

基于鲁棒性的图像修复

刘瑞华^{1),2)} 黎芳¹⁾

¹⁾(华东师范大学数学系,上海 200062) ²⁾(重庆工学院数理学院,重庆 400054)

摘要 研究了一类具有“突出”部分,如十字交叉,且带有椒盐噪声的模糊降质图像。在吸取了鲁棒性去椒盐噪声及 $p(x)$ -调和映照保持边界轮廓的优势上,建立了一个变分模型,然后利用负梯度流方法进行迭代。实验结果表明,该方法较好地保持了原图像的轮廓。

关键词 鲁棒性 图像修复 $p(x)$ -调和 降质图像

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)09-1641-04

Image Restoration Based on Robust Method

LIU Rui-hua^{1),2)}, LI Fang¹⁾

¹⁾(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062)

²⁾(School of Mathematics and Science, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400054)

Abstract In this paper, we study a class of degraded images with salt & pepper noise and stick shape, such as crossing. Combining the advantages of wiping off salt & pepper noise by robust method with protecting edge by $p(x)$ -harmonic map, we establish a variational model, and then iterative an evolvement equation by the steepest descent to conduct experiments. From simulation results, our method preferably keeps the edge of original image.

Keywords robustness, image restoration, $p(x)$ -harmonic, degraded image

1 引言

一般情况下,我们观察到的图像大部分都是降质图像,引起的原因有很多种,例如相机与物体的相对运动、焦点没有对准以及空气扰动等,另外还有噪声,也许是由于仪器误差引起的。这种情况在许多的领域都有发生,比如机器视觉、医疗诊断及遥感等等。所以,修复这些降质图像及其重要,修复这类图像的关键是既要去模糊,又要保持边界的轮廓,尽量多地保持图像的重要信息。

上面的图像退化过程可以表达为

$$\begin{aligned} z(x,y) &= (h * u)(x,y) + n(x,y) \\ &\equiv \int_D (s,t) u(x-s,y-t) dsdt + n(x,y) \\ &\equiv \mathbf{H}u + \mathbf{n} \quad (x,y) \in \Omega, (s,t) \in \mathbf{D} \end{aligned} \quad (1)$$

式中, $u(x,y)$ 是真实图像, $z(x,y)$ 是观察到的降质图像, $h(s,t)$ 是模糊算子,即点扩散函数, Ω, \mathbf{D} 分别表示图像与模糊算子的定义域, $n(x,y)$ 表示附加的噪声,例如:高斯白噪声或椒盐噪声。

在文献[1]、[2]中,变分法在图像去噪中的利用是一种很成功的方法,但是在这个去噪的过程中,图像没有被模糊,即模糊算子矩阵 $\mathbf{H} = \mathbf{I}$,只有噪声,这样处理起来相对比较容易,其中, \mathbf{I} 是单位阵。本文主要处理模糊图像,且带有椒盐类噪声的降质图像。

Chan 等人提出了全变差模型(TV),即如下的能量泛函极小化问题^[3,4]:

$$\min_u \left\{ E(u) = \frac{1}{2} \|z - h * u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \right\} \quad (2)$$

式中, $\alpha > 0$ 为常数。此模型能够成功地修复没有

模糊,只带有高斯白噪声的降质图像。但是,在修复过程中,同时也会出现“块状”效应,特别地对于带有椒盐噪声的情况不能达到修复的效果,如图 1(d)。

利用鲁棒性方法去除椒盐噪声的方法^[5-7],可以达到一定的效果。Bar 等人利用鲁棒性方法,还结合边界探测算子来保持边界,简记为(BKS),提出了如下的泛函模型:

$$\min_{(u,v)} \left\{ E_{\varepsilon}(u,v) = \int_{\Omega} \sqrt{(z - h * u)^2 + \eta} dx + G_{\varepsilon}(u,v) \right\} \quad (3)$$

$$G_{\varepsilon}(u,v) = \beta \int_{\Omega} v^2 |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} \left(\varepsilon |\nabla v|^2 + \frac{(v-1)^2}{4\varepsilon} \right) dx$$

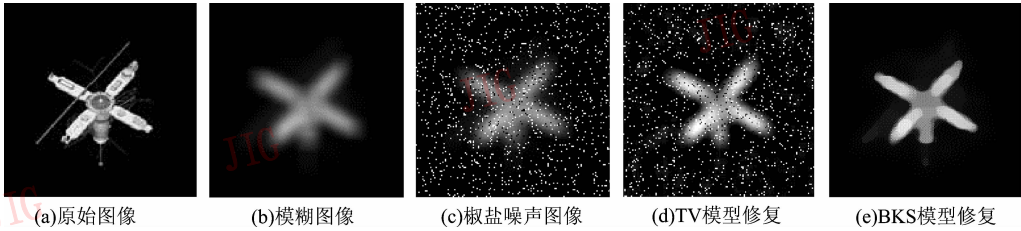


图 1 TV 模型与 BKS 模型的结果比较

Fig. 1 Results comparison of TV model and BKS model

文献[1]中提出了下面的极小化模型:

$$\min \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx \quad (4)$$

式中, $\lim_{s \rightarrow 0} p(s) = 2$, $\lim_{s \rightarrow \infty} p(s) = 1$, 且 $p(s)$ 是一个单调下降的函数。此模型结合 TV 扩散和各向同性扩散之长,可以很好地保持边界。

2 模型提出及算法实现

经过上面的讨论,提出如下模型:

$$\min_u \left\{ E(u) = \int_{\Omega} \Phi(|e|) dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u|^{p(|\nabla u|)} dx \right\} \quad (5)$$

式中, $e(x,y) = z(x,y) - (h * u)(x,y)$ 表示精度误差,函数 $\Phi: \mathbf{R}_0^+ \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个单调递增的函数, \mathbf{R}_0^+ 表示大于等于 0 的实数集;当 $|t| \rightarrow \infty$ 时,函数 $\Phi(|t|)$ 的增长比函数 $\Phi(|t|) = t^2$ 的增长慢得多,例如 $\Phi(|t|) = |t|$, 因为 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{|t|}{|t|^2} = 0$ 。式(5)的第 1 项是数据拟合项,所以在上述模型中,取 $\Phi(|e|) = |e|$, 并称此项为鲁棒项;第 2 项是正则项,根据式(4),取 $p(|\nabla u|) = 1 + \frac{1}{1 + |\nabla u|}$,

$\alpha, \beta, \varepsilon, \eta > 0$ 是常数, v 是边界集的光滑辅助函数。这个模型可以运用到修复模糊程度小,图像比较光滑,且没有“突出”部分的降质图像。但是,如果对于降质图像有“突出”部分,如有尖角、不太光滑,且有十字交叉的图像修复中不能达到预期的效果,在十字交叉的地方会由于“斥球力”的作用,变得光滑。如图 1(e)。

通过图 1(d)、(e) 的比较,可以看到 TV 模型对于修复带有椒盐噪声的图像是失败的,而利用 BKS 模型虽然可以去除椒盐噪声,但是,在某些“突出”部分,十字形交叉部分不能很好地被修复,不能探测出其边界。

$|\nabla u| \rightarrow 0$ 表示图像光滑部分或者常值部分,而此时有 $\lim_{|\nabla u| \rightarrow 0} p(|\nabla u|) = 2$, 则第 2 项变成 $\alpha \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$, 其对应的演化方程是各向同性扩散; $|\nabla u| \rightarrow \infty$ 表示图像边缘或边界部分,而此时有 $\lim_{|\nabla u| \rightarrow \infty} p(|\nabla u|) = 1$, 则第 2 项变成 $\alpha \|\nabla u\|_{L^1(\Omega)}$ 是 TV 模型,其对应的演化方程各向异性扩散。此项称为 $p(x)$ -调和项,主要为了防止“块状”效应,并保持边界。

为了求出能量泛函的极小解,根据标准的变分法,首先求出其对应的 Euler-Lagrange 方程,然后利用负梯度下降流得到演化方程,最后利用数值方法求解此方程即可得到变分问题的极小解。利用 Neumann 边界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega} = 0$, 可以得到:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = -\nabla E(u) = h(-s, -t) * \frac{e}{|e|} + \alpha \cdot \operatorname{div} \left[Q(|\nabla u|) \cdot \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right] \quad (6)$$

式中,

$$Q(|\nabla u|) = A(|\nabla u|) \cdot |\nabla u|^{p(|\nabla u|)}$$

$$A(|\nabla u|) = p'(|\nabla u|) \cdot \ln(|\nabla u|) + \frac{p(|\nabla u|)}{|\nabla u|}$$

$p'(|\nabla u|) = -\frac{1}{(1+|\nabla u|)^2}$, 由于在上面方程中

有 $|e|$, $\ln(|\nabla u|)$ 和 $\frac{1}{|\nabla u|}$ 3项, 为了防止发生退化, 即 $|e|=0$ 及 $|\nabla u|=0$, 进行如下处理:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = h(-s, -t) * \frac{e}{\sqrt{|e|^2 + \eta}} + \alpha \cdot \text{div} \left[Q_\varepsilon(|\nabla u|) \cdot \frac{\nabla u}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}} \right] \quad (7)$$

式中,

$$Q_\varepsilon(|\nabla u|) = A_\varepsilon(|\nabla u|) \cdot |\nabla u|^{p(|\nabla u|)}, \eta, \varepsilon > 0,$$

$$A_\varepsilon(|\nabla u|) = p'(|\nabla u|) \cdot \ln(\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}) + \frac{p(|\nabla u|)}{\sqrt{|\nabla u|^2 + \varepsilon}}$$

设 u_{ij} 表示离散图像函数, $D_\pm^x u_{ij} = \pm(u_{i\pm 1, j} - u_{ij})$, $D_\pm^y u_{ij} = \pm(u_{i, j\pm 1} - u_{ij})$, 利用有限差分格式, 记 $|\nabla u^n| = \sqrt{(D_+^x u_{ij}^n)^2 + (D_+^y u_{ij}^n)^2}$, τ 表示时间步长, 则演化方程式(6)的迭代格式为

$$u^{n+1} = u^n + \tau D(e^n) + \tau \alpha [D_-^x R_\varepsilon^x(|\nabla u^n|) + D_+^y R_\varepsilon^y(|\nabla u^n|)] \quad (8)$$

式中,

$$D(e^n) = h(-s, -t) * \frac{e^n}{\sqrt{|e^n|^2 + \eta}}$$

$$R_\varepsilon^x(|\nabla u^n|) = Q_\varepsilon(|\nabla u^n|) \cdot \frac{D_+^x u_{ij}^n}{\sqrt{(D_+^x u_{ij}^n)^2 + (D_+^y u_{ij}^n)^2 + \varepsilon}}$$

$$R_\varepsilon^y(|\nabla u^n|) = Q_\varepsilon(|\nabla u^n|) \cdot \frac{D_+^y u_{ij}^n}{\sqrt{(D_+^x u_{ij}^n)^2 + (D_+^y u_{ij}^n)^2 + \varepsilon}}$$

3 实验结果

模型式(5)适用于既有模糊又有椒盐噪声的降质图像, 当然对于没有噪声的模糊图像, 也是适用的。采用清晰卫星照片, 如图1(a), 因为轮廓有“突出”部分, 该图像能较好地突出该实验效果。下面的实验中, 如图2所示, 采用高斯模糊图像, 尺寸为 15×15 pixels, $\sigma^2 = 11$, 且带有椒盐噪声。取 $\eta = 0.001, \varepsilon = 0.001$ 。

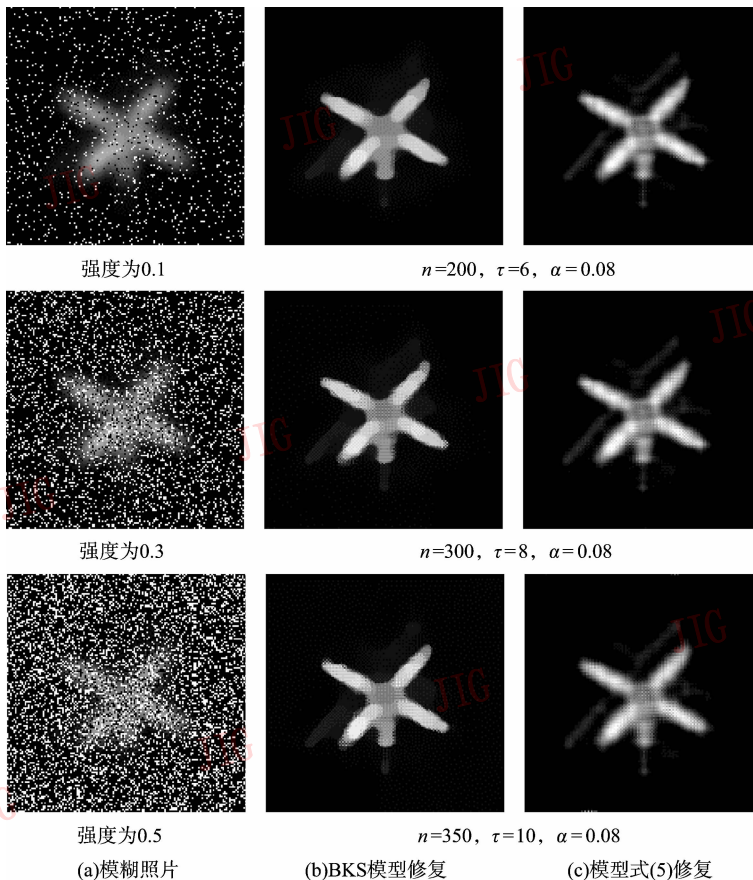


图2 BKS模型与本文模型结果比较

Fig. 2 Results comparison of our model and BKS model

4 结 论

从3个实验效果可以看出,模型式(5)修复的效果比BKS模型修复的效果好,在一定程度上保持了一些细节。但是在实验中,随着噪声强度的加大,修复所需要的迭代次数越多,即所需的时间越长,这在算法实现上有需要改进的地方。

模型式(5)对于模糊算子 h 已知的情况下,可以达到既去噪声,又去模糊的效果,但是在模糊算子 h 未知的情况下,此模型不能修复,这将是感兴趣的另一个课题。

参考文献 (References)

- 1 Blomgren P, Chan T F, Mulet P, *et al.* Total variation image restoration: numerical methods and extensions [A]. In: Proceedings of the 1997 International Conference on Image Processing (ICIP'97) [C], Washington, 1997, 3: 384 ~ 387.
- 2 Aubert G, Kornprobst P, *Mathematical Problems in Image Processing: Partial Differential Equations and the Calculus of variations* (Applied Mathematical Sciences, Vol. 147) [M]. Verlag New York: Springer, 2002: 59 ~ 128.
- 3 Vogel C R, Oman M E. Fast, robust total variation-based reconstruction of noisy, blurred images [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1998, 7(7): 813 ~ 824.
- 4 Chan R H, Chan T F, Wong C K. Cosine transform based preconditioners for total variation deblurring [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 1999, 8(10): 1472 ~ 1478.
- 5 Nikolova M. A variational approach to remove outliers and impulse noise [J]. *Journal. of Mathematical Imaging and Vision*, 2004, 20(1): 99 ~ 120.
- 6 Chan R H, Ho C W, Nikolova M. Salt-and-pepper noise removal by median-type noise detectors and detail-preserving regularization [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2005, 14(10): 1479 ~ 1885.
- 7 Bar L, Kiryati N, Sochen N. Image deblurring in the presence of impulsive Noise [J]. *International Journal of Computer Vision*, 2006, 70(3): 279 ~ 298.