

复数小波域的高斯尺度混合模型图像降噪

严奉霞^{1),2)} 成礼智¹⁾ 彭思龙²⁾

¹⁾(国防科学技术大学理学院数学与系统科学系,长沙 410073)

²⁾(中国科学院自动化研究所国家集成电路设计工程技术研究中心,北京 100080)

摘要 由于复数小波变换具有近似平移不变性和良好的方向选择性,因此适用于图像去噪。为了取得更好的降噪效果,提出了一种基于复数小波的高斯尺度混合模型降噪算法。该算法首先对自然图像的复数小波系数建立统计模型,即将位于相邻位置和尺度的系数邻域建模为一个高斯尺度混合模型;然后用该模型对子带系数进行贝叶斯最小均方估计,以达到降低噪声的目的。由于这一模型很好地利用了复数小波系数幅值尺度间和尺度内的相关性,因此可以取得较好的降噪效果。实验结果表明,该算法无论从峰值信噪比还是从主观视觉上都优于一些传统的降噪算法。

关键词 图像降噪 二元树复数小波变换 高斯尺度混合模型 贝叶斯最小均方估计

中图法分类号: TP391.41 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2008)05-0865-05

Image Denoising Based on the Gaussian Scale Mixtures Model of Dual-tree Complex Wavelet Domain

YAN Feng-xia^{1),2)}, CHENG Li-zhi¹⁾, PENG Si-long²⁾

¹⁾(School of Science, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

²⁾(Institute of Automation, Chinese Academy of Science, Beijing 100080)

Abstract In this paper, a new algorithm based on a statistical model of the coefficients of the Dual-tree Complex Wavelet Transform (DT-CWT) is proposed for image denoising. The DT-CWT is approximately shift invariance and has good directionality, which are properties suitable for image de-noising. Neighborhoods of coefficients at adjacent positions and scales are modeled as Gaussian Scale Mixture. Under this model, subband coefficients are estimated by Bayesian Least Square estimator. Experimental results show an improved de-noising performance of PSNR and human vision in comparison with other methods.

Keywords image de-noising, dual-tree complex wavelet transform, Gaussian scale mixture, Bayesian least squares estimate

1 引言

由于受图像获取方式的限制或因传输过程中受到干扰,致使观测到的图像通常被各种各样的噪声所污染。这种带噪声的图像不仅不利于观测,而且很难对其进行进一步的处理。因而图像

降噪一直是图像处理领域的一个重要研究课题。由于小波变换具有良好的多尺度分析和时频局部分析性质,因此基于小波的图像降噪算法已引起人们的广泛关注,其中比较经典的算法是 Donoho 等人提出的阈值收缩降噪算法及围绕阈值选取的改进算法^[1-3]。

对基于统计模型的降噪算法而言,噪声和原图

基金项目:国家自然科学基金项目(60573027)

收稿日期:2006-10-12;**改回日期:**2006-12-05

第一作者简介:严奉霞(1979~),女,国防科学技术大学理学院数学与系统科学系博士研究生,中国科学院自动化研究所国家集成电路设计工程技术研究中心访问学生。研究方向为新型小波分析理论、图像处理等。E-mail: xialang3@163.com

像的先验概率模型非常重要。由于将图像从像素域变换到小波域能进一步提高图像统计模型的描述能力,因而,近年来,小波域的统计模型降噪成为降噪算法的研究热点^[4-7]。这类算法的基本思想是先把统计模型作为小波系数的先验概率模型,然后利用这个先验信息,在贝叶斯框架下对原始图像进行估计。

通过观察可以知道,单幅图像是高度不同类的,即它们大都包含一些平滑区域,而且这些平坦区域被诸如轮廓、边缘、表面标记等特征隔开。这种现象可在观察到的带通滤波器响应的边缘分布中反映出来,它在零点表现出大的峰值,但在尾部则明显比具有相同方差的高斯分布衰减得慢,即呈现统计非高斯(non-Gaussian)行为。关于系数之间依赖关系的研究表明,相似位置、方向、尺度的系数幅度值是高度相关的。这些高阶依赖关系,和高阶边缘统计特性,可以通过一个简单的局部依赖关系模型(如 Gaussian)和一组控制参数(如方差)的"隐"随机变量的联合建模来描述。这种隐马尔可夫模型(HMM)^[8,9]已经在语音信号处理中得到广泛应用,并且能很好地描述小波系数的边缘分布和联合分布。

本文提出了一种对复数小波变换域内的系数邻域建立高斯尺度混合模型^[10](即高斯随机矢量和独立隐随机标量乘子的积)的降噪算法,该算法充分利用了二元树复数小波的平移不变性和良好的方向选择性,以及变换后尺度间和尺度内的小波系数幅值之间的相关性,通过高斯尺度混合模型来对邻

域内的参考系数进行贝叶斯框架下的最小均方估计,以达到降低噪声的目的。实验结果证明,该算法是有效的。

2 图像的多尺度表示和高斯尺度混合统计模型

2.1 二元树复数小波变换

虽然经典的实数小波多尺度表示为描述视觉图像的结构提供了非常用的前期表示,但是,广泛应用的正交或双正交小波对许多实际应用仍是有问题的:如基于张量积的 2 维小波变换不擅长表示图像中具有方向性的边缘和细节;又如包含上下采样过程的小波变换不具有平移不变性。而方向选择性和平移不变性在图像去噪、边缘检测和图像增强等问题中都是十分重要的。针对这个局限,Kingsbury 提出了复数小波的概念^[11],并且在文献[12]中给出了一种利用实数小波变换来实现复数小波变换的二元树结构(如图 1 所示)。这种二元树结构中的两棵分树 **A** 和 **B** 分别对应复数小波的实部和虚部(1 维情形),通过精心设计的两棵分树的互补信息恰好可使得整个复小波变换具有近似平移不变性。而将其拓展到 2 维情形后的 4 棵分树通过组合得到的 6 个复数分量则恰好对应图像中多个方向($\pm 15^\circ$, $\pm 45^\circ$, $\pm 75^\circ$)的子带信息。由于复数小波变换兼具平移不变性和方向选择性,且计算冗余较其他类似方法有显著降低,因此已经在图像去噪、复原、分割以及运动估计等方面取得很好的实验结果。

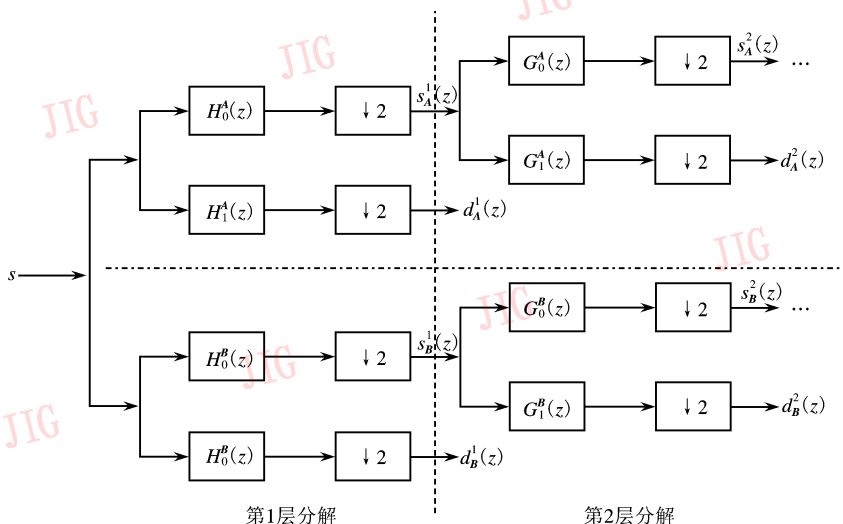


图 1 二元树结构的 1 维复小波变换结构图

Fig. 1 The filter-bank structure of the 1D dual-tree complex wavelet transform

2.2 高斯尺度混合模型

一个随机矢量 \mathbf{x} 是高斯尺度混合 (Gaussian scale mixture, GSM), 当且仅当它能表示成如下式所示的两个独立随机变量的乘积^[10]: $\mathbf{x} = \sqrt{z}\mathbf{u}$ 其中 z 是一个正标量随机变量, 而 \mathbf{u} 是一个协方差矩阵为 \mathbf{C}_u 的零均值高斯矢量, \mathbf{x} 为 Gaussian 矢量的无穷混合。这样, 随机矢量 \mathbf{x} 的概率密度 $p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ 就由混合 $p_z(z)$ 和矢量 \mathbf{u} 的协方差矩阵 \mathbf{C}_u 唯一确定。

$$p_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \int p(\mathbf{x} | z)p_z(z) dz$$

$$= \int \frac{\exp(-\mathbf{x}^T(z\mathbf{C}_u)^{-1}\mathbf{x}/2)}{\sqrt{(2\pi)^N |z\mathbf{C}_u|}} p_z(z) dz \quad (1)$$

其中, N 是矢量 \mathbf{x} 和 \mathbf{u} 的维数 (即本文中邻域的大小), 不失一般性, 可假设 $E\{z\} = 1$, 这意味着 $\mathbf{C}_x = \mathbf{C}_u$ 。这种 GSM 模型能很好地描述小波系数边缘分布的形状和邻域系数幅值之间的强的相关性。由于正标量随机变量 z 可用来调制邻域内系数的局部方差, 因而能够描述系数幅度值之间的经验观测相关性。关于随机变量 z 的概率密度 $p_z(z)$ 的有关讨论, 可以参考文献[4], 本文之所以用非信息先验概率 (non-informative prior), 是因为它的优点是具有不要求对噪声观测进行任何参数配置的优点。利用这种先验的常用解, 即 Jeffrey's 先验, 即可描述系数幅值之间的相关性。在用系数 \mathbf{x} 估计乘子 z 时, 其形式为

$$p_z(z) \propto \sqrt{I(z)}, I(z) = E\left\{-\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{x} | z)}{\partial z^2}\right\}$$

其中, $I(z)$ 是 Fisher 信息矩阵。结合 GSM 模型进行计算有

$$-\frac{\partial^2 \log p(\mathbf{x} | z)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[\frac{1}{2} (N \log(z) + \log | \mathbf{C}_u | + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{C}_u^{-1} \mathbf{x}}{z}) \right]$$

$$= \frac{N}{2z^2} + \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{C}_u^{-1} \mathbf{x}}{2z^3} \quad (2)$$

考虑到 $E\{\mathbf{x}^T \mathbf{C}_u^{-1} \mathbf{x}\} = z$, 若取式(2)期望的平方根, 则得到 Jeffrey's 先验概率如下:

$$p_z(z) \propto \frac{1}{z} \quad (3)$$

3 复数小波变换域内的图像去噪

与一般基于小波的降噪步骤一样, 本文的降噪

过程也分为以下 3 步: (1) 对图像进行多层 2 维复数小波分解, 即将图像分解为在不同尺度和不同方向上的金字塔子带; (2) 除了最顶层的低通子带外, 还要对不同尺度的每一个方向子带进行降噪处理; (3) 用处理后的系数进行 2 维复数小波逆变换来得到降噪后的图像。下面重点讨论第 2 步中用 GSM 模型对每个子带进行降噪的算法。

设 \mathbf{y} 是对应于分解后金字塔结构中包含 N 个观测系数邻居的矢量, 则它可以表示为

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{w} = \sqrt{z}\mathbf{u} + \mathbf{w} \quad (4)$$

其中, \mathbf{x}, \mathbf{w} 分别代表未知的清晰图小波系数和噪声小波系数矢量。观测的邻居矢量的概率密度是在条件 z 上的一个均值为零、协方差矩阵为 $\mathbf{C}_{y|z} = z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w$ 的高斯矢量, 即

$$p_{y|z}(\mathbf{y} | z) = \frac{\exp(-\mathbf{y}^T(z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{y}/2)}{((2\pi)^N |z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w|)^{1/2}} \quad (5)$$

对每个邻域, 人们希望从观测的噪声系数矢量 \mathbf{y} 中估计位于邻域中心的参考系数 x_c 。而贝叶斯最小均方 (Bayesian least squares, BLS) 估计恰好是条件均值, 即

$$E\{x_c | \mathbf{y}\} = \int x_c p(x_c | \mathbf{y}) dx_c$$

$$= \int \int_0^\infty x_c p(x_c | \mathbf{y}, z) p(z | \mathbf{y}) dz dx_c$$

$$= \int_0^\infty p(z | \mathbf{y}) E\{x_c | \mathbf{y}, z\} dz \quad (6)$$

GSM 模型的优势在于, 在条件 z 上, 系数邻域矢量 \mathbf{x} 是 Gaussian 矢量。另外, 可假设考虑的噪声为加性高斯噪声, 这样, 式(6)中积分内部的期望值就是一个简单的局部线性估计。从而, 对整个邻域矢量有

$$E\{\mathbf{x} | \mathbf{y}, z\} = z\mathbf{C}_u(z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w)^{-1}\mathbf{y} \quad (7)$$

可以通过对角化矩阵 $z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w$ 来简化表达式对 z 的依赖性。设 \mathbf{S} 是正定矩阵 \mathbf{C}_w 的对称均方根矩阵 (即 $\mathbf{C}_w = \mathbf{S}\mathbf{S}^T$), 设 $\{\mathbf{Q}, \mathbf{A}\}$ 是矩阵 $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T}$ 的特征矢量/特征值的集合, 那么

$$z\mathbf{C}_u + \mathbf{C}_w = z\mathbf{C}_u + \mathbf{S}\mathbf{S}^T$$

$$= \mathbf{S}(z\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T} + \mathbf{I})\mathbf{S}^T$$

$$= \mathbf{S}\mathbf{Q}(z\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^T \quad (8)$$

从而有

$$E\{\mathbf{x} | \mathbf{y}, z\} = z\mathbf{S}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{C}_u\mathbf{S}^{-T}\mathbf{Q}(z\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$$

$$= z\mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{A}(z\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{S}^{-1}\mathbf{y}$$

$$= z\mathbf{M}\mathbf{A}(z\mathbf{A} + \mathbf{I})^{-1}\mathbf{v} \quad (9)$$

其中, $\mathbf{M} = \mathbf{S}\mathbf{Q}$, $\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{y}$ 。这样,

$$E\{x_c | \mathbf{y}, z\} = \sum_{n=1}^N \frac{zm_{c,n}\lambda_n v_n}{z\lambda_n + 1} \quad (10)$$

其中, $m_{i,j}$ 表示矩阵 \mathbf{M} 的第 i 行 j 列元素, λ_n 是矩阵 \mathbf{A} 的对角元素, c 表示邻域矢量内参考系数的下标。这样, 式(6)中只需计算 $p_{z|y}(z|\mathbf{y})$, 由贝叶斯定理有

$$p_{z|y}(z|\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{p}_{y|z}(\mathbf{y}|z)p_z(z)}{\int_0^\infty \mathbf{p}_{y|z}(\mathbf{y}|\beta)p_z(\beta)d\beta} \quad (11)$$

其中, $\mathbf{p}_{y|z}(\mathbf{y}|z)$ 已由式(5)给出, 根据式(8), 则式(5)可以简化为

$$p_{y|z}(\mathbf{y}|z) = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^N \frac{v_n^2}{z\lambda_n + 1}\right)}{\sqrt{(2\pi)^N |\mathbf{C}_w| \prod_{n=1}^N (z\lambda_n + 1)}} \quad (12)$$

为此可以将本文的降噪算法归纳如下:

(1) 对图像进行二元树复数小波变换, 将图像分解为多个子带。

(2) 对除了低通子带外的每个方向高频子带进行处理如下:

① 根据图像域的噪声协方差计算邻域噪声 \mathbf{w} 的协方差 \mathbf{C}_w ;

② 估计噪声图 \mathbf{y} 的邻域协方差矩阵 \mathbf{C}_y , 并计算出 \mathbf{C}_u ;

③ 计算 \mathbf{A} 和 \mathbf{M} ;

④ 对每个邻域进行以下计算: 1) 对积分范围中的每个 z 值, 由式(10)计算 $E\{x_c | \mathbf{y}, z\}$, 并由式(12)计算 $\mathbf{p}_{y|z}(\mathbf{y}|z)$; 2) 由式(11)和式(3)计算 $p_{z|y}(z|\mathbf{y})$; 3) 用式(6)数值计算出 $E\{x_c | \mathbf{y}\}$ 。

(3) 由处理后的各方向高频子带和低通子带做复数小波逆变换重构出降噪后的图像。

4 实验结果和分析

为验证本文算法的效果, 用 512×512 的标准测试图像 Lena, Barbara, Boat, Mandrill 分别进行降噪对比实验。实验用图像为加入零均值、标准方差为 $\sigma_n = 25$ 的高斯白噪声的图像, 图像降噪的客观质量用峰值信噪比 (PSNR) 来衡量。实验在内存为 256M 的 PC 机上用 Matlab 实现。实验中, 本文算法用来建模的邻域选为每个参考系数的同一尺度的 3×3 邻域及下一个更粗糙尺度中与该系数在同一空域位置和方向的父系数 (即邻域矢量共包括 10 个小波系数)。另外, 本文还用传统实数小波变换与本文中的高斯尺度混合模型相结合的 (DWT + GSM) 方法进行了实验, 各种算法进行去噪后图像的 PSNR 值和所需计算时间列在表 1 中, 从实验结果可以看出, 隐马尔可夫树 (hidden Markov tree, HMT) 模型算法由于迭代而需要较长的时间。本文算法降噪后图像的峰值信噪比要高于其他算法, 且计算时间适中。图 2 所示为含噪声的 Lena 图像分别经 5 种不同的降噪算法降噪后图像的主观质量比较, 为图示得直观, 所有图像只截取了其中一部分边缘丰富的区域显示, 图 3 为用本文算法对 Lena 图像降噪的效果图。从图中可以看出, 本文算法可以很好地消除传统小波算法在边缘处的“震铃”效应, 且图像整体上更为光滑, 特别是边缘处的视觉效果有明显改善, 同时也提高了 PSNR 值。本文算法取得较好的降噪效果是因为充分利用了复数小波的平移不变性和好的方向选择性, 而局部 GSM 模型又很好地描述了复数小波变换系数的边缘分布和尺度内与尺度间系数幅值的相关性的缘故。

表 1 不同降噪算法降噪后图像的 PSNR 值及计算时间的比较

Tab. 1 Comparison of different algorithms for image denoising

测试图像 $\sigma_n = 25$	Wiener 降噪算法		HMT 降噪算法 ^[6]		Bishirink 降噪算法 ^[7]		DWT + GSM 算法		本文算法	
	PSNR 值 (dB)	时间 (s)	PSNR 值 (dB)	时间 (s)	PSNR 值 (dB)	时间 (s)	PSNR 值 (dB)	时间 (s)	PSNR 值 (dB)	时间 (s)
Lena (20.226 5dB)	27.824 7	0.716	28.293 5	275.6	29.941	7.468	30.007 3	5.844	30.718 7	18.390
Barbara (20.198 7dB)	25.524 8	1.937	27.054 4	234.8	27.368	7.243	27.549 9	5.797	28.347 8	16.781
Boat (20.212dB)	27.258 4	0.550	28.371 2	251.9	28.217	7.008	28.096 1	5.718	28.613 8	16.593
Mandrill (20.206dB)	23.279 7	0.828	24.245 9	278.6	23.611	7.910	25.237 2	6.264	25.503 1	18.760

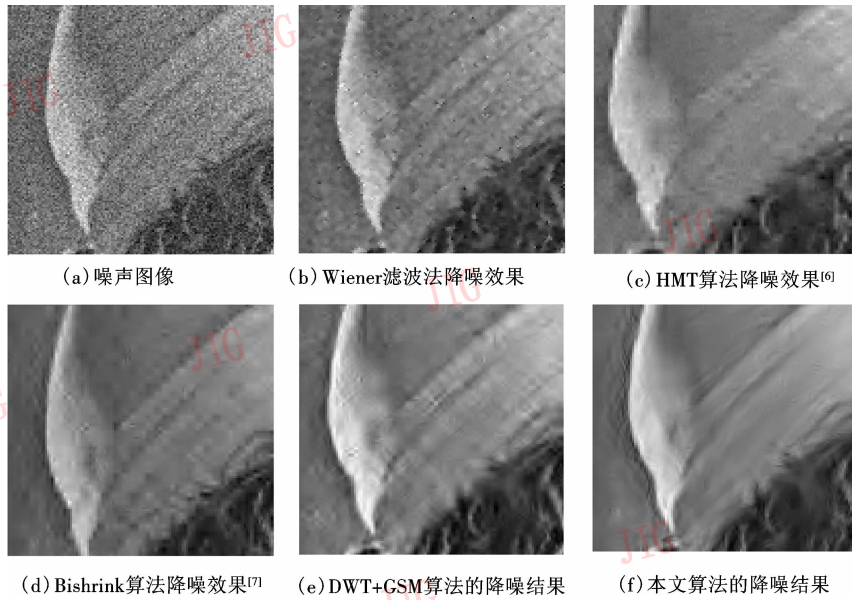


图 2 对 Lena 图像去噪结果的局部显示

Fig. 2 The different denoising results of Lena image



图 3 Lena 噪声图与用本文算法对其进行降噪的结果

Fig. 3 Lena noisy image and the result of the denoised image using the proposed method

参考文献 (References)

- 1 Donoho D L. Denoising by soft-thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, **41**(3): 617 ~ 627.
- 2 Coifman R R, Donoho D L. Translation-invariant denoising [A]. In: A. Antoniadis and G. Oppenheim, Eds: Wavelets and Statistics, Lecture Notes [C], New York, NY, USA; Springer-Verlag, 1995; 125 ~ 150.
- 3 Chang S G, Yu B, Vetterli M. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, **9**(9): 1522 ~ 1531.
- 4 Portilla J, Strela V, Wainwright M J, *et al.* Image denoising using Gaussian scale mixtures in the wavelet domain [J]. IEEE

Transactions on Image Processing, 2003, **12** (11): 1338 ~ 1351.

- 5 Simoncelli E P, Adelson E. Noise removal via Bayesian wavelet coring [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C], Lausanne, Switzerland, 1996; 379 ~ 382.
- 6 Crouse M S, Nowark R D, Baraniuk R G. Wavelet-based signal processing using hidden Markov modes [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, **46**(4): 886 ~ 902.
- 7 Sendur L, Selesnick I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2002, **50**(11): 2744 ~ 2756.
- 8 Portilla J, Strela V, Wainwright M, *et al.* Adaptive Wiener denoising using a Gaussian scale mixture model in the wavelet domain [A]. In: Proceedings of 8th IEEE International Conference on Image Processing [C], Thessaloniki, Greece, 2001; 37 ~ 40.
- 9 Wainwright M J, Simoncelli E P. Scale mixtures of Gaussians and the statistics of natural images [J]. Advances in Neural Information Processing Systems, 2000, **12**(1): 855 ~ 861.
- 10 Andrews D, Mallows C. Scale mixtures of normal distributions [J]. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), 1974, **36**(1): 99 ~ 102.
- 11 Kingsbury N. Image processing with complex wavelets [J]. Philosophical Transactions on Royal Society London A, 1999, **35**(160): 2543 ~ 2560.
- 12 Kingsbury N. The dual-tree complex wavelet transform: a new efficient tool for image restoration and enhancement [A]. In: Proceedings of European Signal Processing [C], Rhodes, Greece, 1998, 319 ~ 322.