

# 一种基于 Grengreat 公式的锥束 CT 重建算法研究

张东平 张定华 张丰收

(西北工业大学现代设计与集成制造技术教育部重点实验室,西安 710072)

**摘要** 基于单圆轨迹的 Feldkamp(FDK)重建算法只有在小锥角条件下才能取得较好重建效果。随着锥角增大,图像质量迅速下降。因此在实际应用中受到一定限制。在分析了物体 Radon 数据与单圆扫描获得的 Radon 数据间的关系后,结合空间可变滤波反投影重建算法(SV\_FBP),提出了一种基于 Grengreat 公式的叠加算法。该重建算法由两部分重建结果叠加而成,第1部分结果首先采用 FDK 算法通过对单圆扫描的投影数据进行重建来获得;然后采用外推方法获得缺失的数据,并利用 SV\_FBP 进行重建得到第2部分结果;最后将两部分结果进行叠加。实验结果表明,该算法不仅有效地抑制了 FDK 算法重建的伪影,而且使锥角的使用范围比 FDK 算法提高了 3~4 倍。这种新的叠加重建算法在大长物体的重建中,具有重要的理论和应用价值。

**关键词** 单圆轨迹 FDK 算法 空间可变滤波反投影重建算法 叠加算法

中图分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)09-1649-06

## A Cone-beam CT Reconstruction Algorithm Based on Grangeat's Formula

ZHANG Dong-ping, ZHANG Ding-hua, ZHANG Feng-shou

(The Key Laboratory of Contemporary Design and Integrated Manufacturing, Ministry of Education,  
Northwestern Polytechnical University, Xi' An 710072)

**Abstract** FDK algorithm based on single circular orbit can only be used when the cone angle is small. The images reconstructed by Feldkamp algorithm become blurred and distorted when the cone angle increases. As a result there is a limitation for practical application. After the relationship between the Radon transform of the object and the Radon data acquired by the scanning of the single circular orbit is analyzed in the paper and the superposing algorithm is presented based on Grangeat's formula according to the space-variant filtered backprojection (SV\_FBP). The first sub-result is calculated by applying the FDK algorithm to the projection data acquired by a single circular orbit scan. The second sub-result is a correction received by applying SV\_FBP algorithm to the missing Radon data acquired by extrapolation. The final result is the sum of the two sub-results. The result demonstrates the algorithm is a valid method to reduce artifacts of the images reconstructed by FDK algorithm, and the applicable cone angle range can be 3 to 4 times larger than that of the FDK algorithm. This new superposing method will possess important theoretical and application value in the fields of big and long object reconstruction.

**Keywords** single circular orbit, FDK algorithm, space-variant filtered backprojection algorithm, superposing algorithm

## 1 引言

在计算机层析成像(CT)技术日趋成熟的背景

下,关于3维物体重建方法的研究取得了突破性的进展,3维图像重建的理论体系也逐步确立起来。其中,FDK算法<sup>[1]</sup>是一种基于圆轨迹扫描的近似重建算法,其是由 Feldkamp 等人于 1984 年提

基金项目:国家自然科学基金项目(50375126);航空科学基金项目(04153069)

收稿日期:2006-07-18;改回日期:2007-03-15

第一作者简介:张东平(1980~),男。现为西北工业大学硕士研究生。主要进行工业 CT 无损检测与锥束 CT 重建算法的研究,已发表论文两篇。E-mail:zdp2801395@sina.com

出的。FDK 算法实际上是 2 维扇束滤波反投影算法的 3 维扩展。该方法具有简单、有效、快速等特点,其在小锥角情况下(锥角小于  $\pm 4^\circ$ )可取得较好的重建效果。许多实用的 CT 产品采用的就是这种方法。然而,由于该方法操作在不完全的投影数据上,它本身又是一种近似的重建方法,因此只有对源轨迹所在的平面进行的重建才是完全正确的。随着锥角的增大,由于图像的质量急剧下降,说明 FDK 算法的重建效果不佳,因此为了提高图像的重建质量和减少重建误差,许多改进的方法,如 G-FDK, T-FDK<sup>[2]</sup>, CC-FDK<sup>[3]</sup> 等相继被提出,经验证,这些方法可提高重建图像的质量,取得了较好的效果。

本文提出了一种基于 Gregeat 公式<sup>[4]</sup>的叠加重建算法,以提高 FDK 算法在中大锥角扫描重建时的图像质量。该算法先利用外推的方法获得 Radon 空间阴影区(缺失)数据;然后通过对阴影区的数据进行滤波反投影重建来获得阴影区数据的重建切片;最后将 FDK 重建结果与阴影区数据重建结果进行叠加,即得到最终的切片图像。仿真实验表明,该算法能较好地抑制 FDK 算法在中大锥角扫描重建时所产生的伪影,从而提高了重建图像的质量。

## 2 Radon 变换与锥束投影的关系

Radon 变换及逆变换是奥地利数学家 Radon 于 1917 年提出。2 维 Radon 变换就是直线积分,每条直线的积分对应于 Radon 空间的一个点。3 维 Radon 变换(见图 1)是 2 维 Radon 变换的推广,其每个平面的积分对应于 Radon 空间的一个点。Radon 变换具体表述如下:

$$Rf(\rho, \mathbf{n}) = \iint_{x \in P(\rho, \mathbf{n})} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1)$$

其中,  $f(\mathbf{x})$  是物体各点的密度函数;  $P(\rho, \mathbf{n})$  是由  $\rho, \mathbf{n}$  所确定的平面,  $\rho$  是原点到平面的距离,  $\mathbf{n}$  是平面的法向量,  $R$  为 Radon 变换。

Radon 逆变换为

$$f(\mathbf{x}) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\rho^2} \frac{\partial R' f}{\partial \rho}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}, \rho) d\rho \quad (2)$$

其中,积分区域是以原点到  $\mathbf{x}$  的距离为直径的球面。

这样,物体的重建就是先通过非平面源轨迹来获取物体各位置的锥束投影数据,然后根据投影数

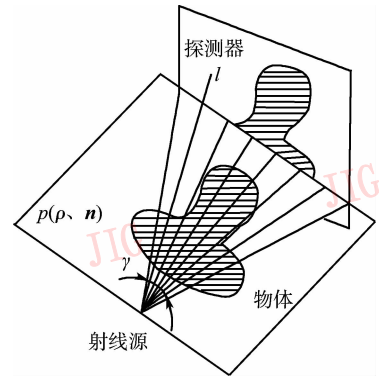


图 1 锥束 CT 的 3 维 Radon 变换

Fig. 1 The 3D Radon Transform of Cone-beam CT

据得到物体 Radon 空间的各点,这样就可以利用 Radon 逆变换公式来精确重建物体。但是由于锥束投影无法直接得到 3 维 Radon 空间的点,因此无法直接用 Radon 逆变换来重建物体。

1987 年, Grangeat 发现锥束投影转换为 Radon 变换的导数是可行的,进而给出了锥束投影和 3 维 Radon 变换的导数的关系,并提出了基于 Radon 变换导数的精确重建方法。后来, Kudo 提出的空间可变滤波反投影(SV\_FBP)重建算法<sup>[5]</sup>和 Axelsson 和 Danielsson 提出的直接傅里叶重建算法(DFM)<sup>[6,7]</sup>都是基于此公式展开研究的。

## 3 SV\_FBP 重建算法

当点源轨迹满足图像重建的完全条件(即如果与物体相交的每个平面都与源轨迹相交,则可精确重建该物体)时, SV\_FBP 重建算法则可以精确重建该物体。单圆源轨迹不满足精确重建的完全条件,而只有非平面源轨迹,如直线+圆、垂直双圆等扫描轨迹才满足完全条件<sup>[8]</sup>。

SV\_FBP 算法是采用与 FDK 算法相似的滤波反投影算法,但该算法在滤波部分与 FDK 算法不同,即 FDK 算法是采用 1 维斜坡滤波,而 SV\_FBP 算法则采用一系列加权、2 维 Radon 变换、导数滤波、2 维反投影等的 2 维可变滤波处理,最后通过 3 维加权反投影重建出断层图像。具体步骤如下(如图 2 所示):

(1) 获得投影数据后,再对每幅图像乘以与 FDK 算法相同的加权因子;

(2) 采用前向投影算法对每幅 2 维投影图像进行 Radon 变换;

(3) 对 Radon 空间的数据与空域中的导数滤波器沿径向方向进行卷积,以完成导数滤波,对投影的 2 维 Radon 变换的数据进行求导也就是对物体的 3 维 Radon 变换进行求导 (Grangeat 公式);

(4) 对数据冗余进行处理,乘以加权函数  $M(\zeta)$ ,而  $M(\zeta)$  是由源轨迹确定的,每个 Radon 空间的点  $\zeta$  代表一个与源轨迹相交,且与物体相交的

平面的面积分。若用  $m(\zeta)$  表示积分平面与源轨迹相交点的个数,则  $M(\zeta)$  表示对  $1/m(\zeta)$  进行平滑处理;

(5) 通过 2 维反投影来得到滤波后的探测器数据;

(6) 在轨迹的切线方向完成第 2 次导数滤波;

(7) 通过 3 维加权反投影得到待重建的物体。

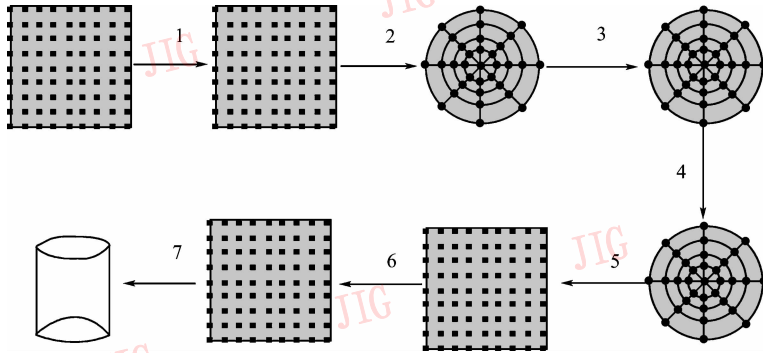


图 2 空间可变滤波反投影重建算法流程图

Fig. 2 The space-variant filtered backprojection algorithm

## 4 基于 Gregeat 公式叠加重建算法

### 4.1 重建算法

单圆源轨迹扫描获得的投影数据不能精确重建物体,这是由于部分与物体相交的平面无法与源轨迹相交,因此不满足完全条件。对于这些缺失的数

据可先采用插值与外推方法来补全,然后再进行重建。本文所采用的算法是将 FDK 算法重建的结果与 SV\_FBP 算法重建的结果进行叠加,以提高重建图像的质量。阴影区外的数据由单圆源轨迹扫描获得,可采用 FDK 算法进行重建;而阴影区内的缺失数据则采用空间可变滤波反投影算法重建。重建流程如图 3 所示,即首先将锥束投影数据近似假设为

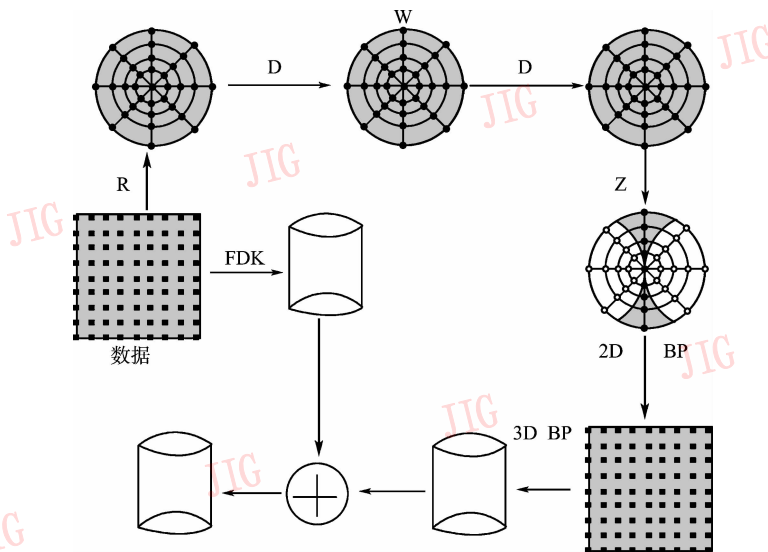


图 3 基于 Gregeat 公式的重建算法流程图 (R 代表 Radon 变换, D 代表导数滤波, W 代表加权处理, Z 代表找出阴影区, 2D BP 代表 2 维平行束反投影, 3D BP 代表 3 维平行束反投影)

Fig. 3 The reconstruction algorithm based on Gregeat's formula (R:Radon Transform, D:Derivative filtering, W: Weighting, Z:Zero outside shadow zone, 2D BP:2D parallel backprojection, 3D BP:3D parallel backprojection)

平行束投影数据,同时对平行束投影数据采用 2 维 Radon 变换来得到 Radon 空间的数据点,此时, Radon 空间的数据是完全的;然后通过进行导数滤波、数据冗余加权处理及导数滤波运算来得到经过两次微分的 Radon 空间点,由于假设的平行束投影数据仅用来外推阴影区内的缺失数据,因此将阴影区外的数据全部置零后,再进行 2 维平行束反投影即可得到滤波后的平行束投影;接着通过对滤波后的投影数据进行 3 维平行束反投影计算来得到空间可变滤波反投影算法重建的结果;最后将两部分重建结果进行叠加,即得到最终的重建结果。

### 4.2 叠加算法关键技术的研究

#### 4.2.1 数据冗余的处理

满足完全条件的非平面源轨迹的冗余度可近似地由所有与重建物体相交的平面与源轨迹相交点个数的平均数来加权处理。平均数越大,冗余度越大。在叠加重建算法中,由于可将锥束投影假设为平行束投影,而锥束投影则是在一个完整的圆周上扫描获得的,因此平行束投影的点源  $\Phi(\lambda)$  和与其对称的点源  $\Phi(\hat{\lambda})$  的投影完全相同,故冗余函数  $M_\lambda(\mathbf{n}) \equiv 2$ 。FDK 算法在冗余数据加权处理时也取  $M_\lambda(\mathbf{n}) \equiv 2$  (权因子为 0.5),然而由于在中心平面这种处理才是完全正确的,离中心平面越远,误差就会越大,因此也会使重建的伪影加剧。

#### 4.2.2 阴影区域的确定

如果物体  $f(\mathbf{x})$  在一个以原点为中心的球形支撑域中,则由物体的 Radon 变换形成的 Radon 空间也是以原点为中心的同样大小的球。采用单圆轨迹扫描方式不能够获得 Radon 空间的全部数据,只能获得圆环面内所包含的数据。由于圆环面无法完全包含物体的 Radon 空间,因此不满足精确重建的完全条件。这些与物体相交,且与单圆不相交的平面就构成了物体 Radon 空间的阴影区(图 4)。从图 4 中可以看出,当扫描半径较大,锥角较小时,由于阴影区域很小,因此可以将这些缺失数据忽略,直接进行重建,也可得到较好的近似效果。当扫描半径减小,锥角增大时,由于 Radon 空间缺失的数据增加,因此图像重建质量就迅速下降。

为了精确确定阴影区的大小,假设平面  $P$  用原点到平面的法矢  $\mathbf{n}(\theta, \varphi)$  和原点到平面的距离  $\rho$  来

表示。

$$\mathbf{n}(\theta, \varphi) = \{ \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta \} \quad (3)$$

在  $xoy$  平面内单圆源轨迹的半径为  $r_1$ 。向过  $Z$  轴和向量  $\mathbf{n}$  所确定的平面进行投影,即得到如图 5 所示的投影面。此时,单圆就投影成  $\Phi_1$  与  $\Phi_2$  之间的一段直线,而平面  $P$  则投影成一条直线。

从图 5 可以看出,与物体相交,且与单圆相交的平面集合为

$$S = \{ (\mathbf{n}(\theta, \varphi), \rho) \mid 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < \pi, |\rho| \leq r_1 \sin\theta \} \quad (4)$$

与物体相交,但与单圆不相交的平面集合为

$$\hat{S} = \{ (\mathbf{n}(\theta, \varphi), \rho) \mid 0 < \theta < \pi, 0 \leq \varphi < \pi, |r_1 \sin\theta| < \rho \leq r_2 \} \quad (5)$$

由于源轨迹及物体的 Radon 空间沿  $Z$  轴具有旋转对称性,因此,当  $\varphi$  从 0 到  $\pi$  变化时,集合  $S$  是一个圆环体。从物体的 Radon 空间中减去圆环体,就得到了阴影区  $\hat{S}$  (如图 4 所示)。

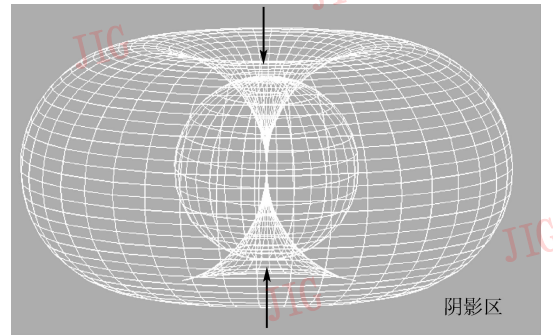


图 4 Radon 空间阴影区示意图

Fig. 4 The shadow zone of the Radon space

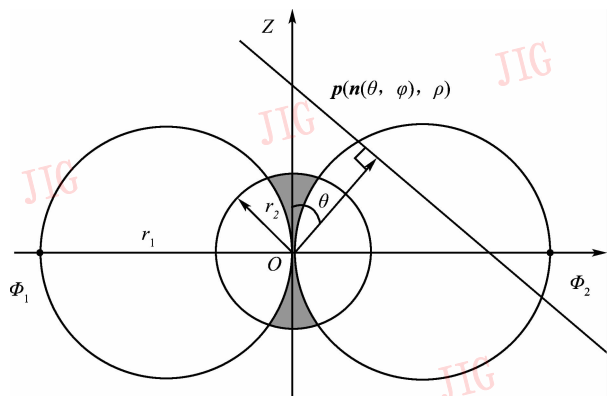


图 5 单圆源轨迹下的剖面图

Fig. 5 The section of the single circular orbit

### 5 实验与分析

为了验证本文提出的叠加重建算法的效果,通过设计 3 维头模型与圆盘模型对算法进行了重建试验。3 维头模型由不同材质的 9 个椭球体构成(如图 6 所示)。扫描源轨迹的半径为 171.67mm,锥角为  $\pm 20^\circ$ 。圆盘模型由 7 个相同材质的椭圆盘构成。扫描源轨迹半径为 244.58mm,锥角为  $\pm 15^\circ$ 。以上模型 1 的投影图像为 256 幅,投影图像大小为  $256 \times 256$ pixels,像素大小为 0.512mm。实验时,采用仿真方法产生投影数据后,先采用 FDK 算法重建,再采用 SV\_FBP 算法对重建图像进行校正。从图 7、图 8 可以看出,FDK 算法在中心平面附近重建图像的质量较好,而离中心平面越远,图像伪影越大,图像质量越差。这主要是由于锥角较大、致使阴影区缺失的数据较多而造成的。由于叠加算法能够较好地补偿 Radon 空间不足的数据,因此能有效地

抑制 FDK 算法在中大锥角扫描重建时产生的伪影。叠加算法采用了一系列的 2 维可变滤波,特别是对于投影图像的 2 维 Radon 变换与 2 维反投影变换,由于引入了较大的计算量,从而使重建算法的效率降低(见表 1)。但随着硬件设备的快速发展,可采用单指令多数据、分布式计算等并行加速方法,相信会提高重建算法的效率。

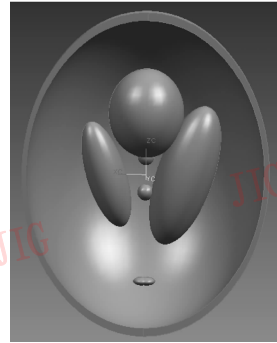


图 6 3 维头模型

Fig. 6 3D model of the phantom

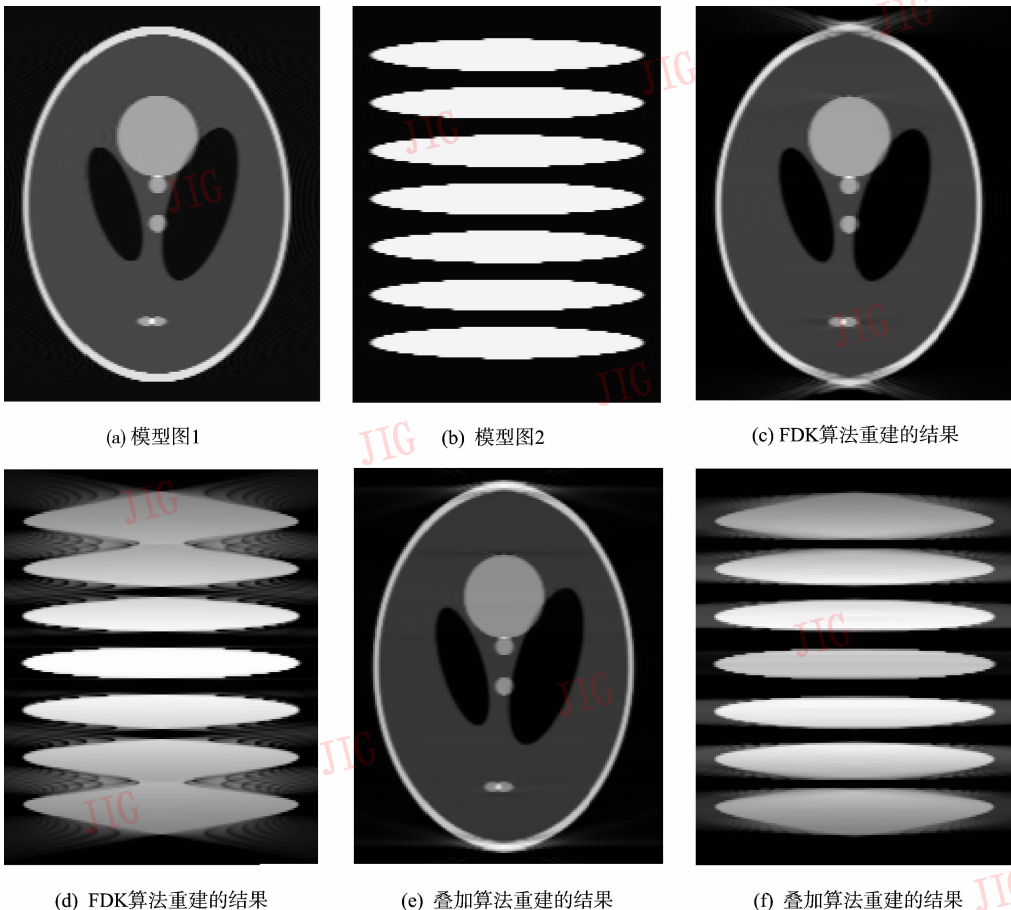


图 7 不同算法重建图像的质量比较

Fig. 7 The comparison of the images

表 1 算法的时间和误差

Tab. 1 Time costs of algorithm

算法	运算时间 (min)		
	滤波	反投影	总时间
FDK 算法	0.38	8.5	8.875
SV_FBP 算法	10.3	7.2	17.5
叠加算法	10.8	16.0	26.8

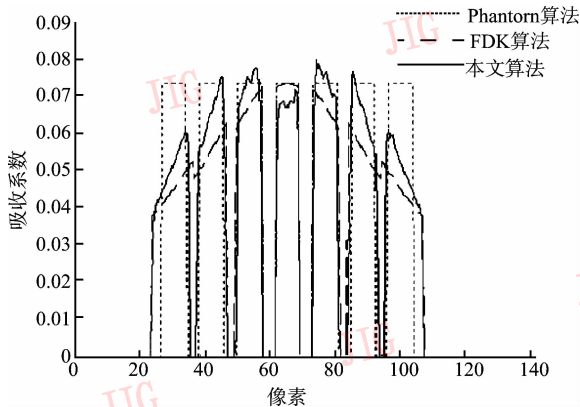
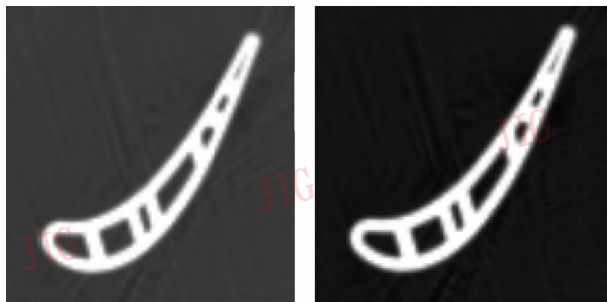


图 8 圆盘模型及不同重建算法得到的吸收系数曲线

Fig. 8 Intensity profiles of phantom and slices of disk model

图 9 是采用 NPU-CBVCT 扫描装置对航空发动机空心涡轮叶片进行扫描(扫描锥角为  $\pm 15^\circ$ ), 然后分别采用 FDK 算法和叠加算法重建结果的对比。通过实际工程对比, 由于本算法有效抑制了图像的伪影, 从而提高了图像重建的质量。



(a) FDK

(b) 叠加算法

图 9 FDK 算法与叠加算法重建图像的对比

Fig. 9 Comparison between reconstruction slice by FDK algorithm and reconstruction slice by superposing algorithm

## 6 结 论

本文根据锥束投影与物体 Radon 变换的导数关系, 在分析了单圆扫描获得 Radon 空间的数据与物体 Radon 空间的数据关系后, 提出了一种叠加重建算法。该算法将 FDK 算法和空间可变滤波反投影重建算法进行了综合, 并将两者的重建结果进行叠加, 以抑制 FDK 算法在中大锥角扫描重建时所产生的伪影。仿真实验与实际工程用例表明, 该算法可有效地抑制重建伪影和提高重建图像的质量。由于该算法无需增加其他扫描轨迹, 因此扫描机构简单。由于其在获得一幅投影图像后就可以进行滤波重建, 因此扫描与重建可同时进行, 这样就可有效提高扫描重建的效率。

## 参考文献 (References)

- 1 Feldkamp L A, Davis L C, Kress J W. Practical cone-beam algorithm [J]. Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision, 1984, 1, 612 ~ 619.
- 2 Grass M. 3-D cone-beam CT reconstruction for circular trajectories [J]. Physical Medical Biology, 2000, 45(1): 329 ~ 347.
- 3 Zeng Kai, Chen Zhi-qiang, Zhang Li, et al. Cone beam reconstruction algorithm based on two concentric circles [J]. Journal Tsinghua University (Science & Technology), 2004, 44(6): 725 ~ 727. [曾凯, 陈志强, 张丽等. 基于同心圆轨道的锥形束 CT 重建算法 [J]. 清华大学学报(自然科学版), 2004, 44(6): 725 ~ 727.]
- 4 Grangeat P. Mathematical framework of cone-beam 3-D reconstruction via the first derivative of the radon transform [A]. In: G. T. Herman, A. K. Louis, F. Natterer, Eds. Mathematical Methods in Tomography [C], New York: Springer-Verlag, 1991: 66 ~ 97.
- 5 Kudo H, Saito T. Derivation and implementation of a cone-beam reconstruction algorithm for nonplanar orbits [J]. IEEE Transactions Medical Imaging, 1994, 13(1): 196 ~ 211.
- 6 Axelsson C, Danielsson P E. Three-dimensional reconstruction from cone-beam data in  $O(N^3 \log N)$  time [J]. Physical Medical Biology, 1994, 39(1): 477 ~ 491.
- 7 Axelsson-Jacobson C, Defrise M, Danielsson P et al. 3D-reconstruction using cone-beam backprojection, the Radon transform and linogram techniques [J]. Physical Medical Biology, 1995, 40(3): 1321 ~ 1325.
- 8 Smith B D. Image reconstruction from cone-beam projection: necessary and sufficient conditions and reconstruction methods [J]. IEEE Transactions on Medical Imaging, 1985, 4(1): 14 ~ 25.