

基于形状参数均匀 B 样条的曲线拟合方法研究

赵颜利 史文俊 郭成昊 刘凤玉

(南京理工大学计算机系, 南京 210094)

摘要 分析了带形状参数的均匀 B 样条模型, 将带形状参数的均匀 B 样条曲线应用于离散数据点的拟合。归纳并给出了形状参数的取值策略, 采用迭代线性最近点的方式来优化修正数据点的参数, 以上方法提高了拟合的精度和速度。通过实验分析, 证明了该方法的有效性。

关键词 带形状参数的均匀 B 样条 曲线拟合 迭代线性最近点

中图分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2007)11-2093-05

Curve Fitting Based on Uniform B-splines with Shape Parameter

ZHAO Yan-li, SHI Wen-jun, GUO Cheng-hao, LIU Feng-yu

(Department of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract This paper analyses the uniform B-spline model with shape parameters, and applies the model to the curve fitting of discrete data points. In this paper, the value of the shape parameter is studied, and an algorithm based on iterative linear closest points is put forward to rectify the parameter values of data points. The analysis of experimental results demonstrates the validity and robustness of our algorithm.

Keywords uniform B-spline with shape parameters, curve fitting, iterative liner closest point

1 引言

在图像处理、工程设计等应用中常常需要用曲线按一定要求逼近一系列实测的有序数据点, 即所谓的曲线拟合问题。曲线拟合的精度直接影响到后续处理效果的优劣, 国内外不少学者对此问题进行了大量的研究。如 Rogers 和 Fog 提出了一种迭代修正数据点参数的方法^[1]; Pigel 提到了用迭代的方法来修正 B 样条曲线的参数^[2], 但其没有给出具体的修正方法; 肖等人提出了迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法^[3], 并对其有效性、稳定性进行了讨论。

本文将带形状参数的均匀 B 样条模型应用于曲线拟合。由带形状参数的均匀 B 样条基组成的样条曲线可以通过调整形状参数的取值来生成不同形状的均匀样条曲线, 具有很大灵活性, 故在曲线、

曲面拟合中更具有方便性和精确性。同时本文采用了迭代线性最近点的方法, 减少了拟合误差, 提高了拟合精度。实验结果表明本文算法与文献[3]算法相比, 计算量小, 拟合速度和精度都有了较大提高。同时当形状参数取值为零时, 文献[3]提出的 B 样条曲线拟合方法成为本文方法的一种特例。

2 带形状参数均匀 B 样条基函数的构造及性质

为得到带形状参数均匀 B 样条基函数^[4], 构造非负函数 $h(\lambda, t)$, $t \in [0, 2]$ 满足条件:

- (1) $h(\lambda, 0) = h(\lambda, 2) = 0$, $t \in [0, 2]$
 $h(\lambda, t) = h(\lambda, 2-t)$, $t \in [0, 2]$;
- (2) $h(\lambda, t)$ 是 C^0 连续 (零阶点连续) 的分段二次函数;

基金项目: 国家自然科学基金项目 (60273035)

收稿日期: 2006-07-11; 改回日期: 2006-08-28

第一作者简介: 赵颜利 (1981 ~), 男, 现为南京理工大学计算机系博士研究生。主要研究方向为计算机视觉、计算机图形学与图像分析等。E-mail: njust_danny@163.com

$$(3) \int_0^2 h(\lambda, t) dt = 1;$$

由条件 1 和条件 2 可以得到:

$$h(\lambda, t) = \begin{cases} at^2 + bt & 0 \leq t < 1 \\ a(2-t)^2 + b(2-t) & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

由条件 3 得到 $2a/3 + b = 1$, 若令 $b = 1 - \lambda$, 则 $a = 3\lambda/2$ 。将 a, b 代入上式, 得

$$S_{0,2}(t) = \begin{cases} 3[\lambda t^2 + (1-\lambda)t]/2 & 0 \leq t < 1 \\ 3\lambda(2-t)^2/2 + (1-\lambda)(2-t) & 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中, $-1 \leq \lambda < 1$ 。

令 $S_{i,2}(t) = S_{0,2}(t-i), i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 称 $S_{i,2}(t)$ 为二阶形状参数均匀 B 样条的基函数。

k 阶 ($k \geq 3$) 形状参数均匀 B 样条的基函数可由以下公式递推得到:

$$S_{0,k}(t) = \int_{-1}^1 S_{0,k-1}(x) dx, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$S_{i,k}(t) = S_{0,k}(t-i)$$

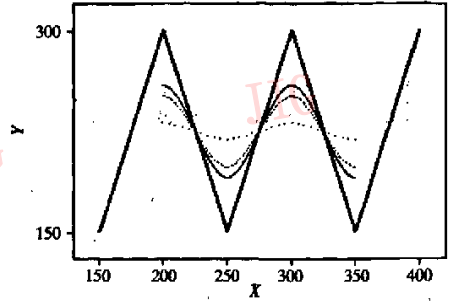
当 $k \geq 3$ 时, 根据定义可得到 $S_{i,k}(t)$ 所具有的性质。称其为 k 阶带形状参数均匀 B 样条基函数, λ 为形状参数, 取值范围为 $[-1, 1]$ 。由以上定义和性质可以得出, 当 $\lambda = 0.3, i = 0$ 时, 4 阶形参均匀 B 样条基函数为

$$N_{0,4}(t) = \begin{cases} \lambda t^4/8 + (1-\lambda)t^3/6 & 0 \leq t < 1 \\ -\lambda t^4/8 - (1+\lambda)t^3/2 + (4-\lambda)t^2/2 - 2t + (8+\lambda)/12 & -1 \leq t < 0 \\ -\lambda t^4/8 + (1+3\lambda)t^3/2 - (8+13\lambda)t^2/2 + (10+12\lambda)t - (88+95\lambda)/12 & 0 \leq t < 1 \\ \lambda t^4/8 - (11+5\lambda)t^3/6 + (2+10\lambda)t^2 - 8(1+3\lambda)t + 32(2\lambda+1)/3 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

为了便于对形参均匀 B 样条和均匀 B 样条比较, 将上面基函数参数 t 的范围进行规范化, 使得 $t \in [0, 1]$ 。化简以后得到带形状参数的 4 阶均匀 B 样条的调配函数为

$$\begin{cases} b_0(t) = [(4-\lambda-3\lambda t)(1-t)^3]/24 \\ b_1(t) = [16+2\lambda-12(2+\lambda)t^2+12(1+\lambda)t^3-3\lambda t^4]/24 \\ b_2(t) = [4-\lambda-12t+6(2+\lambda)t^2-12t^3-3\lambda t^4]/24 \\ b_3(t) = [4-4\lambda+3\lambda t]t^3/24 \end{cases}$$

当 $\lambda = 0$ 时得到的调配函数和 3 次均匀 B 样条的调配函数式是一致的。说明均匀 B 样条基函数是带形状参数的均匀 B 样条基函数的一个特例。即形状参数 $\lambda = 0$ 时, 带形状参数的均匀 B 样条曲线就是均匀 B 样条曲线, 如图 1 所示。



$\lambda = 0.75$ (实线), $\lambda = 0$ (虚线), $\lambda = -1.5$ (点线)

图 1 形参 4 阶均匀 B 样条曲线

Fig. 1 4 order B-spline with shape parameter

图 1 中给出的是在相同的控制点下形状参数 4 阶均匀 B 样条曲线在不同的形参取值时得到的 3 条样条曲线。可以看出在相同的控制点情况下, 带形状参数的 B 样条模型可以通过取不同的形状参数值得到不同形状的曲线而均匀 B 样条模型是固定不变的。说明带形状参数的 B 样条模型比 B 样条模型具有更加好的调节曲线形状的性能, 可以更好逼近不同类型的曲线。

3 最小二乘形状参数均匀 B 样条曲线拟合

$k(k \geq 3)$ 阶带形状参数均匀 B 样条曲线的参数方程为

$$P(u) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,k}(u) \quad (1)$$

其中, d_i 表示带形状参数 B 样条曲线的控制点坐标向量。

$N_{i,3}(u)$ 为带形状参数均匀 B 样条基函数。如数据点集 $P = \{p_j; j = 1, 2, 3, \dots, r\}$ 在 B 样条曲线上, 点 p_j 应满足方程 (1), 于是有

$$p_j(t_j) = \sum_{i=0}^n d_i N_{i,k}(t_j) \quad (2)$$

将式 (2) 写成矩阵形式有

$$P = ND \quad (3)$$

其中, P 是包含 r 个数据点的 $r \times 3$ 矩阵, N 是 $r \times n$ 的 B 样条基函数系数矩阵, D 是包含 n 个未知控制点的 $n \times 3$ 矩阵。

进一步可以推出高斯正交方程组:

$$N^T N D = N^T P$$

由于 N 是满秩的, 所以 $N^T N$ 是 n 阶对称可逆矩

阵,方程存在唯一解。得到最小二乘法拟合带形参 B 样条曲线的控制点,求解方程如下:

$$D = (N^T N)^{-1} N^T P \quad (4)$$

可以证明,在均方误差最小意义下式(4)的解是最优解,即解出的控制点 d 形成的 B 样条曲线是最佳拟合曲线,并使得参数为 $\{t_j\}$ 的 B 样条曲线采样点集到数据点集 P 的均方误差最小。 $\{t_j\}$ 通过对数据点均匀参数化^[5]的方法得到。对有序的数据点列 $P = \{p_j: j=1,2,3, \dots, r\}$,将其按 4 个数据点为一组进行划分,每 4 个数据点对应于一段分段曲线。在每一段分段曲线内对这 4 个数据点进行均匀参数化。后一段分段的起点为前一段分段的终点,每一段对应的数据点列都按照这样的规则进行参数化,由此完成了对整个数据点列的均匀参数化。

4 迭代线性最近点形参均匀 B 样条曲线拟合

最小二乘法拟合带形状参数均匀 B 样条曲线保证了拟合曲线上参数为 $\{t_j\}$ 的点到对应数据点的均方距离最小,但是参数为 $\{t_j\}$ 的点不一定是 B 样条曲线上离对应的数据点最近的点,即数据点集到拟合 B 样条曲线的均方距离不一定是最小的。为了解决这一个问题,文献[3]中提出了一种基于迭代修正最近数据点集参数的方法。所谓某数据点 p_i 的最近点,是把该点的参数 $\{t_j\}$ 邻域 (t_{j-1}, t_{j+1}) 进行 n 等分 $(n > 1, \epsilon > 0)$,每一等分点是一个参数,对应一个曲线点,把这些曲线点逐个算出和 p_i 的距离,最近者就是所谓的最近点。

同样为解决拟合误差问题,本文采用迭代修正线性最近数据点集参数的方法。当数据点集比较密集时,由于参数 t_{j-1}, t_{j+1} 对应的 B 样条曲线点距离很近,可以将两点之间的曲线段近似为直线段。所以在曲线段上求出的最近点,就转化为在直线段上求 p_i 的最近点。求得的最近点就是所谓的线性最近点。显然,求线性最近点的计算量及速度都优于在曲线上求最近点。

本文采用的线性迭代最近点的最小二乘法形参均匀 B 样条曲线拟合算法在迭代过程中保持 B 样条模型的形状参数不变。具体的算法如下:

(1) 对取得的边缘数据点集进行参数化,得到数据点集 P 的参数集 $\{t_j^0: j=1,2,3, \dots, r\}$,其中, $q=0, r$ 表示数据点的数量。

(2) 若 $q \neq 0$,计算数据点集在拟合曲线上的对应的线性最近点集,并把对应的线性最近点集的参数作为该数据点的参数 $\{t_j^1: j=1,2,3, \dots, r\}$ 。若 $q=0$,转到第 3 步。

(3) 根据式(4)计算出新的控制点集合 $D^1 = \{d_j^1: j=1,2,3, \dots, n\}$,设定曲线的形状参数 λ ,得到带形参 B 样条曲线 C^1 。

(4) 计算参数集 $\{t_j^1: j=1,2,3, \dots, r\}$ 对应的带形状参数均匀 B 样条曲线上的点 $X^1 = \{x_j^1: j=1,2,3, \dots, r\}$,进一步计算数据点集 P 与曲线对应点集 X 的均方差 d^1 。

(5) 重新返回第 2 步,直到迭代的均方差之差 $\Delta d = |d^q - d^{q-1}| < \epsilon$,其中, ϵ 为给定的门限值。

为比较形状参数 λ 在不同情况的数据点对曲线拟合精度的影响,下面实验分析给出了形状参数 λ 的选择策略。

5 实验结果

采用 4 阶形状参数均匀 B 样条和 3 组实验数据对提出的算法进行了曲线拟合实验,并将文献[3]中算法的结果和本文算法的结果进行了比较。图 2 为平滑和非平滑两种不同类型数据点,在 λ 取不同值时,经过多次迭代后的曲线拟合效果图。图 3(a)、(b)为形状参数固定时,不同类型数据点曲线拟合随迭代次数变化方差分布图,图 3(c)为迭代次数固定时,数据点曲线拟合随形状参数变化方差分布图。

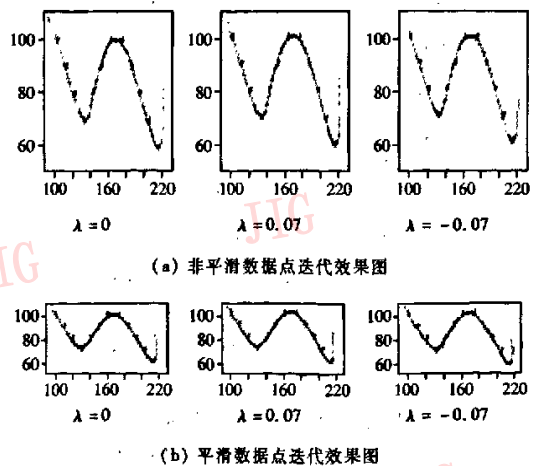
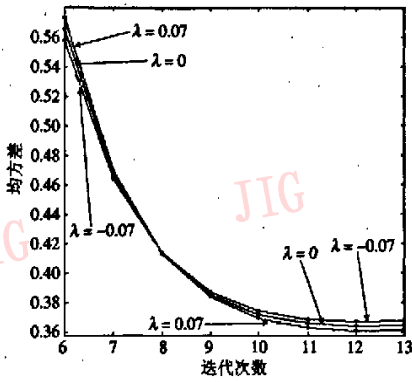
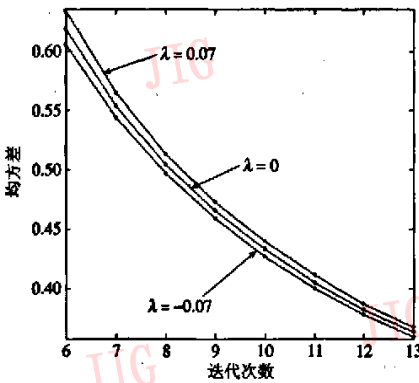


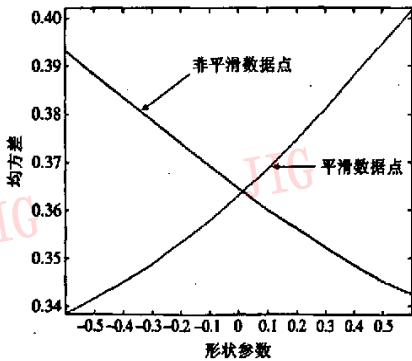
图 2 不同类型数据点迭代效果图
Fig. 2 Iterative figures of different kinds of data points



(a) 非平滑数据迭代次数变化方差图



(b) 平滑数据迭代次数变化方差图



(c) 数据点形状参数变化方差图

图 3 数据拟合形状参数变化方差图

Fig. 3 Variogram of data fitting with the change of shape parameter

分析图 3 的拟合方差图,可以归纳得出对于不同类型的数点,形状参数 λ 的最佳取值策略。

(1) 曲线拟合的精度随迭代次数的增加而增高。

(2) 相对非平滑的数据点进行曲线拟合时,迭代超过一定次数后, λ 越大,曲线拟合的精度越高,收敛性越好。

(3) 相对平滑的数据点进行曲线拟合时,迭代次数一定, λ 越小,曲线拟合的精度越高,收敛性越好。

由于当 $\lambda = 0$ 时,带形状参数均匀 B 样条基函数与均匀 B 样条基函数相同,即两种样条函数拟合效果图相同。分析图 3 方差图,可以看出迭代次数相同时,形参的选择可以提高拟合精度,精度要求固定时,形参的选择可以降低迭代开销。所以通过形参的选择,形参均匀 B 样条拟合曲线优于均匀 B 样条曲线拟合。

为检验本文对复杂曲线的拟合效果,用一个鱼类生物轮廓进行了曲线拟合实验,采用了 300 个数据采样点,拟合效果如图 4 所示。图 5 为拟合方差随迭代次数变化分布图。其中, $\lambda = 0$ 时,带形状参数均匀 B 样条函数等同于均匀 B 样条函数,图 4(b)为采用文献[3]的迭代最近点的方法得出的效果图。

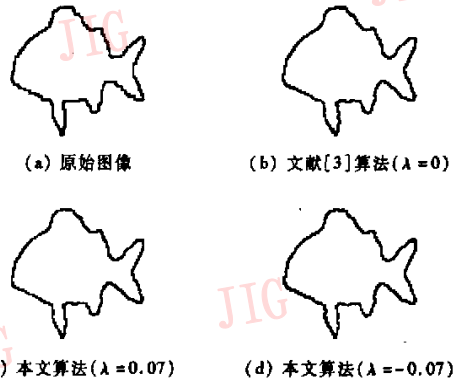


图 4 复杂海洋生物轮廓曲线拟合图

Fig. 4 Curve fitting figures of contour of halobios

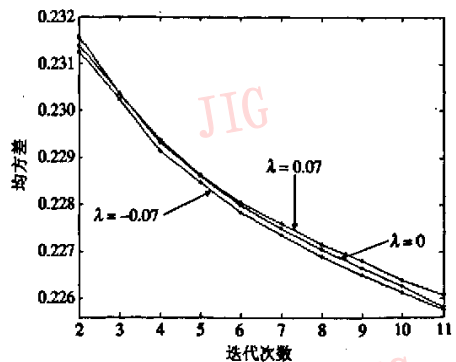


图 5 海洋生物轮廓拟合均方差图

Fig. 5 Variogram of curve fitting of halobios

由于动物轮廓曲线相对平滑,故此 λ 取值应满足策略 1、策略 3 才会得到最佳的效果。图 5 的拟合方差图证实了这一结果,随着迭代次数的增大,生物轮廓曲线拟合的精度越来越高。迭代次数相同时,拟合的精度随 λ 的减小而增大。图 4 给出了文献[3]和本文算法的拟合效果图,通过对图 5 方差图的分析,可以得出通过对形状参数 λ 的调节,本文的算法会取得更好的效果。

本文算法将两点之间的曲线段近似为直线段,若两点间距离越小,则近似精度越大,反之若距离大,则精度越小。即采样数据点越密集,则曲线拟合精度越高;采样数据点越稀疏,则精度就会降低。故此本文改进的算法对于密集采样数据点的曲线拟合能达到最佳效果。因此在实际图像处理中,可以通过多采集数据点的方法来保证曲线拟合的精度。实验结果表明,最终得到的数据点集到形状参数均匀 B 样条曲线采样点集的均方差变得最小,满足了拟合精度的要求。同时针对不同的曲线模型,对形状参数进行调节,提高了精度,加快了拟合速度。本文算法在速度和精度都上优于均匀 B 样条曲线的拟合方法。

6 结 论

形参均匀 B 样条函数带有一个形状参数,形参的调节可以满足不同的要求,具有很大的灵活性。本文以 4 阶形参均匀 B 样条为例,给出了一种迭代

线性最近形参均匀 B 样条曲线拟合方法,实际应用中可以推广到 $k(k \geq 3)$ 阶形参均匀 B 样条曲线拟合。为提高拟合精度和降低算法的开销用到如下方法:(1)重复迭代线性最近点而非最近点,使得最终数据点集到形参均匀 B 样条采样点集的均方差最小,保证了迭代拟合的精度,降低了计算量。(2)分析归纳了形状参数的选择策略,不同的数据点类型选取不同的形状参数,提高了拟合精度和算法的速度。以上措施使得本文算法适用范围更广。实验结果表明本文算法取得了很好的效果。

参考文献 (References)

- 1 Rogers D F, Fog N G. Constrained B-spline curve and surface fitting [J]. Computer Aided Design, 1989, 21(10): 641 ~ 648.
- 2 Pigel L. On NURBS: A Survey[J]. IEEE Transactions on Computer Graphic & Application, 1991, 11(1): 55 ~ 71.
- 3 Xiao Yi-jun, Ding Ming-yue, Peng Jia-xiong. ICP-based B-spline curve fitting[J]. Journal of Image and Graphics, 2000, 5(7): 585 ~ 588. [肖铁军,丁明跃,彭嘉雄. 基于迭代最近点的 B 样条曲线拟合方法研究[J]. 中国图象图形学报, 2000, 5(7): 585 ~ 588.]
- 4 Wang Wen-tao, Wang Guo-zhao. Uniform B-spline with shape parameter [J]. Journal of Computer Aided Design & Computer Graphics, 2004, 16(6): 783 ~ 788. [王文涛,汪国昭. 带形状参数的均匀 B 样条[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2004, 16(6): 783 ~ 788.]
- 5 Shi Fa-zhong. Computer-Aided Geometric Design&NURBS [M]. Beijing: Higher Education Press, 2001. [施法中. 计算机辅助几何设计与非均匀有理 B 样条[M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.]