abstract** In order to effective denoising, this paper proposes a new computationally feasible adaptive noise-smoothing algorithm that considers the local dependency characteristics of images under the complex dual-tree discrete wavelet transform (DWT). The variances of local statistics are estimated with a centered square-shaped window for each coefficient. Previous denoising algorithms tend to smear edges severely in the filtered result. The new denoising algorithm overcomes this problem. Some comparisons with the best available results will be given in order to illustrate the effectiveness of the proposed algorithm.

**Keywords** complex dual-tree discrete wavelet transform, image denoising, wavelet coefficients

## 1 引言

去噪是许多图像处理应用首先要考虑的基本问题。因为图像中噪声的存在不仅降低了图像的视觉效果, 并且减少后继处理任务的性能, 因此, 图像去噪在图像处理中占有很重要的地位。

最近, 基于小波的图像去噪方法被广泛使用, 尤其非线性阈值技术<sup>[1~6]</sup>和统计方法<sup>[7]</sup>近几年受到人们的广泛重视。进行阈值处理, 虽然图像噪声的能量可能被减少, 但是有可能过度平滑图像, 在文献 [2]、[4]、[8] 中, 每个子带的小波系数均被认为是

服从广义高斯分布 (generalized Gaussian distribution, GGD)<sup>[8]</sup> 的独立同分布 (i.i.d) 随机变量, 在这样的模型假设下, Chang 等提出了 BayesShrink 方法<sup>[2]</sup>, 即一种子带适应软阈值方法, Chang 的方法极大地改进了 Donoho 提出的经典的小波收缩方法<sup>[5]</sup>。Donoho 提出的方法是一种全局非参数估计方法, 尽管对于这种统计模型提出的小波阈值方法有非常好的理论性质, 但是对于处理实际图像效果不是很好, 其原因主要由于假定的模型不匹配实际图像, 特别缺乏空间适应, 从而降低了所讨论算法<sup>[9]</sup>的性能。

尽管 (双) 正交小波变换 (orthogonal wavelet

收稿日期: 2006-06-22 改回日期: 2006-09-18

第一作者简介: 赵平 (1965~), 男, 现为北京交通大学理学院副教授, 博士。主要研究方向为图像处理、小波分析、模式识别等。

Email: pingzhao@bjtu.edu.cn

transform, OWT)<sup>[9]</sup>使得变换后小波系数互不相关, 但是系数之间依然存在很大的不独立性, 而合理地利用这种适当统计模型的不独立性, 则可以进一步改进编码和去噪算法, 如 Liu 和 Moulin 在文献 [10] 中将统计小波模型分类成尺度内模型和尺度间模型, 并且考察了模型的不独立性。文献 [6] 通过过完备小波展开, 利用尺度内和尺度间的小波系数之间存在的相互的不独立性, 改进了去噪效果, 但是估计图像的标准差是一件困难的事情, 并且计算量很大。此外, 大量的尺度内模型被提了出来<sup>[4][11]</sup>, Chang 等在文献 [4] 中定义了每个小波系数服从广义高斯分布, 其中未知参量的估计都是基于它的邻域来计算的。Mheak 等利用中心方形窗估计了每个系数的二阶局部统计量<sup>[11]</sup>, 不仅使中心方形窗中的方差都相等, 并且改进了线性最小平方误差估计 (LMMSE) 方法。文献 [7] 通过先验概率分布给出了小波变换系数的统计模型, 并通过 Bayesian 判决技术, 利用先验信息估计去噪系数。

本文利用双树复小波变换 (dual-tree complex wavelet transform, DT-CWT), 给出了一个尺度间适应去噪方法, 实验结果表明, 该方法性能优于利用 (双) 正交小波变换的去噪效果, 为了利用尺度间的非独立性, 本文在每个子带中利用中心方形窗估计局部变量的二阶统计量, 并且利用方差的无偏估计量, 提出了一种具有二尺度局部非独立的算法, 由于该去噪方法综合考虑了小波系数的空间适应和局部不独立性, 因而该去噪算法是有效的。

## 2 双树复离散小波变换

基于多尺度带通方向滤波器的线性表示是服务于早期的视觉系统信号处理的一个简单模型, 另外, 它能很好地适应于自然图像基本性质的表示, 例如, 尺度不变性和局部方向结构的存在。而小波出现则为处理图像提供了一个有力的工具, 对于许多图像处理应用问题而言, 小波变换的选择问题显现出来, 其用于图像去噪的过完备表示优于正交小波变换 (见文献 [3]、[6]、[12]), 但是一些模型比较复杂, 而且计算量很大, 可是利用 Kingsbury 的双树复离散小波变换则在 2 维空间中具有很好的方向选择性, 而且增加的冗余是有限的。

当对多维信号滤波时, 由于双树复离散小波变换 (dual-tree complex discrete wavelet transform)<sup>[13][14]</sup> (图 1) 给出了非常好的方向选择性 (图 2), 其在每一层分解中, 产生 6 个子带图像, 且在角度  $\pm 15^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 75^\circ$  有很强的滤波方向, 而实离散小波变换则仅产生 3 个子带图像, 实际上, 仅有两个控制方向, 而  $45^\circ$  的滤波方向是不存在的 (图 3), 因此利用双树复离散小波变换分解的子带是近似时移不变的, 且具有完全重构性、有限冗余、计算量比较小。

对于双树复离散小波变换的逆变换, 在图 1 的每一棵树可分别利用双正交滤波器  $G_{\dots}$  进行逆变换, 使得和相应的分析滤波器  $H_{\dots}$  具有完全重构性 (见图 1 的右下角)。最后对两棵树的输出进行平

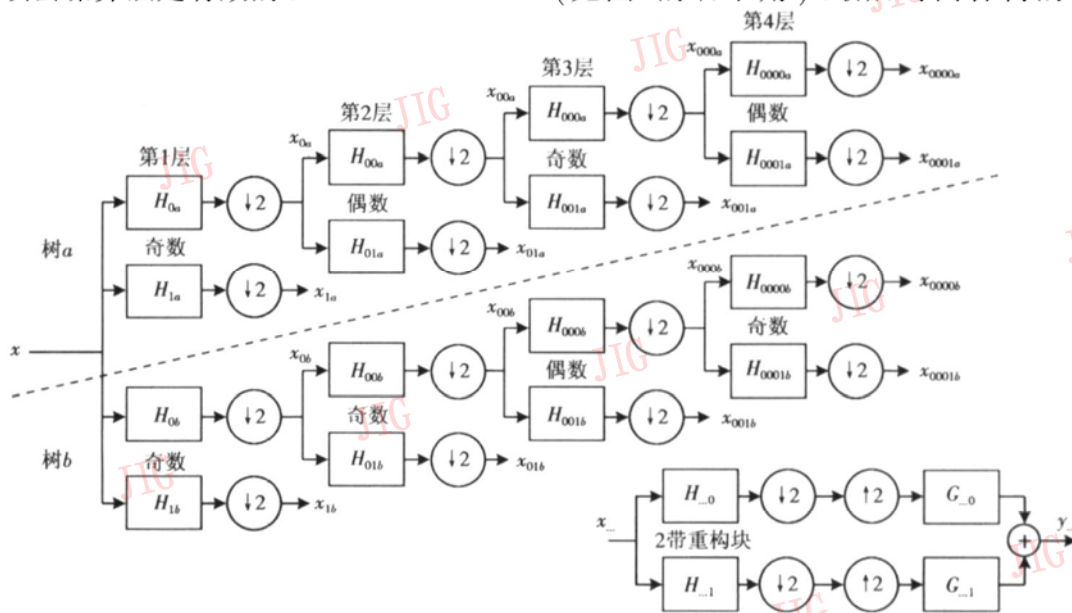


图 1 双树复离散小波变换

Fig 1 Dual tree of filters for the complex wavelet transform

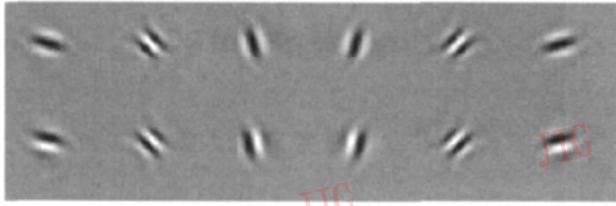


图 2 复小波滤波的 4 层分解的 2 维冲激响应 (提供 6 方向选择滤波), 第 1 行为复小波实部, 第 2 行为复小波的虚部

Fig 2 Impulse responses of 2D complex wavelets at level 4 (provide 6 directionally selective filters), the first row for DT CWT real part and the second row for DT CWT imaginary part

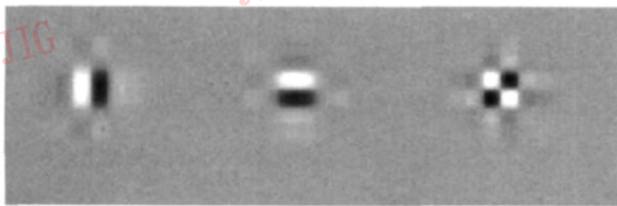


图 3 实小波滤波的 4 层分解的 2 维冲激响应 (提供 3 方向选择滤波), 实际上, 仅有两个控制方向

Fig 3 Impulse responses of 2D real wavelets transform at level 4 (provide 3 directionally selective filters), only two of which have a dominant direction

均, 这是为了获得近似时移不变系统, 这个系统的冗余度为 2 并且假如设计的分析和综合滤波器有非常类似的频率响应, 那么这个系统几乎是紧框架, 这意味着, 当信号被变换到 DT CWT 域中时, 它的能量可近似地被保留。

### 3 去噪算法

假定原始图像  $f$  被加性高斯白噪声  $\varepsilon$  污染, 即

$$g = f + \varepsilon \quad (1)$$

其中,  $\varepsilon \in N(0, \sigma_n^2)$ 。如果对噪声图像进行双树复离散小波变换,  $w_{1k}$  和  $w_{2k}$  是原始图像  $f$  的双树复离散小波变换系数,  $w_{2k}$  表示  $w_{1k}$  的父小波系数, 即  $w_{2k}$  和第  $k$  个小波系数  $w_{1k}$  在相同位置, 但是  $w_{2k}$  是下一个粗尺度上的小波变换系数。同样,  $y_{1k}$  和  $y_{2k}$  是含噪图像  $g$  的小波变换系数,  $n_{1k}$  和  $n_{2k}$  是噪声  $\varepsilon$  的小波变换系数, 设

$$y_k = w_k + n_k \quad (2)$$

其中,  $w_k = (w_{1k}, w_{2k})$ ,  $y_k = (y_{1k}, y_{2k})$ ,  $n_k = (n_{1k}, n_{2k})$ , 为了增加可读性, 可在下面的描述中忽略上

式小波变换系数的下标  $k$ 。而利用小波系数和它的父小波系数的双变量  $w$  概率密度<sup>[7]</sup>

$$p_w(w) = \frac{3}{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left[-\frac{\sqrt{3}}{\sigma} \sqrt{w_1^2 + w_2^2}\right] \quad (3)$$

即可得到  $w_1$  的估计量

$$\hat{w}_1 = \frac{\left| \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma} \right|_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot y_1 \quad (4)$$

其中,  $\sigma^2$  是小波系数  $w_1$  的边缘方差, 噪声方差为  $\sigma_n^2$  ( $g$ )<sub>+</sub> 定义为

$$(g)_+ = \begin{cases} 0 & g < 0 \\ g & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

本文提出的估计边缘方差  $\sigma^2$  的方法如下: 首先, 对子带中的每一个点取方形窗  $\Lambda$ , 同时在方形窗  $\Lambda$  上计算权函数  $\tau_{m,n}$  其定义如下:

$$\tau_{m,n} = \begin{cases} 1 & |y_1(m,n) - y_1(k,l)| < T \\ 0 & |y_1(m,n) - y_1(k,l)| \geq T \end{cases}$$

其中, 点  $(k,l)$  是方形窗  $\Lambda$  的中心点,  $T$  是阈值; 然后, 利用相应的权函数计算每一个点的局部方差如下: 在估计方差时, 无偏估计量比有偏估计量效果好, 方差的无偏估计量为

$$\sigma_\Lambda^2(k,l) = \max \left\{ 0, \frac{1}{M - 1} \sum_{(m,n) \in \Lambda} y_1^2(m,n) - \sigma_n^2 \right\} \quad (6)$$

其中,  $M$  是方形窗  $\Lambda$  中系数的个数。如果利用系数的局部不独立性, 并且充分考虑其空间适应性, 那么利用局部中心方形窗的相应权函数估计的无偏边缘方差  $\sigma_\Lambda^2(k,l)$  如下:

$$\sigma_\Lambda^2(k,l) = \max \left\{ 0, \frac{1}{\sum_{m,n} \tau_{m,n} - 1} \sum_{(m,n) \in \Lambda} \tau_{m,n} y_1^2(m,n) - \sigma_n^2 \right\} \quad (7)$$

式中,  $(k,l)$  是方形窗  $\Lambda$  的中心点, 小波系数  $w_1$  的估计量计算如下:

$$\hat{w}_1(k,l) = \frac{\left| \sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \frac{\sqrt{3}\sigma_n^2}{\sigma_\Lambda(k,l)} \right|_+}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot y_1 \quad (8)$$

而子带中的所有的点都可按照上述方法计算。总结本文的去噪算法如下:

- (1) 进行双树复小波变换获得  $y_k$ ;
- (2) 利用大小为  $L \times L$  的局部方形窗, 通过式 (7) 估计每个像素的权函数的局部方差;
- (3) 利用大小为  $L \times L$  的局部方形窗, 通过式

- (8) 计算小波系数  $w_1$  的估计量  $\hat{w}$ ;
- (4) 由小波系数的估计量  $\hat{w}_1$  重构估计图像。

### 4 实验结果

下面通过实验来对比本文算法和其他文献提出的有效算法的实验效果, 在不同噪声水平  $\sigma_n^2$  上, 对 Lena 图像和 Barbara 图像进行了测试, 本文的双树复小波变换的方形窗  $\Delta$  的大小为  $7 \times 7$ , 各个系统的性能利用峰值信噪比 (PSNR) 进行衡量, 各个算法的峰值信噪比值见表 1。表 1 的 Complex LAWMAP 列中还列出了利用双树复小波变换和通过文献 [11] 的去噪算法所得到的峰值信噪比。设  $s_k, d_k$  分别表示原始图像和去噪图像的第  $k$  个点的像素值, 均方根误差  $e$  可以用下式进行计算:

$$e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_k (s_k - d_k)^2} \quad (9)$$

其中,  $N$  是图像中像素的个数。峰值信噪比利用下式计算:

$$PSNR = 20 \lg \frac{255}{e} \quad (10)$$

为了从污染的小波系数中估计噪声方差  $\sigma_n^2$  本文利用文献 [9] 给出的方法进行计算, 并利用第 1 层小波分解系数的高通子带  $HH_1$  来得到鲁棒的中值估计量, 如下式所示:

$$\sigma_n = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745}, y_i \in HH_1 \quad (11)$$

图 4 和图 5 给出了一个  $512 \times 512$  大小的 Lena 图像和 Barbara 图像的去噪效果对比, 对比结果见表 1, 小波变换是使用长度为 8 的 Daubechies 小波。在实验中, 对于比较光滑的图像, 阈值  $T$  的取值比较小; 对于比较复杂的图像, 阈值  $T$  的取值比较大, 如 Lena 图像, 在实验中阈值  $T$  的取值范围在 80~100 之间的实验效果比较好。

表 1 不同测试图像和不同污染噪声水平 ( $\sigma_n$ ) 的图像去噪后的 PSNR 值

Tab 1 PSNR values of denoised images different test images and noise levels ( $\sigma_n$ ) of noisy

图像	各种方法去噪后的 PSNR 值 (dB)											
	高斯噪声标准差 $\sigma$	含噪图像	文献 [2] 方法	文献 [15] 方法	文献 [11] 方法	文献 [7] 实小波变换方法	文献 [16] 方法	Complex LAWMAP 算法	文献 [6] 方法	文献 [17] 方法	文献 [7] 复小波变换方法	本文方法
Lena	10	28 18	33 32	33 84	34 10	34 36	34 96	34 95	35 06	34 92	35 34	35 40
	15	24 65	31 41	31 76	32 23	32 51	33 05	33 17	33 24	33 24	33 67	33 71
	20	22 14	30 17	30 39	30 89	31 19	31 72	31 90	31 94	31 99	32 40	32 50
	25	20 17	29 22	29 24	29 89	30 15	30 64	30 88	30 84	31 00	31 40	31 52
	30	18 62	28 48	28 35	29 05	29 41	-	30 06	30 03	30 14	30 54	30 67
Barbara	10	28 16	30 86	31 36	31 99	32 25	33 35	32 72	32 92	32 73	33 35	33 40
	15	24 63	28 51	29 23	29 60	29 97	31 10	30 74	30 43	30 56	31 31	31 35
	20	22 14	27 13	27 80	27 94	28 36	29 44	29 34	28 68	28 80	29 80	29 86
	25	20 18	26 01	25 99	26 75	27 16	28 23	28 28	27 36	27 45	28 61	28 70
	30	18 62	25 16	25 11	25 80	26 28	-	27 40	26 40	26 36	27 65	27 77



图 4 本文方法与实离散小波变换含噪 Lena 图像去噪效果对比

Fig 4 Denoised image using our algorithm comparisons with using critically sampled transform for noisy Lena image

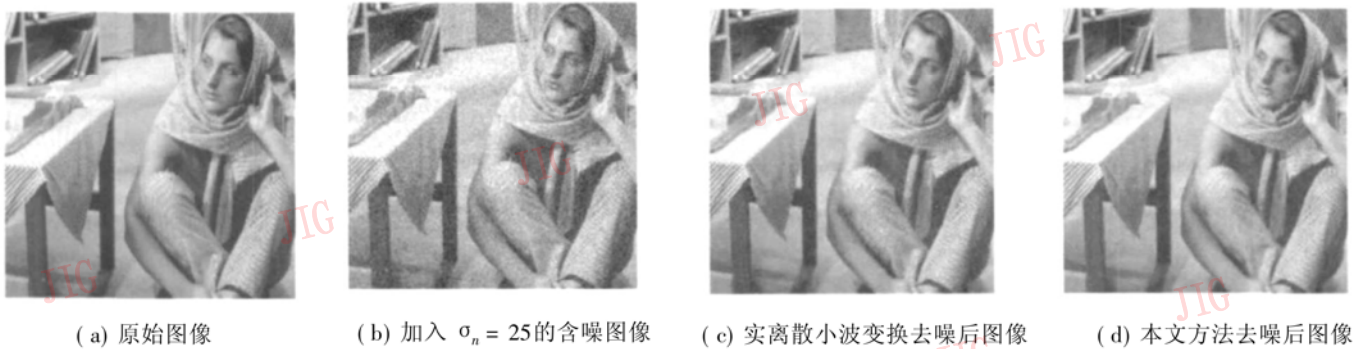


图 5 本文方法与实离散小波变换含噪 Barbara 图像去噪效果对比

Fig 5 Denoised image using our algorithm comparisons with using critically sampled transform for noisy Barbara image

## 5 结 论

本文给出了一种空间适应有效的去噪方案, 并且将该算法和其他有效的去噪方法进行了比较, 对比结果表明, 本文的算法是有效的。实验说明, 去噪方法不仅依赖于小波变换的选择, 即所使用的小波变换应该具有时移不变性等性质, 而且依赖于对小波系数模型, 以及所联系的未知参数的估计, 而利用双树复小波变换进行去噪得到的结果优于利用(双)正交小波变换的去噪效果, 其原因主要是由于(双)正交小波变换缺乏时移不变性的缘故。双树复小波变换不仅保持了传统小波变换良好的时频局部化的分析能力, 还具有近似时移不变性和良好的方向分析能力, 它不仅能反映出图像在不同分辨率上沿多个方向的变换情形, 而且能更好地描述图像的方向属性。另外, 在图像处理时, 同时还要考虑系数之间存在的非独立性, 实验还表明, 利用无偏估计量要比有偏估计量效果要好, 这和理论结论是一致的。

## 参考文献 (References)

- 1 Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage [J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, **90**(12): 1200~1224
- 2 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, **9**(9): 1532~1546
- 3 Pan Quan, Zhang Lei, Dai Guanzhong, et al. Two denoising methods by wavelet transform [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1999, **47**(12): 3401~3406
- 4 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, **9**(9): 1522~1531
- 5 Donoho D L. Denoising by soft thresholding [J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1995, **41**(5): 613~627
- 6 Zhang L, Bao P, Wu X, et al. Hybrid inter- and intrawavelet scale image restoration [J]. *Pattern Recognition*, 2003, **36**(8): 1737~1746
- 7 Sendur L, Selesnick I W. Bivariate shrinkage with local variance estimation [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 2002, **9**(12): 438~441
- 8 Mallat S. A theory for multiresolution signal decomposition: the wavelet representation [J]. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1989, **11**(7): 674~693
- 9 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. *Biometrika*, 1994, **81**(8): 425~455
- 10 Liu J, Moulin P. Information-theoretic analysis of interscale and intrascale dependencies between image wavelet coefficients [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2001, **10**(11): 1647~1658
- 11 Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K, et al. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients [J]. *IEEE Signal Processing Letters*, 1999, **6**(12): 300~303
- 12 Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant denoising [A]. In: Antoniadis A, Oppenheim G (Eds.), *Wavelet and Statistics* [C]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995: 125~150
- 13 Kingsbury N G. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals [J]. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 2001, **10**(2): 234~253
- 14 Kingsbury N G. Image processing with complex wavelets II. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 1999, **357**(9): 2543~2560
- 15 Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based signal processing using hidden Markov models [J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, **46**(4): 886~902
- 16 Li X, Orchard M T. Spatially adaptive image denoising under overcomplete expansion [A]. In: *Proceedings of International Conference on Image Processing* [C], Vancouver, Canada, 2000: 300~303
- 17 Shen L, Papadakis M, Kakadiaris I A, et al. Image denoising using a tight frame [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2006, **15**(5): 1254~1263