

一种基于小波变换的图像去噪新方法

田沛¹⁾ 李庆周¹⁾ 马平¹⁾ 牛玉广²⁾

¹⁾(华北电力大学自动化系, 保定 071003)

²⁾(华北电力大学电站设备状态监测与控制教育部重点实验室, 北京 102200)

摘要 为了更好地进行图像去噪,提出了一种图像去噪的方法。对图像进行小波变换以后,噪声的小波系数在不同尺度上都服从高斯分布但大小不同。由此,对各尺度各方向上的小波系数进行维纳滤波,而保持低频系数不变,先以此来估计原始图像的小波系数;然后进行小波反变换,得到去噪图像。实验结果表明了该方法的有效性。

关键词 小波变换 维纳滤波 图像去噪

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)03-0394-06

A New Method Based on Wavelet Transform for Image Denoising

TIAN Pei¹⁾, LI Qing-zhou¹⁾, MA Ping¹⁾, NIU Yu-guang²⁾

¹⁾(Department of Automation, North China Electric Power University, Baoding 071003)

²⁾(Key Laboratory of Condition Monitoring and Control for Power Plant Equipment, Ministry of Education North China Electric Power University, Beijing 102200)

Abstract A method for image denoising is proposed. After performing multi-resolution wavelet decomposition on corrupted image, the wavelet coefficients of noise are Gaussian distribution, and have different variances in different levels. Based on this, wiener filter is applied to the wavelet coefficients on different subbands and orientations, and leave wavelet coefficients in the low frequency domain without change, to estimate the wavelet coefficients of the clean image. Then the inverse wavelet transform is applied to the modified wavelet coefficients, resulting in the denoised image. At the end, experimental results show the validity of the proposed method.

Keywords wavelet transformation, wiener filtering, image denoising

1 引言

为了将现实中含有噪声的图像用于后续的图像处理,有必要对图像进行去噪处理。近几十年来小波理论得到了迅速发展,小波分析成为信号处理的有力工具,被广泛应用于图像处理。小波变换的良好特性^[1],使得小波去噪获得了极大成功。小波去噪最先研究的是小波阈值去噪方法,它是一种简单,去噪效果不错的方法。1994年,Donoho和Johnstone提出了Visu Shrink方法,给出了 $T = \sigma \sqrt{2\ln(N)}$ 的

阈值(DJ阈值),这种方法能在Besov空间上给出原始信号的最佳估计(现实生活中大部分信号、图像都可以近似由Besov空间建模),且采用软阈值函数得到的去噪信号依大概率与原始信号同样光滑^[2,3]。但是Visu Shrink方法存在着严重的“过扼杀”小波系数的倾向,因此人们纷纷提出了多种不同阈值的确定方法。比如基于stein无风险估计的Sure Shrink方法^[4]和Chang等人提出一种基于Bayes准则的Bayes Shrink方法($T = \sigma/\sigma_\beta$,其中, σ 是噪声标准方差, σ_β 是广义高斯分布的标准方差)^[5]。这两种阈值都是针对软阈值函数得出的结

基金项目:国家自然科学基金项目(60672151)

收稿日期:2006-04-18;改回日期:2006-09-07

第一作者简介:田沛(1957~),男,教授。主要研究方向是数字图像处理、机器视觉、多源信息融合。E-mail: tianpei128@sina.com

论。阈值函数体现了对小波系数不同处理策略和不同估计方法,常用的阈值函数有硬阈值函数和软阈值函数。用硬阈值方法可以很好保留图像边缘局部特征,但图像会出现振铃、伪吉布斯效应等视觉失真,而用软阈值方法处理,结果则相对平滑得多,但是可能会造成边缘模糊等失真现象。常用的阈值去噪采用的是固定单一的阈值,这种做法没有考虑不同尺度上噪声的大小是不同的,因而去噪效果不是很理想。

本文先对图像进行小波变换,根据高斯噪声的小波系数和信号(图像)小波系数不同的特点,对不同尺度不同方向上的小波系数进行维纳滤波。信号的小波系数在局部仍然具有相关性,而加性噪声在不同尺度和不同方向上仍然服从高斯分布,只是噪声的大小不同。维纳滤波器^[6]是一种经典的线性平滑滤波器,是基于最小均方误差原则而得到的一种滤波器,它能够根据局部方差来调整输出。因此,在估计出噪声在小波域中的分布特点以后,就能够利用维纳滤波来滤除高斯噪声。最后对滤波后的小波系数进行重构,得到去噪图像。

由于小波变换的多分辨率和去相关特性^[1],使得小波变换能很好地保留图像边缘特征,而对噪声有白化趋势,因而基于小波变换和维纳滤波的方法比简单的维纳滤波的效果要好;另一方面,针对高斯噪声在不同尺度上小波系数的特点,对含噪图像的小波变换系数采用维纳滤波,因而又比常用的阈值方法的去噪效果好。仿真结果也表明了该方法的有效性。

2 在小波域中滤除高斯噪声

2.1 图像的小波变换

考虑含有加性噪声的图像模型:

$$\begin{cases} g(i, j) = f(i, j) + n(i, j) \\ i = 1, 2, \dots, M; j = 1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\{f(i, j)\}$ 是原图像(未含噪声), $\{n(i, j)\} \sim N(0, \sigma^2)$ 且独立同分布,与 $\{f(i, j)\}$ 也是相互独立的, $M \times N$ 为图像尺寸。

含噪图像 $\{g(i, j)\}$ 经(线性)小波变换以后,有

$$W_g = W_f + W_n \quad (2)$$

其中, W_g 为含噪图像的小波系数, W_f 是原图像的小波系数, W_n 为噪声小波系数。

2.2 高斯噪声的小波系数 $W_n(S)$ 的特性

在对图像进行小波变换去噪的过程中,首先要根据信号和噪声在小波域中不同特点,区分出信号和白噪声。Mallat 等人建立了小波变换与刻画信号奇异性的 Lipschitz 指数之间的密切关系理论。信号和噪声的 Lipschitz 指数是不一样的。信号的 Lipschitz 指数一般是大于 0 的。即便是不连续的奇异信号,只要在某一邻域内有界,其 Lipschitz 指数 $\alpha = 0$ 。而噪声的 Lipschitz 指数往往是小于 0 的(具有负的奇异性)^[7]。比如高斯白噪声,它是广义随机分布的,几乎处处奇异,它的 Lipschitz 指数 $\alpha = -1/2 - \varepsilon (\varepsilon > 0)$ 。小波变换去噪主要是利用信号和噪声的 Lipschitz 指数在局部结构特征下所表现的奇异性对小波系数进行处理。

设 $n(x)$ 是均值为零,方差为 σ^2 的高斯白噪声,令 $s = 2^j, \psi_s(x) = \psi(x/s)/s$, 噪声自相关为

$$E(n(u)n(v)) = \sigma^2 \delta(u - v) \quad (3)$$

其小波变换为

$$\begin{aligned} W_n(s, x) &= n(x) * \psi_s(x - u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} n(u) \psi_s(x - u) du \end{aligned} \quad (4)$$

有

$$\begin{aligned} |W_n(s, x)|^2 &= \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} n(u) n(v) \psi_s(x - u) \psi_s(x - v) dudv \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sigma^2 \psi_s^2(x - u) du \end{aligned} \quad (5)$$

所以,

$$E[|W_n(s, x)|^2] = \sigma^2 \|\psi\|^2 / s \quad (6)$$

又

$$E[W_n(s, x)] = \int_{\mathbb{R}} [E(n)] \psi_s(x - u) du = 0 \quad (7)$$

所以有

$$\text{var}[W_n(s, x)] = \sigma^2 \|\psi\|^2 / s \quad (8)$$

考虑到小波变换为线性变换,则高斯白噪声的小波系数仍然为高斯分布,故

$$W_n(s, x) \sim N(0, \sigma^2 \|\psi\|^2 / s) \quad (9)$$

当使用正交小波变换时,有 $\|\psi\| = 1$, 则

$$W_n(s, x) \sim N(0, \sigma^2 / s) \quad (10)$$

可见,零均值高斯白噪声的正交小波变换仍为零均值的高斯噪声,而且各尺度上噪声系数的方差随尺度 s 的变大而减小,即高斯白噪声具有负的奇异性。

因而,可以把含有加性噪声的图像的小波变换

系数看作这样两部分:一是原图像的小波变换系数,其相邻系数方差变化缓慢^[8];二是高斯噪声的系数,不同尺度上的噪声系数服从零均值、方差与尺度成反比的高斯分布。我们的目的是要消除噪声的小波系数,保留原图像的小波系数,再进行小波重构,得到估计信号,即去噪后的图像。由于维纳滤波是一种自适应滤波,对高斯噪声有特别好的去噪效果,能够根据图像的区域方差来调整滤波器的输出,区域方差越大,平滑作用越强,因此利用维纳滤波器来滤除各尺度 3 个方向(水平、垂直和对角方向)上小波系数中的高斯噪声系数。

2.3 图像的小波变换系数的维纳滤波

与通常所采用的经验维纳滤波的方法不同,这里没有采用引导小波(引导小波和去噪小波如何配对目前尚无定论),而是充分利用噪声系数分布特点直接进行维纳滤波,估计出图像的小波系数 $\hat{W}_f(s)$,再进行小波重构,实现图像去噪。

维纳滤波是一种局部自适应线性滤波器,选取局部邻域大小为 $m \times n$,则图像的区域方差为

$$\delta^2 = \frac{1}{Q} \sum_{(i,j) \in L} (W_g^2(s,J) - \Gamma^2 W_g(s,J)) \quad (11)$$

式中, L 为所选取的 $m \times n$ 邻域,包含的像素个数为 Q ; $W_g(s,J)$ 是尺度为 s 时的原始图像的小波系数, $\Gamma W_g(s,J) = \frac{1}{Q} \sum_{(i,j) \in L} W_g(s,J)$, $J = 1, 2, 3$, 分别表示水平、垂直和对角方向的小波系数。

维纳滤波应用法则如下:

$$\hat{W}_f(s,J) = \Gamma W_g(s,J) + \frac{\max(\delta^2 - v^2, 0)}{\max(\delta^2, v^2)} [W_g(s,J) - \Gamma W_g(s,J)] \quad (12)$$

式中, v^2 为噪声系数的方差,当使用正交小波变换时,由式(10)得 $v^2 = \sigma^2/s$ 。

由于噪声的方差未知,需要先对噪声进行估计。噪声经过小波变换以后,其能量大部分都集中在 HH 子图上,因此,可以选用第 1 层小波分解系数的 HH 子图的方差来估计 σ 。对于高斯噪声,采用如下经典估计^[3]:

$$\hat{\sigma} = \frac{\text{Median}(|W_g(s)|)}{0.6745} \quad (13)$$

$$W_g(s) \in \text{subband}(\text{HH}_1)$$

至此,得到了原始图像小波系数的估计 $\hat{W}_f(s, J)$,以此进行小波重构,便得到了原始图像的估计

$\{\hat{f}(i, j)\}$ 。

3 评价标准和仿真试验

3.1 评价标准

为了对各种方法的去噪效果进行评价,先给出去噪质量的评价标准。评价方法分为主观评价和客观评价。

主观评价有两种:一是作为观察者的主观评价,简单有效;二是模糊综合评判的方法,它往往依赖于专家经验的确定。

常见的客观的评价标准有最小均方误差(minimizes the mean squared error, MSE)、信噪比(signal-to-noise ratio, SNR)和峰值信噪比(peak signal-to-noise ratio, PSNR)。其定义(设图像尺寸为 $M \times N$)如下:

$$\text{MSE} = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N (\hat{f}(i, j) - f(i, j))^2 \quad (14)$$

$$\text{SNR} = 10 \lg \left(\frac{\sigma_f^2}{\text{MSE}} \right) \quad (15)$$

$$\text{PSNR} = 10 \lg \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right) \quad (16)$$

式中, \hat{f} 为重建图像, f 为原图像未含噪声, $\sigma_f^2 = \frac{1}{M \times N} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N f^2(i, j)$ 。

这里采用 MSE 和 PSNR 作为客观评价指标。

对于加噪图像分别先用以下方法进行去噪:Visu Shrink、Sure Shrink、Bayes Shrink 以及本文方法,以比较它们的去噪效果。

3.2 与常用的阈值萎缩去噪方法的比较

使用 Daubechies 8 正交小波,分别对 woman 和 facets 含噪图片进行 3 层小波分解,维纳滤波选 5×5 的邻域,用软阈值函数处理小波系数,得出结果如图 1、图 2 所示。

由表 1 可见,本文方法去噪效果比其他 3 种方法要好。由图 1 和图 2 可以看出,本文方法从主观视觉感受上来说,效果也是很好的。当然,这并不是说这种方法总是优于其他方法,这与图像特点(如纹理特征和信噪比)和小波基的选取等因素有关。由于维纳滤波器根据图像小波变换不同尺度噪声大小和局部性质进行自适应去噪,因而比常用的方法更多地保留了图像的细节信息,效果很好。

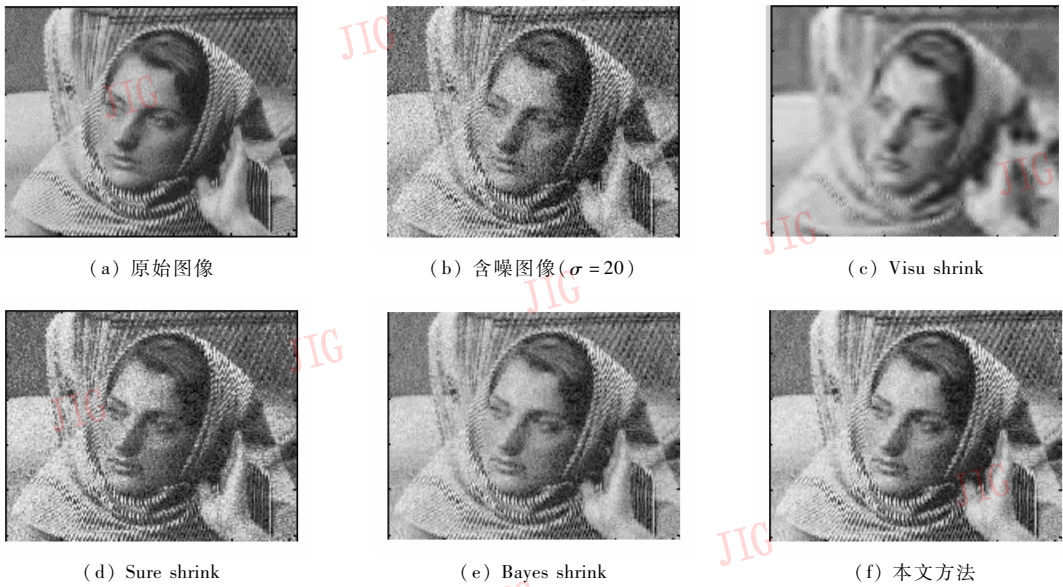


图 1 用 Daubechies 8 小波对 woman 含噪图像进行去噪

Fig. 1 Noisy woman image and its denoised image by some denoising methods using Daubechies

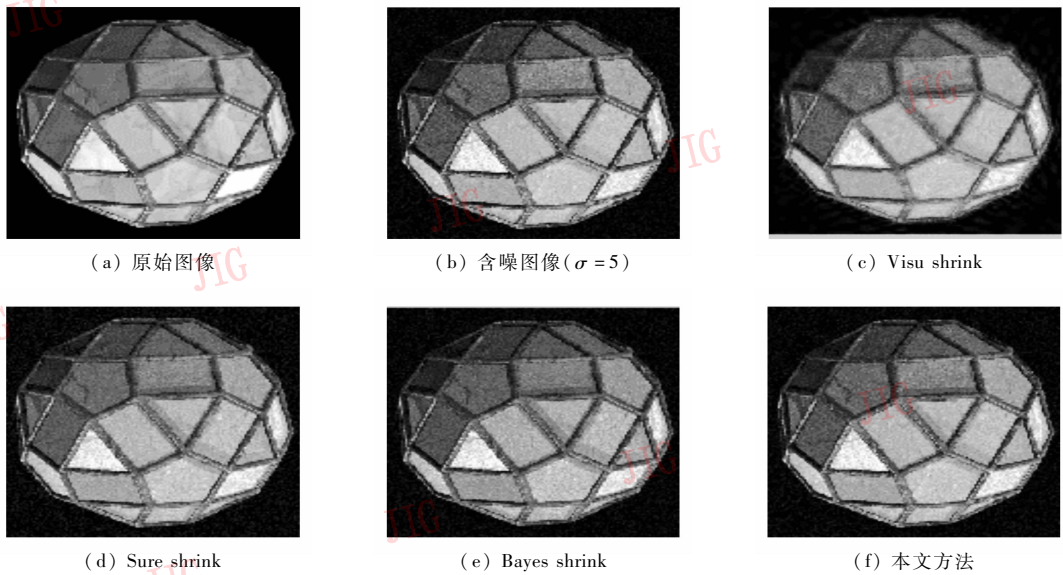


图 2 用 Daubechies 8 小波对 facets 含噪图像进行去噪

Fig. 2 Noisy facets image and its denoised image by some denoising methods using Daubechies 8

表 1 对含噪图像 ($\sigma = 20$) 去噪后的 MSE 和 PSNR
Tab. 1 MSE and PSNR obtained by different methods on noisy image

图像	Visu Shrink	Sure Shrink	Bayes Shrink	本文方法
woman				
MSE	580.2975	383.5114	327.0945	204.7699
PSNR (dB)	20.4943	22.2960	22.9841	25.0181
facets				
MSE	166.2312	21.8884	23.1284	204.7699
PSNR (dB)	25.9237	32.7287	34.4893	35.8306

3.3 与维纳滤波去噪性能的比较

用本文方法和维纳滤波器分别对 woman 图像 ($\sigma = 20$) 进行去噪,并且分别采用不同大小的滤波器窗口 ($3 \times 3, 5 \times 5, 7 \times 7, 9 \times 9, 11 \times 11$ 和 13×13)。这里如图 3、图 4 所示。只给出利用 $3 \times 3, 7 \times 7, 11 \times 11$ 窗去噪后的图像。

由表 2 可以看出,选用不同的窗口,去噪效果是不一样的(存在最优窗口)。把不同窗口 ($n = 3, 5, \dots, 101$) 对 woman 图像去噪的性能进行了比较,如图 5(横



图 3 采用不同窗口用本文方法对 woman 图像 ($\sigma = 20$) 去噪

Fig. 3 Denoising of noisy woman image ($\sigma = 20$) by the proposed method using different windows



图 4 用维纳滤波器对 woman 图像 ($\sigma = 20$) 去噪

Fig. 4 Denoising of noisy woman image ($\sigma = 20$) by wiener filter using different windows

表 2 对含噪 ($\sigma = 20$) woman 图像去噪比较

Tab. 2 MSE and PSNR obtained by the proposed method on noisy woman image ($\sigma = 20$)

方法		窗口大小					
		3 × 3	5 × 5	7 × 7	9 × 9	11 × 11	13 × 13
本文方法	MSE	226.7054	204.7699	200.1164	199.1407	198.9942	199.6829
	PSNR (dB)	24.5762	25.0181	25.1108	25.1392	25.1424	25.1274
维纳滤波器	MSE	266.1186	333.9204	364.1194	405.7252	446.4989	486.6406
	PSNR (dB)	23.8801	22.8944	22.5184	22.0485	21.6326	21.2587

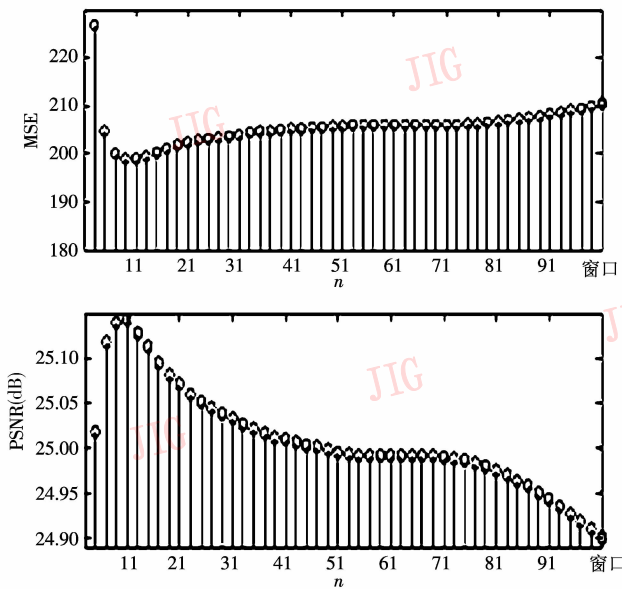


图 5 不同窗口对 woman 图像 ($\sigma = 20$) 去噪的 MSE 和 PSNR

Fig. 5 MSE and PSNR obtained by different windows on noisy woman image ($\sigma = 20$)

坐标用 n 表示窗口大小为 $n \times n$ 所示,从图中可以看出,从 $n = 3$ 到 $n = 11$,去噪性能随窗口尺寸的变化而有较大的变化,而当 $n > 11$ 后,去噪性能逐渐变坏。当 $n = 11$ 时, MSE 值最小,而 PSNR 值最大,所以对于本文方法选用 11×11 的窗口最好,对于维纳滤波器方法, 3×3 窗口的去噪效果最好,随着窗口的变大,去噪效果变坏。从表 2 不难看出,本文方法比单独的维纳滤波效果要好许多,而且各指标因窗口的改变而变化的幅度比较小(从图 3 可以看到,各个窗口的去噪效果分别并不是很大,而图 4 则表明,窗口的不同,维纳滤波效果的差别是非常明显的)。

4 结 论

(1) 基于小波变换和维纳滤波的图像去噪效果优良。和传统的阈值去噪相比较,这种方法能改善 PSNR,减小 MSE,可以提高系统检测和识别的性能,为后续图像处理打好基础。

(2) 没有给出选择邻域窗口大小的标准。对于一幅具体的图像,通过实验不难确定最优窗口。

(3) 鉴于小波理论的发展,可以把维纳滤波去噪(空间域方法)与脊波、曲波、多小波等去噪(小波

域方法)结合起来,必有更优良的算法产生。

参考文献 (References)

- 1 Vidakovic B, Lozoya C B. On time-dependent wavelet denoising[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, **46**(9): 2549 ~ 2551.
- 2 Donoho D L. De-noising by soft-Thresholding[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, **41**(3): 613 ~ 627.
- 3 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage[J]. Biometrika, 1994, **81**(12): 425 ~ 455.
- 4 Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. Journal of the American Statistical Association, 1995, **90**(432): 1200 ~ 1224.
- 5 Chang S G, Yu B, Martin V. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, **9**(9): 1532 ~ 1546.
- 6 Chen Xin, Schmitt F. Surface modeling of range data by constrained triangulation[J]. Computer Aided Design, 1994, **26**(8): 632 ~ 645.
- 7 Mallat S, Hwang W L. Singularity detection and processing with Wavelets[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1992, **38**(2): 617 ~ 643.
- 8 Mihcak M K, Kozintsev I, Ramchandran K, et al. Low-complexity image denoising based on statistical modeling of wavelet coefficients [J]. IEEE Signal Processing Letters, 1999, **6**(12): 300 ~ 303.