

# 纯2维 Coifman 小波的提升格式及其应用

徐妮妮<sup>1)</sup> 侯正信<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(天津工业大学信息学院,天津 300160) <sup>2)</sup>(天津大学信息学院,天津 300072)

**摘要** 为了降低纯2维 Coifman 小波分解和重构的运算量,提出了一种纯2维 Coifman 小波的提升格式。由于纯2维 Coifman 小波在完全重建性、消失矩、滤波器钻石型频带以及二进分母系数等方面具有突出的优点,使其在图像压缩编码中具有相当的竞争性。该提升格式既适用于图像的有损压缩,只要稍改变归一化系数,又适用于图像的无损压缩,同时还保持了1维小波提升格式在运算量和边界处理等方面所具有的优势,纯2维 Coifman 小波提升格式中的预测算子和更新算子所具有的特性为直接构造纯2维小波滤波器组提供了理论指导。仿真试验显示,纯2维 Coifman 小波滤波器组比用相同1维原型滤波器组构造的纯2维小波滤波器组压缩效果好。

**关键词** 纯2维 Coifman 小波滤波器组 提升格式 图像编码

中图法分类号:TN919.81 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)08-1396-06

## The Lifting Scheme of True 2D Coifman Wavelet and its Application

XU Ni-ni<sup>1)</sup>, HOU Zheng-xin<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Communication and Electronic Information Engineering, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300160)

<sup>2)</sup>(School of Electronic Information Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072)

**Abstract** In this paper we propose the lifting scheme of true 2D coifman wavelet to reduce half computation compared with it directly be used to decomposition and reconstruction 2D data. True 2D coifman wavelet has many favourable properties such as perfect reconstruction, vanishing moments, diamond frequency response and dyadic fractions etc., this makes this method competitive in image compression property preservation. Simply by changing normalizing factor, this lifting scheme can be used for lossy and lossless image compression and at the same time it keeps advantages of 1D wavelet lifting scheme at computation and border extension aspects. The characteristics of prediction and update operators in true 2D coifman wavelet lifting scheme provide guidance for constructing true 2D wavelet filter banks. Simulation results show that true 2D coifman wavelet filter bank has nicer compression property than another 2D wavelet filter bank constructed by the same 1D prototype wavelet filter bank.

**Keywords** true 2D coifman wavelet filter bank, lifting scheme, image coding

## 1 引言

近年来,小波变换在图像编码、去噪、奇异性检测等信号处理领域取得了引人注目的成果,尤其是 Daubechies 9/7, 5/3 小波被新的图像编码国际标准

JPEG2000 所采用,分别用于有损和无损图像编码,更进一步推动了其深入研究。这些成果都是建立在2维信号的1维处理方法上的,即都是通过张量积来构造可分离2维小波<sup>[1]</sup>。虽然可分离2维小波保持了1维小波在紧支撑、线性相位、消失矩等方面的优点,但却导致了一个严重的缺陷,即过于强调2维

基金项目:国家自然科学基金项目(60602036);天津市教委基金项目(20051209)

收稿日期:2006-11-14;改回日期:2007-05-08

第一作者简介:徐妮妮(1974~),女。讲师。2005年获天津大学博士学位。主要研究方向为滤波器组、数字图像处理与小波分析。

E-mail: xunini@eyou.com

信号在水平和垂直方向上的重要性,这与人类视觉特性相违背,因此处理 2 维信号用纯 2 维方法更为合理。

文献[2]、[3]对 1 维小波滤波器组用 McClellan 变换<sup>[4]</sup>构造了纯 2 维五株采样完全重建小波滤波器组,其中,纯 2 维 Coifman 小波滤波器组更加引人注目,因为它既保持了 1 维 Coifman 原形滤波器组<sup>[5,6]</sup>在完全重建性、消失矩、二进分母系数、高通分析滤波器近一半系数为零等所有的优点,又可实现纯 2 维小波变换,除了归一化因子,使得纯 2 维 Coifman 小波滤波器组在保持高压缩率的同时可完全避免乘法运算。

Sweldens 和 Daubechies 提出的 1 维小波提升格式<sup>[7]</sup>可以减少小波分解与重构的运算量,并可实现从整数到整数的变换,实际上提升格式本身就是一种构造 1 维小波滤波器组的新方法。本文的目的就是充分利用提升格式的优点来构造纯 2 维 Coifman 小波的提升格式,这种格式既可用于图像的基于纯 2 维小波变换的有损编码,也可以用于无损编码。研究其预测和更新算子的特征,还可为直接构造纯 2 维小波滤波器组提供理论指导。

## 2 纯 2 维 Coifman 小波滤波器组

1 维 Coifman 小波滤波器组<sup>[6]</sup>的低通综合滤波器频率响应为

$$H_m(\omega) = \left(\frac{1 + \cos\omega}{2}\right)^{m/2} \times \sum_{l=0}^{m/2-1} \binom{m/2-1+l}{l} \left(\frac{1 - \cos\omega}{2}\right)^l$$

$m$  为偶数 (1)

$H_m(\omega)$  为低通半带滤波器。当  $m, m'$  都为偶数,且  $m \geq m'$  时,低通分析滤波器的频率响应为

$$\tilde{H}_{m,m'}(\omega) = 2H_{m'}(\omega) + H_m(\omega) - 2H_{m'}(\omega)H_m(\omega) \quad (2)$$

$H_m(\omega)$  和  $\tilde{H}_{m,m'}(\omega)$  都具有零相位特性,其对应小波的消失矩分别为  $m$  和  $m'$ 。当  $m < m'$  时,  $\tilde{H}_{m,m'}(\omega)$  虽然唯一存在,但函数表达形式复杂,因此在构造纯 2 维 Coifman 小波滤波器组时不予考虑。

1 维完全重建 Coifman 小波滤波器组具有下述优越性:

(1) 二进分数滤波器系数,可以使小波分解和

重构避免乘法运算;

(2) 良好的压缩特性,与 Daubechies 9/7, 5/3 小波相比,有相当的竞争性;

(3) 因为与低通综合滤波器对应的尺度函数是内插函数,所以它可使得初始化小波系数对采样信号有高精度的逼近特性;

(4) 低通综合滤波器有近一半的系数为零,可以减少小波变换的运算量。

纯 2 维 Coifman 小波滤波器组<sup>[3]</sup>的低通综合滤波器是由 1 维 Coifman 小波滤波器组的低通综合滤波器的 McClellan 变换生成,其频率响应为

$$H_m(\omega) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{m/2} 2h(2k-1)T_{2k-1} \times \left[\frac{(\cos\omega_1 + \cos\omega_2)}{2}\right] \quad (3)$$

式中,  $T_n[\cdot]$  表示  $n$  阶 Chebyshev 多项式<sup>[5]</sup>,  $h(2k-1)$  是消失矩为  $m$  的 1 维 Coifman 小波低通综合滤波器系数,  $\omega = [\omega_1 \ \omega_2]^T$ 。纯 2 维 Coifman 小波低通分析滤波器  $\tilde{H}_{m,m'}(\omega)$  由相同的方法生成。

纯 2 维完全重建 Coifman 小波滤波器组高通滤波器  $g_m(\mathbf{n})$  和  $\tilde{g}_{m,m'}(\mathbf{n})$  ( $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2]^T$ ) 的频率响应满足

$$G_m(\omega) = e^{-j\omega_1} \tilde{H}_{m,m'}^*(\omega + \pi) \quad (4)$$

$$\tilde{G}_{m,m'}(\omega) = e^{-j\omega_1} H_m^*(\omega + \pi) \quad (5)$$

上标 ‘\*’ 表示共轭。

纯 2 维完全重建 Coifman 小波滤波器组如图 1 所示,图中  $h_m(\mathbf{n})$  和  $\tilde{h}_{m,m'}(\mathbf{n})$  为  $H_m(\omega)$  和  $\tilde{H}_{m,m'}(\omega)$  的时域单位脉冲响应,  $\downarrow M$  和  $\uparrow M$  为五株抽取和内插因子,  $M = \begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix}$ 。纯 2 维 Coifman 小波滤波器组不仅继承了 1 维原形滤波器组的所有优点,而且它可以直接分解纯 2 维信号。

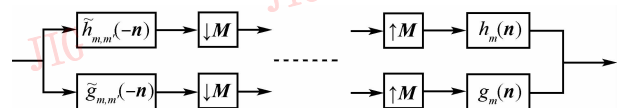


图 1 纯 2 维完全重建 Coifman 小波滤波器组

Fig. 1 Ture 2-D Coifman perfect reconstruction filter bank

纯 2 维 Coifman 4.4 小波 (Coifman  $m, m'$  表示纯 2 维 Coifman 小波的消失矩为  $m$ , 其对偶小波消失矩为  $m'$ ) 滤波器组的低通滤波器系数为

$$h_4(n) = \frac{1}{256} \begin{bmatrix} & & & & -1 & & & & \\ & & & & -3 & 0 & -3 & & \\ & & & -3 & 0 & 39 & 0 & -3 & \\ & & -1 & 0 & 39 & 128 & 39 & 0 & -1 \\ & & & -3 & 0 & 39 & 0 & -3 & \\ & & & & -3 & 0 & -3 & & \\ & & & & & & & & -1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{h}_{4,4}(n) = \frac{1}{2^{15}} \begin{bmatrix} & & & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & & -6 & 0 & \\ & & & & & & & & -15 & 0 & 60 \\ & & & & & & & & -20 & 0 & 294 & -128 & \vdots \\ & & & & & & & & -15 & 0 & 456 & -384 & -993 \\ & & & & & & & & -6 & 0 & 294 & -384 & -2\ 604 & 4\ 992 \\ & & & & & & & & -1 & 0 & 60 & -128 & -993 & 4\ 992 & 26\ 608 \\ & & & & & & & & & & \dots & & & & \end{bmatrix}$$

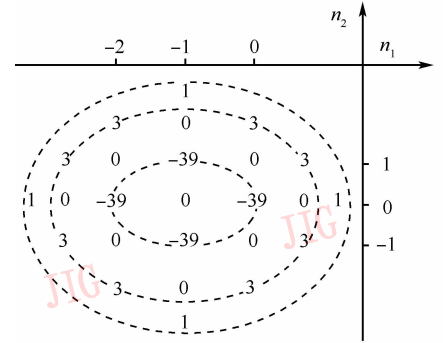
(其他系数可以对称延拓获得)

可见这两个 2 维滤波器的尺寸分别为  $7 \times 7$ ,  $13 \times 13$ , 这对于快速运算是极为不利的,若能用类似于 1 维小波的提升格式实现,则可以减少一半运算量。

### 3 纯 2 维 Coifman 小波提升格式

由纯 2 维 Coifman 小波滤波器组低通分析滤波器  $\tilde{H}_{m,m'}(\omega)$  可知

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{m,m'}(\omega) &= 2H_{m'}(\omega) + H_m(\omega) - 2H_{m'}(\omega)H_m(\omega) \\ &= [ -1 + 2H_{m'}(\omega) ] + [ 1 - 2H_{m'}(\omega) ] H_m(\omega) + 1 \\ &= 1 - [ 1 - 2H_{m'}(\omega) ] [ 1 - H_m(\omega) ] \\ &= 1 - \frac{1}{2} e^{-j\omega_1} [ 1 - 2H_{m'}(\omega) ] \times \{ e^{j\omega_1} + e^{j\omega_1} [ 1 - 2H_{m'}(\omega) ] \} \end{aligned} \quad (6)$$



所有系数 ÷ 128

由式(5)可知,

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{m,m'}^*(\omega) &= e^{j\omega_1} H_m(\omega + \pi) \\ &= \frac{1}{2} \{ e^{j\omega_1} + e^{j\omega_1} [ 1 - 2H_m(\omega) ] \} \end{aligned} \quad (7)$$

令

$$P(\omega) = e^{j\omega_1} [ 1 - 2H_m(\omega) ] \quad (8)$$

$$U(\omega) = -\frac{1}{2} e^{-j\omega_1} [ 1 - 2H_{m'}(\omega) ] \quad (9)$$

称  $P(\omega)$  为频域预测算子,  $U(\omega)$  为频域更新算子,代入式(6)、式(7)可得

$$\tilde{H}_{m,m'}(\omega) = 1 + U(\omega) \{ e^{j\omega_1} + P(\omega) \} \quad (10)$$

$$\tilde{G}_{m,m'}^*(\omega) = \frac{1}{2} \{ e^{j\omega_1} + P(\omega) \} \quad (11)$$

则图 1 所示的滤波器组可以用图 2 所示的提升格式实现。

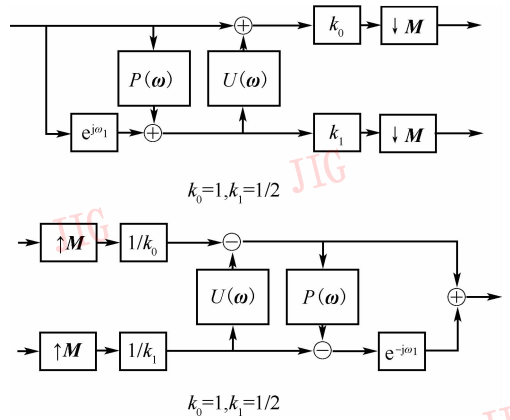
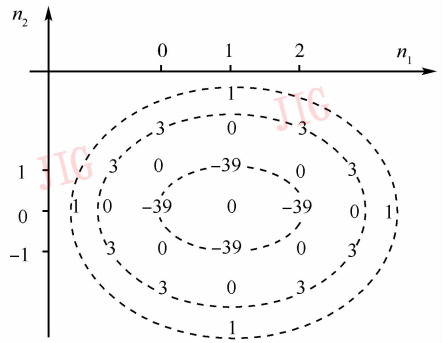


图 2 纯 2 维 Coifman 小波的提升格式  
Fig. 2 Lifting scheme of true 2D Coifman wavelet

令  $p(n), u(n)$  为预测算子和更新算子的时域单位脉冲响应,纯 2 维 Coifman 4.4 小波滤波器组的预测与更新算子  $p(n), u(n)$  的值如图 3 所示。



所有系数 ÷ (-256)

图 3 纯 2 维 Coifman 4.4 小波滤波器组算子  $p(n), u(n)$   
Fig. 3 Operator  $p(n)$  and  $u(n)$  of true 2D Coifman 4.4 filter bank

时域更新算子  $u(n)$  和预测算子  $p(n)$  的特点如下:

(1) 若消失矩  $m = m'$ , 则算子  $u(n)$  完全可以通过算子  $p(n)$  的移位、加权产生; 若消失矩  $m \neq m'$ , 则算子  $u(n)$  可以由同阶次的算子  $p(n)$  的移位、加权产生;

(2) 算子  $u(n)$  和算子  $p(n)$  都具有五株采样特性, 因为二者都可以由纯 2 维半带滤波器  $H_m(\omega)$  产生, 即先把纯 2 维半带滤波器对称中心的系数置零, 然后再进行移位、加权 (权值为 1 或 1/2);

(3) 算子  $u(n)$  和  $p(n)$  关于各自对称中心的距离相同的点的值相同 (如图 3 中各虚线环上的点), 这个性质特别有利于提升算法减小运算量。随着环的增大, 算子  $u(n)$ ,  $p(n)$  环上的值变小;

(4) 若用算子  $\lfloor u(n) + 1/2 \rfloor$  和  $\lfloor p(n) + 1/2 \rfloor$

( $\lfloor \cdot \rfloor$ ) 表示运算结果取整) 替代图 2 中的算子  $u(n)$  和  $p(n)$ , 然后令归一化因子  $k_0 = k_1 = 1$ , 则图 2 的提升结构可以用于无损压缩<sup>[1]</sup>; 若只改变归一化因子, 即令  $k_0 = \sqrt{2}$ ,  $k_1 = 1/\sqrt{2}$ , 则图 2 的提升结构又可以用于有损压缩 (对应的小波基为纯 2 维标准双正交基)。

用图 2 所示的提升格式迭代来实现对图像的第  $L$  级分解与重构, 其流程图如图 4 (a) 和图 4 (b) 所示。图中  $\hat{P}(\omega) = P(M^T \omega)$ ,  $\hat{U}(\omega) = U(M^T \omega)$ ;  $\downarrow M \times M$  表示两次五株抽取, 相当于将  $\hat{\lambda}_L$  后面的抽取器  $\downarrow M$  移到  $\lambda_{L-1}$  和  $\gamma\gamma_{L-1}$  的后面, 这样对提升算法实现是有利的, 也易于实现边界处理。分解时只要计算  $\gamma_{L-1}$ ,  $\lambda_{L-1}$  和  $\gamma\gamma_{L-1}$  抽取后要保留的数据即可, 以达到提升格式降低运算量的目的。

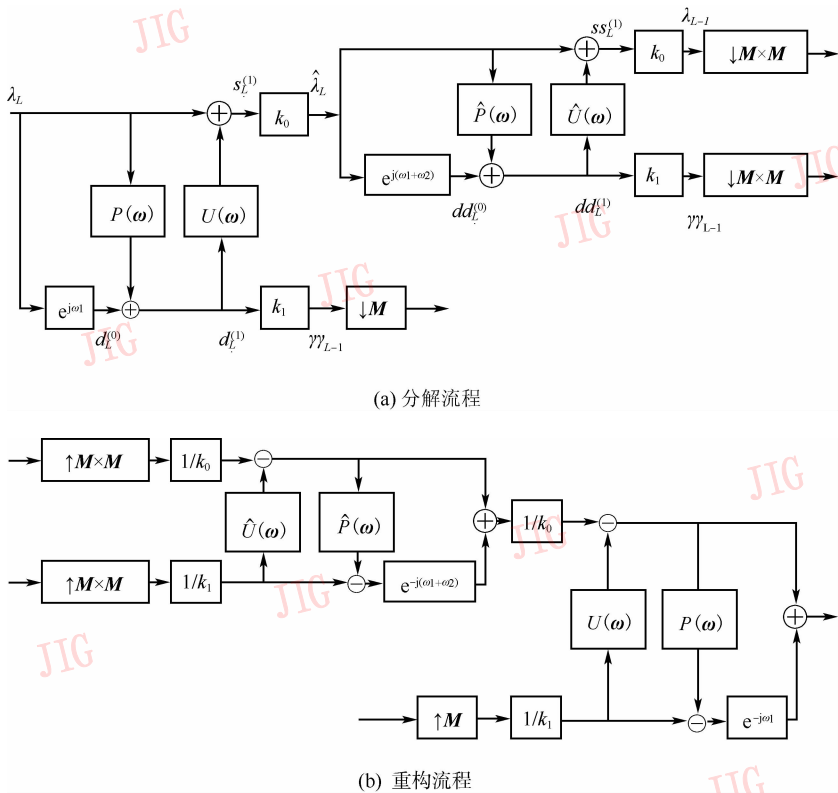


图 4 纯 2 维 Coifman 小波第  $L$  级分解及重构流程图

Fig. 4 The  $L$  level reconstruction diagram of true 2D Coifman wavelet

为了实现提升算法, 算子  $p(n)$  和  $u(n)$  采用如图 5(a) 所示的“环”<sup>[8]</sup>来描述较为方便。环上的数字“ $k$ ”表示以“ $\cdot$ ”为中心的第  $k$  个环 (或者  $ring_k$ ) 及其算子系数在环上的空间位置, 第  $k$  个环上的系数大小相同。例如图 3 中的算子  $p(n)$ ,  $u(n)$  各有

3 环, 其中心坐标分别为  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ 。算子  $\hat{p}(n)$  和  $\hat{u}(n)$  (分别为  $\hat{P}(\omega)$  和  $\hat{U}(\omega)$  的单位脉冲响应) 的“环”如图 5(a) 和图 5 (b) 所示, 其中心坐标分别为  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$ 。这 4 个中心坐标对于由任何纯 2 维半带滤波器  $H(\omega)$  产生的预测算子

和更新算子都成立。

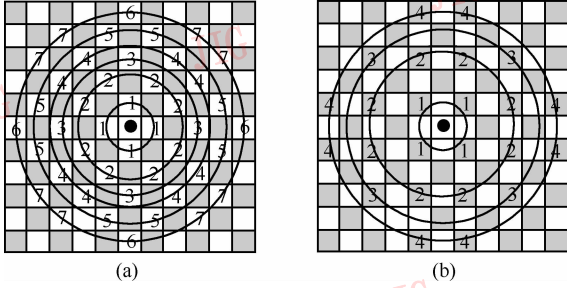


图 5 算子“环”的定义

Fig. 5 Definition of operator ring

提升算法的实现:

分解过程为

$$\begin{aligned}
 s_{L,(i,j)}^{(0)} &= \lambda_{L,(i,j)} \quad (i+j) \text{ 是偶数} \\
 d_{L,(i,j)}^{(0)} &= \lambda_{L,(i,j)} \quad (i+j) \text{ 是奇数} \\
 d_{L,(i,j)}^{(1)} &= d_{L,(i,j)}^{(0)} + \sum_k \alpha_k \times \text{Sum}_{\text{ring}_k[s_{L,(i,j)}^{(0)}]} \\
 s_{L,(i,j)}^{(1)} &= s_{L,(i,j)}^{(0)} + \sum_k \beta_k \times \text{Sum}_{\text{ring}_k[s_{L,(i,j)}^{(0)}]} \\
 \hat{\lambda}_L &= k_0 s_L^{(1)} \\
 \gamma_{L-1} &= k_1 d_L^{(1)} \\
 ss_{L,(i,j)}^{(0)} &= \hat{\lambda}_{L,(i,j)} \quad (i,j \text{ 是偶数}) \\
 dd_{L,(i,j)}^{(0)} &= \hat{\lambda}_{L,(i,j)} \quad (i,j \text{ 是奇数}) \\
 dd_{L,(i,j)}^{(1)} &= dd_{L,(i,j)}^{(0)} + \sum_k \alpha_k \times \text{Sum}_{\text{ring}_k[ss_{L,(i,j)}^{(0)}]} \\
 ss_{L,(i,j)}^{(1)} &= ss_{L,(i,j)}^{(0)} + \sum_k \beta_k \times \text{Sum}_{\text{ring}_k[ss_{L,(i,j)}^{(0)}]} \\
 \lambda_{L-1} &= k_0 ss_L^{(1)} \\
 \gamma\gamma_{L-1} &= k_1 dd_L^{(1)} \quad (12)
 \end{aligned}$$

式中,“ $L$ ”表示第  $L$  级分解;  $\text{Sum}_{\text{ring}_k[s_{L,(i,j)}^{(0)}]}$  表示以  $s_{L,(i,j)}^{(0)}$  的元素  $(i,j)$  为中心的 第  $k$  个环上的所有像素值的和;  $\alpha_k$  表示算子  $p(n)$ ,  $\hat{p}(n)$  的第  $k$  个环上的值,  $\beta_k$  表示算子  $u(n)$ ,  $\hat{u}(n)$  的第  $k$  个环上的值, 其他表达含义类同, 各符号表示的信号如图 4 所示。纯 2 维 Coifman 小波第  $L$  级分解数据结构如图 6 所示, 为了保持分解前后数据量不变, 且变换域边界处的值小, 分解前首先要对  $\lambda_L$  进行对称延拓。对称延拓如图 7 所示, 正方形虚线框内的数据为原始数据, 虚线为延拓对称轴。若对低频分量  $\lambda_{L-1}$  进行迭代分解, 则可以生成多级小波分解系数, 用于数据压缩或其他目的。

重构是分解的逆过程, 由上述两组公式容易推得。

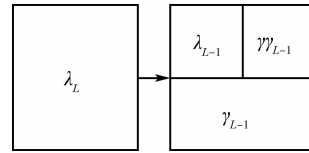


图 6 纯 2 维 Coifman 小波第  $L$  级分解数据结构

Fig. 6 The  $L$  level decomposition data structure of pure 2D Coifman wavelet

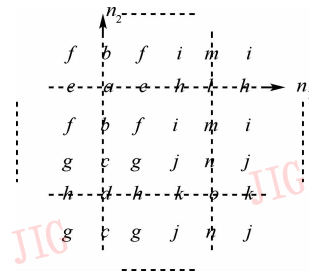


图 7 对称延拓

Fig. 7 Symmetric-padding

纯 2 维 Coifman 小波滤波器组提升算子和更新算子的特点为直接构造纯 2 维小波滤波器组提供了帮助。理论上讲, 只要能构造新的纯 2 维半带滤波器, 就可以构造新型的纯 2 维小波滤波器组。

文献[8]是关于纯 2 维提升小波滤波器组的一种新的构造方法, 文中用 1 维 Coifman 小波滤波器环状扩散生成纯 2 维预测算子  $p(n)$  和更新算子  $u(n)$ 。这种构造纯 2 维提升小波滤波器组的方法虽然简单, 但是以损失纯 2 维小波及其对偶小波的消失矩为代价的, 且无论滤波器的尺寸多大, 纯 2 维小波及其对偶小波的消失矩都是 2, 这必将影响其压缩性能, 本文的试验结果也证实了这一推断。为了表达方便, 可令  $\text{Ring\_DD}(4,4)$  和  $\text{Ring\_CDF}(2,2)$  分别表示文献[9]中以  $\text{DD}(4,4)$  和  $\text{CDF}(2,2)$  为原型生成的纯 2 维滤波器组。值得注意的是,  $\text{Ring\_CDF}(2,2)$  滤波器组与纯 2 维 Coifman2.2 小波滤波器组完全相同, 其 1 维原型滤波器组恰好是 Daubechies 5/3 小波滤波器组。

全相位滤波器<sup>[9]</sup>是一种 FIR 滤波器设计的新方法, 它可以用于设计新型的半带滤波器<sup>[10]</sup>, 利用本文的提升格式还可以构造纯 2 维全相位完全重建滤波器组, 因篇幅所限, 这一部分将另文讨论。

### 4 在图像压缩中的应用

在 1 维原型滤波器组相同的条件下, 纯 2 维

Coifman 小波滤波器组与文献[8]中的滤波器组还有以下相同点,即只要稍改变归一化系数,二者的提升结构都可以用于图像的有损和无损压缩;纯2维滤波器都具有2进分母系数特征,除归一化因子外,还可以使小波变换避免乘法运算。本文采用 SPIHT 编码<sup>[11]</sup>(不包含算术编码),对3种纯2维小波及 Daubechies9/7 小波的图像有损压缩特性进行了比较,比较结果见表1。

试验数据显示,在1维原型滤波器相同的条件下,纯2维 Coifman 小波滤波器组比文献[8]中的滤波器组压缩效果好。纯2维 Coifman4.4 比 Daubechies9/7(小波及其对偶小波的消失矩都为4)小波压缩效果稍差,是由于本文采用的 SPIHT 编码方案更适用于可分离2维小波变换的四叉树编码所致,若采用二叉树 SPIHT 编码,则将使压缩效果得到改善。

表1 Lena(512×512pixels, 8bpp) 图像压缩峰值信噪比

Tab. 1 PSNR for Lena(512×512pixels, 8bpp)  
image compression

变换类型	不同压缩率下压缩图像的峰值信噪比(dB)			
	1bpp	0.5bpp	0.25bpp	0.1bpp
纯2维 Coifman2.2	38.541 0	35.172 0	32.220 8	28.311 8
纯2维 Coifman4.4	39.132 4	35.815 2	32.717 3	28.704 0
Ring_DD(4,4)	38.957 2	35.604 5	32.551 3	28.607 1
Daubechies9/7	39.988 5	36.780 9	33.590 4	29.557 7

## 5 结 论

本文提出了一种纯2维 Coifman 小波的提升格式及算法实现。该提升格式既适用于图像的有损压缩,只要稍改变归一化系数,又适用于图像的无损压缩,还能同时保持1维小波提升格式在运算量和边界处理等方面所具有的优势,纯2维 Coifman 小波提升格式中的预测算子和更新算子所具有的特性为直接构造纯2维小波滤波器组提供了理论指导。由图像

的有损压缩试验数据可见,在1维原型滤波器相同的条件下,纯2维 Coifman 小波滤波器组比文献[8]中的纯2维滤波器组的压缩效果好,其除了归一化因子,可以完全避免乘法运算。若采用二叉树编码方案,在运算量和压缩效果方面,纯2维 Coifman4.4 与 Daubechies9/7 小波相比则有相当的竞争性。

## 参考文献 (References)

- Mallat S. A theory for multiscale signal decomposition : the wavelet representation[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis Machine Intelligence, 1989, **11**(7): 674 ~ 693.
- Wei Dong, Evans Brian L, Bovik Alan C. Biorthogonal quincunx Coifman wavelets [ A ]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Process[C], Santa Barbara, Los Alamitos, CA, USA, 1997, 246 ~ 249.
- Cohen A, Daubechies I. Non-separable bidimensional wavelets bases [J]. Revista Matematica Iberoamericana, 1993, **9**(1): 51 ~ 137.
- Dudgeon D E, Mersereau R M. Multidimensional Digital Signal Processing[M]. Englewood Cliffs, MA, USA, Prentice-Hall, 1983.
- Sweldens W. The lifting scheme: a custom-design construction of biorthogonal wavelets[J]. Application Computer Harmonic Analysis, 1996, **3**(4): 186 ~ 200.
- Wei D, Tian J, Wells R O, et al. A New class of biorthogonal wavelet systems for image transform coding[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, **7**(7): 1000 ~ 1013.
- Daubechies I, Sweldens W. Factoring wavelet transform into lifting steps[J]. Journal Fourier Analysis, 1994, **4**(3): 247 ~ 269.
- Vargic R. An approach to 2D wavelet transform and its use for image compression[J]. Radioengineering, 1998, **7**(4): 1 ~ 6.
- Hou Zheng-xin, Xu Ni-ni. Windowed all phase DFT digital filter [J]. Journal of Tianjin University, 2005, **38**(5): 448 ~ 454. [侯正信, 徐妮妮. 加窗全相位 DFT 数字滤波器 [J]. 天津大学学报, 2005, **38**(5): 448 ~ 454.]
- Xu Ni-ni, Hou Zheng-xin. All phase half band filter and its application [J]. Journal of Tianjin University, 2005, **38**(3): 206 ~ 211. [徐妮妮, 侯正信. 全相位半带滤波器及其应用 [J]. 天津大学学报, 2005, **38**(3): 206 ~ 211.]
- Said A, Pearlman W. A new fast and efficient image code on set partitioning in hierarchical trees[J]. IEEE Transactions on Circuits Systems Video Technology, 1996, **6**(6): 243 ~ 250.