3 维任意域内点集的 Delaunay 四面体化研究

吴江斌[1)] 朱合华[2)]

[1)](华东建筑设计研究院，上海 200002) [2)](同济大学地下建筑与工程系，上海 200092)

摘 要 Delaunay 空球准则广泛应用于 3 维四面体剖分算法，但标准的 Delaunay 四面体化只适用于点集的凸包区域，且要求不存在多点共球。为了将 Delaunay 四面体化更广泛地应用于网络剖分，通过引入局部优化三角形面代替 Deluany 严格的空球准则，提出了 3 维任意域内点集 Deluanay 四面体化(DTETAD)的概念，并首先通过若干关键定理的证明，研究了一个四面体划分是 DETEAD 的充要条件，然后建立了 DTETAD 的空球准则。该研究成果为拓展 Delaunay 算法在更广泛范围的应用提供了理论依据。

关键词 Delaunay 四面体化 3 维 任意域

中图法分类号：TP391 **文献标识码**：A **文章编号**：1006-8961(2007)11-2109-05

Delaunay Tetrahedralization in an Arbitrary Domain

WU Jiang-bin[1)], ZHU He-hua[2)]

[1)] (*East China Architecture Design Institute, Shanghai* 200002)

[2)] (*Department of Geotechnical Engineering of Tongji University, Shanghai* 200092)

Abstract The Delaunay criterion of the empty sphere is widely used for 3 dimensional tetrahedron tessellation. But original Delaunay tetrahedralization can not be used for the points set with constrained boundary and the degenerate points set in which four or more points are coplanar or in which five or more points are cospherical. The concept of Delaunay tetrahedralization in an arbitrary domain (DTETAD) is presented based on the definition of local optimized triangulation which is brought out to substitute the strict empty sphere criterion of Delaunay. The sufficient and necessary condition for a tetrahedralization to be a DTETAD are proved, and the conditional empty sphere criterion of DTETAD is presented. The research establishes the theoretic foundation for the application of Delaunay in an arbitrary domain.

Keywords Delaunay, tetrahedralization, 3-dimensional, arbitrary domain

1 引 言

Delaunay 划分(Delaunay tessellation, DT)在 2 维三角化与 3 维四面体化中占有举足轻重的地位，其已广泛应用于网格剖分、几何实体造型、GIS 领域[1-5]。在实际应用中往往面对的是任意域内点集的三角化(四面体化)问题，但传统 Delaunay 的定义并不包括多点共圆(球)的离散点集问题和约束边界区域问题。当前，许多学者通过算法处理，仍采用 Delaunay 准则去实现任意域内点集的剖分，但这样的剖分结果已非严格意义上的 Delaunay 划分。因此，有必要扩展传统 DT 的定义，即对 DT 定义中的绝对空圆(球)准则进行如下松弛：(1)允许点集内存在多点共圆(球)；(2)允许点集内其他点有条件地位于三角形的外接圆(四面体的外接球)内。经过上述两点松弛化，即可提出任意域内点集的 Delaunay 空球准则，以便为任意域内点集的 DT 提供理论依据。

闵卫东提出了 2 维任意域内点集的 Delaunay 三角划分(Delaunay triangular on arbitrary domain, DTAD)的概念[6]，并研究了 DTAD 存在性、唯一性

收稿日期：2006-05-09；改回日期：2006-07-26

第一作者简介：吴江斌(1974～)，男，高级工程师。2003 年获同济大学博士学位。主要研究方向为岩土工程数值分析方法与地下空间 3 维信息系统。E-mail：jiangbin_wu@ecadi.com

的条件及一个三角划分是 DTAD 的充要条件后指出,DTAD 也具有最小角最大及平均形态比最大的性质。另外,也可以将 DTAD 看作是 DT 基于上述两个松弛条件而得到的,而松弛的核心是三角化中以局部优化边代替 Delaunay 边。

3 维 Deluanay 四面体化 (Delaunay tetrahedralization, DTET)将是一个更加复杂的问题,因为:其一,存在与 2 维类似的多点共球与约束边界的问题;其二,存在一些约束边界,如果不新增辅助点,则不能被四面体化。由于不可四面体化的特殊 3 维体不是 Delaunay 四面体化面临的特有问题,故本文不做讨论,而是将 2 维任意域内点集的 Delaunay 剖分的概念扩展到 3 维,使之能适用于退化点集及约束边界条件。

2 3 维任意域内点集 Delaunay 四面体化的定义

对于严格的 DTET,点集中任意 4 点构成的四面体成为 Delaunay 四面体的充要条件是:其外接球内部不包含点集中任何点。这个性质也称为 DTET 的空球准则。为了解决 3 维任意域内点集的 Delaunay 四面体化问题,做如下新的定义。

局部优化三角形面:记 3 维域 D 内点集 V 的四面体划分为 $T(D,V)$。设 $\triangle ABC$ 是 $T(D,V)$ 的一个内三角形面,其为四面体 $ABCE$ 和四面体 $ABCF$ 共有,如果线段 EF 在域 D 内,且四面体 $ABCE$ 的外接球内部不包含点 F,则称 $\triangle ABC$ 是局部优化的,此时称这两个四面体满足 sphere 准则。当 A,B,C,E,F 5 点共球时,$\triangle ABC$ 是局部优化的;当 EF 不在域 D 内时,也称 $\triangle ABC$ 是局部优化的。

定义 $T(D,V)$是 3 维任意域 D 内点集 V 的四面体剖分,如果满足其所有内三角形面都是局部优化的,则称该 $T(D,V)$ 是该 3 维任意域内点集 V 的 Delaunay 四面体剖分(Delaunay tetrahedralization in arbitrary domain, DTETAD)。

3 3 维任意域内点集 Delaunay 四面体化的充要条件

引理 1 圆 R_1 与 R_2 相交,如果其交点连线为一弦,且该交弦将 R_1、R_2 切分成两个部分(如图 1 所示),则 R_1 的下扇面 $C_1 \subseteq R_2$,R_2 的上扇面 $C_2 \subseteq R_1$。

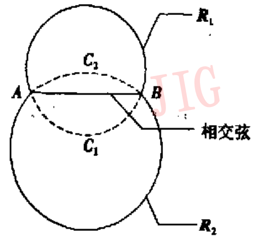


图 1 两圆相交的包含关系

Fig. 1 The cover relationship between two intersecting circle

引理 2 球 Q_1 与球 Q_2 相交,如果其交点集合为一圆,且该交圆将 Q_1、Q_2 切分成两个部分(如图 2 所示),则 Q_1 的下球冠 $B_1 \subseteq Q_2$,Q_2 的上球冠 $B_2 \subset Q_1$。

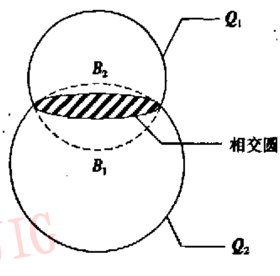


图 2 两球相交的包含关系

Fig. 1 The cover relationship between two intersecting circle

引理 3 设点 C,P 在 AB 边的同侧,如果角 $\angle ACB$ 大于角 $\angle APB$,则 $\triangle ABC$ 的外接圆内部不包含点 P(如图 3 所示)。

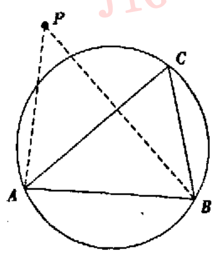


图 3 $\triangle ABC$ 外接圆不包括 P 点情形

Fig. 3 The lemma about the circumcircle of $\triangle ABC$ does not contain point P

定理 1 设点 E,F 在 $\triangle ABC$ 的两侧,点 F,P 在 $\triangle ABC$ 的同侧,如果点 F 不在四面体 $ABCE$ 外接球的内部,而点 P 在四面体 $ABCE$ 外接球的内部,则点 P 在四面体 $ABCF$ 外接球的内部(如图 4 所示)。该定理可由引理 2 证得。

定理 2 设有一个四面体为 $ABCD$,点 P 为

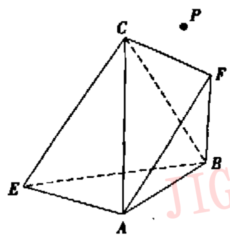
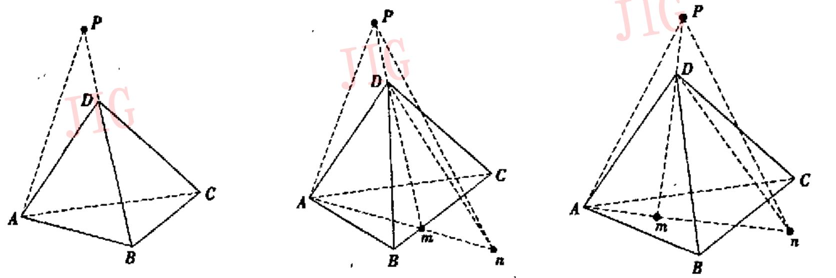


图 4　点 P 位于四面体 $ABCF$ 外接球内的定理

Fig. 4　The theorem about the circumscribed sphere of tetrahedron $ABCF$ contains point P

四面体 $ABCD$ 外的一点,当点 P 与四面体 $ABCD$ 某一顶点(不妨设该顶点为点 D)都在$\triangle ABC$ 的同侧,且 PD 所构成的射线与四面体 $ABCD$ 相交,即射线 PD 与$\triangle ABC$ 相交,则四面体 $ABCD$ 的外接球的内部不包含点 P(见图 5)。

证明　如图 5 所示,该定理中,PD 射线与$\triangle ABC$ 的相交可分为 3 种情形:(1)PD 交于$\triangle ABC$ 的顶点(如图 5(a)所示);(2)PD 交于$\triangle ABC$ 的边上(如图 5(b)所示);(3)PD 交于$\triangle ABC$ 的内部(如图 5(c)所示)。以下对该 3 种情形用反证法分别证明之。



(a) PD 交于$\triangle ABC$ 的顶点　(b) PD 交于$\triangle ABC$ 的边　(c) PD 交于$\triangle ABC$ 的内部

图 5　定理 2 证明示意

Fig. 5　The theorem about the circumscribed sphere of tetrahedron $ABCD$ does not contains point P

假设四面体 $ABCD$ 的外球内部包含点 P,称为假设条件 1。

(1) 顶点相交情形。不妨设 PD 与$\triangle ABC$ 的顶点 B 相交(如图 5(a)所示),则点 A、B、D、P 4 点在一个平面上。记四面体 $ABCD$ 的外接球为球 $\boldsymbol{Q}$。球 $\boldsymbol{Q}$ 与$\triangle ABD$ 所在的平面有交圆,记为 $\boldsymbol{R}$,则圆 $\boldsymbol{R}$ 也是$\triangle ABD$ 的外接圆。已知点 P 在$\triangle ABD$ 面上,则根据假设条件 1 知,点 P 在四面体 $ABCD$ 的外接球 $\boldsymbol{Q}$ 内,进而可得点 P 一定在$\triangle ABD$ 的外接圆 $\boldsymbol{R}$ 内。若$\angle ADB$ 大于$\angle APB$,则由引理 3 知,圆 $\boldsymbol{R}$ 不应包含点 P。因假设条件 1 与引理 3 矛盾,故假设不成立。

(2) 边相交情形。不妨设 PD 与$\triangle ABC$ 的 BC 边交于点 m(如图 5(b)所示)。记四面体 $ABCD$ 的外接球为球 $\boldsymbol{Q}$。球 $\boldsymbol{Q}$ 与$\triangle ADm$ 所在的平面有交圆,记为 $\boldsymbol{R}$。记 Am 延线与圆 $\boldsymbol{R}$ 的交点为 n,则圆 $\boldsymbol{R}$ 是$\triangle AnD$ 的外接圆,且点 A、m、n、D、P 5 点在一个平面上。已知点 P 在$\triangle AnD$ 面上,根据假设条件 1 知,由于点 P 在球 $\boldsymbol{Q}$ 内,因此可得点 P 一定在$\triangle AnD$ 的外接圆 $\boldsymbol{R}$ 内。若$\angle ADn$ 大于$\angle APn$,则由引理 3 知,圆 $\boldsymbol{R}$ 不应包含点 P。因假设条件 1 与引理 3 矛盾,故假设不成立。

(3) 面相交情形。不妨设 PD 与$\triangle ABC$ 交于点 m(如图 5(c)所示)。记四面体 $ABCD$ 的外接球为 $\boldsymbol{Q}$。球 $\boldsymbol{Q}$ 与$\triangle AmD$ 所在的平面有交圆,记为 $\boldsymbol{R}$。记 Am 延线与圆 $\boldsymbol{R}$ 的交点为 n,圆 $\boldsymbol{R}$ 是$\triangle AnD$ 的外接圆,且点 A、m、n、D、P 5 点在一个平面上。已知点 P 在$\triangle AnD$ 面上,根据假设条件 1 知,点 P 在球 $\boldsymbol{Q}$ 内,因此可得点 P 一定在$\triangle AnD$ 的外接圆 $\boldsymbol{R}$ 内。而$\angle ADn$ 大于$\angle APn$,则由引理 3 知,圆 $\boldsymbol{R}$ 不应包含点 P。因假设条件 1 与引理 3 矛盾,故假设不成立。

综上所述,由于假设条件 1 会带来矛盾,因此假设条件 1 不成立,即定理成立。

定理 3　设四面体 $ABCD$ 是 DTETAD$(\boldsymbol{D},\boldsymbol{V})$的一个四面体,点 P 是 $\boldsymbol{V}$ 中一点,且不是四面体 $ABCD$ 的 4 个顶点,如果线段 PD 在域 $\boldsymbol{D}$ 内,且它与$\triangle ABC$ 有交点,则四面体 $ABCD$ 的外接球内部不包含点 P。

证明　如果 PD 与$\triangle ABC$ 交于顶点 A、B、C(不妨设交于点 B),则定理 2 得证。以下设 PD 与$\triangle ABC$ 的交点不是顶点,并设与 PD 相交的四面体从点 D 到点 P 依次是 $t_1,t_2,t_3,t_i,\cdots,t_n$。如果 $n=2$,则 t_2 就是四面体 $ABCE$,由 DTETAD 的定义知,$\triangle ABC$ 是局部优化的,从而定理得证。

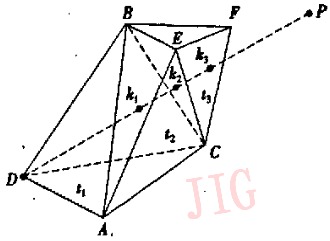


图6 四面体 $ABCD$ 的外接球不包含点 P 证明示意

Fig. 6 The theorem about the circumscribed sphere of tetrahedron $ABCD$ in DTETAD does not contains point P

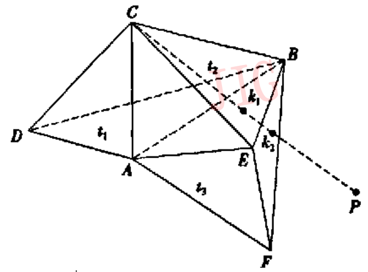


图7 DTETAD 的 sphere 准则

Fig. 7 The empty sphere criterion of DTETAD

以下设 $n>2$,用反证法证明之(如图6所示)。假设定理不成立,即 $ABCD$ 的外接球内部包含点 P,此称为假设条件1。由该假设可推得以下结果:

(1) 由假设条件1和定理1知,四面体 t_2 的外接球内部包含点 P。

(2) 如果四面体 t_2 的某一顶点(如图6中点 E)在 DP 连线上,则由定理2知,t_2 的外接球内部不包含点 P,这与条件(1)的结论矛盾,定理得证。

(3) 如果点 E 不在 DP 连线上(如图6所示),设 DP 与四面体 t_2 中的一个面的交点为 k_2,仿条件(1)可知,四面体 t_3 的外接球内部包含点 P。递推下去可知,任一四面体 t_i 的外接球内部包含点 P。如果 $t_3 \sim t_i$ 中某一个四面体的顶点在 DP 连线上,仿条件(2)可以推出矛盾;否则可以递推得知四面体 t_{n-1} 的外接球内部包含点 P。因为点 P 是四面体 t_n 的顶点,故 t_n 与 t_{n-1} 共有的一个三角形不是局部优化的,这与该四面体划分是 DTETAD 相矛盾。

由以上可知,由于假设条件1会带来矛盾,因此,假设条件1不成立,则定理3成立。

定理4 四面体剖分 $T(D,V)$ 是 DTETAD(D,V) 的充要条件是:对于 $T(D,V)$ 的任何一个四面体 $ABCE$,V 中的任何一点 P,如果它与 A,B,C,E 相连的线段 PA,PB,PC,PE 都在域 D 内,则点 P 不包含在四面体 $ABCE$ 的外接球内部(如图7所示)。这条性质也称为 DTETAD 的 sphere 准则。

证明

(1) 充分性

要证明充分性,只要证明 $T(D,V)$ 的所有内面都是局部优化的。设一内面 $\triangle ABC$ 为四面体 $ABCE$ 和 $ABCP$ 共有。如果 PE 不在域 D 内,由局部优化面的定义知 $\triangle ABC$ 是局部优化的;如果 PE 在域 D 内,则由题设知,$\triangle ABC$ 是局部优化的。

(2) 必要性

设 $ABCD$ 是 DTETAD(D,V) 的一个四面体,PA、PB、PC、PD 都在域 D 内。

① 如果 PA、PB、PC、PD 4条线段中有一条线段与四面体 $ABCD$ 不止一个交点,且不妨设 PC 与 $\triangle ABD$ 有交点,则由定理3得证,$ABCD$ 的外接球不包含点 P。

② 否则 PA、PB、PC、PD 4条线段只与四面体 $ABCD$ 交于顶点(如图7所示),不防设与 PC 线相交的四面体为 $t_2,t_3,t_i,\cdots,t_n$。如果 $n=2$,t_2 就是 $ABCE$,则由 DTETAD 的定义知,四面体 $ABCD$ 的外接球不包含点 P。如果 $n>2$,则由定理3知,四面体 t_2 的外接球不包含点 P。假设四面体 $ABCD$ 的外接球包含点 P,则由定理1知,四面体 t_2 的外接球内部包含点 P,这与定理3的结论相矛盾,因此得证:$ABCD$ 的外接球不包含点 P。

DTETAD 的 shpere 准则是一个有条件的 shpere 准则。这个准则回避了约束边界、多点共球等限制。如果域 D 是点集 V 的凸包形成的域,且 V 中无多点共球,则 DTETAD 就是严格意义的 DTET。

4 结 论

本文首先提出了 DTETAD 的概念,它允许多点共球,且适用于任意域内点集;然后详细研究了3维任意域点集 Delaunay 四面体化的空球准则及一个四面体化是 DTETAD 的充要条件。

DTETAD 是满足一定条件的 DTET,它为相关四面体化算法的设计提供了理论依据。应该指出,仍然存在某些约束边界情形,如果不添加域内辅助点,仍不能实现 DTETAD;对于多点共球情形,DTETAD 仍是非唯一的。因此,DTETAD 的存在条件与唯一

性成为进一步研究和解决的课题。

参考文献(References)

1 Floriani L D, Puppo E. An online algorithm for constrained Delaunay triangulation[J]. Graphical Models and Image Processing, 1992, 54(3): 290 ~ 300.

2 George P L, Hecht F, Saltel E. Automatic 3D mesh generation with prescribed meshed boundaries[J]. IEEE Transactions on Magnetics, 1990, 26(2): 771 ~ 774.

3 Joe B, Simpson R B. Triangular meshes for regions of complicated shape [J]. International Journal for Numerical Method in Engineering, 1986, 23(5): 751 ~ 778.

4 Macaullagh M T, Ross C G. Delaunay triangulation of a random data set for tirarithmic mapping[J]. The Cartographic Journal, 1980, (17): 93 ~ 99.

5 Mei Zhong-yi, Fan Yu-qing. An algorithm based on advanced front technique for automatic generating tetrahedral element[J]. Computer Aided Engineering, 1999, (3): 34 ~ 39. [梅中义,范玉青. 一个基于网格前沿技术的三维实体四面体有限元网格剖分算法[J]. 计算机辅助工程, 1999, (3): 34 ~ 39.]

6 Min Wei-dong, Tang Ze-sheng The delaunay triangulation of a point set within an arbitrary 2D domain[J]. Chinese Journal of Computers, 1995, 18(5): 357 ~ 364. [闵卫东,唐泽圣. 二维任意域内点集的 Delaunay 三角划分的研究[J]. 计算机学报, 1995, 18(5): 357 ~ 364.]