

# 一种组合总变差和4阶偏微分方程的图像去噪模型

王际朝

(中国石油大学 数学与计算科学学院, 东营 257061)

**摘要** 总变差滤波能保持边缘,4阶PDE滤波能在图像的光滑区域消除阶梯现象,为此提出了一个用于图像去噪的基于偏微分方程(PDE)的组合模型,把总变差(total variation,TV)滤波和一个四阶PDE滤波通过某一权函数 $\tau$ 进行了加权组合。该组合模型很好地保留了二者的优点。数值试验结果表明,新模型在信噪比等方面比单纯的用一种滤波有较大的改进。

**关键词** 总变差 图像去噪 梯子现象 偏微分方程

中图法分类号:TP751.1 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)08-1443-04

## A Noise Removal Model Combining TV and a Fourth-order PDE filter

WANG Ji-chao

(School of Mathematics and Computational Sciences, Petroleum University of China, Dongying 257061)

**Abstract** A combined model based PDE is proposed here, which can be used in image denoising. It combines the Total Variation(TV) filter and a fourth-order PDE filter by a weighting function  $\tau$ . TV filter is able to preserve edges and the fourth-order PDE filter can overcome the staircase effect in smooth regions. The combined model preserve the advantages of both. Numerical experiments show that the combined model has more improvement on signal-noise-ratio(SNR) than using only one filter.

**Keywords** total variation, image denoising, staircase effect, PDE

### 1 引言

图像去噪的计算中,通常观测到的噪声图像  $z$  与需要恢复的原始图像  $u$  具有关系

$$z = u + n \quad (1)$$

式中,  $n$  为具有零均值的高斯白噪声。本文提出了一种从  $z$  中重建图像  $u$  的方法。数字图像一般可以被分解为3种不同的区域:平滑区域、在密度值上光滑变化的区域以及在密度值上跳跃变化的区域。图像去噪的目的就是要通过去除噪声使这些特征凸现。

总变差(total variation, TV)极小化方法是一个在重建图像中能很好地保持边缘的成功方法。这个方法是在1992年由Rudin, Osher和Fatemi(ROF)

提出的<sup>[1]</sup>。TV极小化方法用于解如下极小化问题:

$$\min_u \left\{ T_1(u) = \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda_1}{2} \int_{\Omega} |u - z|^2 dx dy \right\} \quad (2)$$

其中,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  为图像有定义的区域;  $\lambda_1$  为正的参数, 控制  $\int_{\Omega} |u - z|^2 dx dy$  的影响。

项  $\int_{\Omega} |\nabla u| dx dy$  的严格定义如下:

$$\int_{\Omega} |\nabla u| dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{v \in V} \int_{\Omega} [-u \nabla \cdot v + \beta \sqrt{1 - |\bar{v}(x, y)|^2}] dx dy \quad (3)$$

其中,  $V = \{ \bar{v} \in C_0^\infty(\Omega, \mathbf{R}) : |\bar{v}(x, y)| \leq 1 \}$ 。事实

上,  $\int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| dx dy$  即  $\mathbf{u}$  的总变差, 这一项就是通常所说的正则项。

TV 极小化方法的一个优点就是允许图像的不连续性, 即保持边缘。但是在理论上和数值试验中都表明<sup>[2-4]</sup>, TV 范数把光滑的区域恢复成了‘成片’连续的区域, 即产生了所谓的梯子现象。为了消除这一影响, 高阶的 PDE 引起了人们的兴趣<sup>[2,4-6]</sup>。分析表明, 四阶 PDE 具有二阶 PDE 不具备的一些特殊性质。

高阶 PDE 一般由如下泛函的极小化产生

$$\min_{\mathbf{u}} \int_{\Omega} F(x_1, x_2, \dots, x_n, d\mathbf{u}, d^2\mathbf{u}, \dots, d^k\mathbf{u}) dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (4)$$

式中,  $\Omega \subset \mathbf{R}^n, n \geq 2, d^k\mathbf{u}$  表示  $\mathbf{u}$  的  $k$  阶偏导数。

Lysker Osher 和 Tai (LOT), 提出了如下模型<sup>[3]</sup>:

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ T(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} (|u_{xx} + u_{yy}|) dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{z}|^2 dx dy \right\} \quad (5)$$

Chan, Esedoglu 和 Park (CEP) 引入了正则项

$\int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 dx dy$ <sup>[6,7]</sup>, 进而可以得到如下模型

$$\min_{\mathbf{u}} \left\{ T_2(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} |\Delta \mathbf{u}|^2 dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{z}|^2 dx dy \right\} \quad (6)$$

极小化模型式(5)和式(6)都会产生一个非线性的四阶 PDE。

## 2 Combined 模型的提出及算法设计

高阶 PDE 能较好的控制图像的平滑区域, 而对图像的不连续区域或者跳跃区域的控制, TV 正则化有较好的效果。有没有一种方法既能很好地控制平滑区域又能很好地控制不连续区域呢? 这不是一件很容易的事情。因此, 需要联合不同的方法来提高模型重建图像的能力。

Chambolle 和 Lions<sup>[8]</sup> 把  $\mathbf{u}$  分解成光滑泛函  $\mathbf{u}_1$  和包含跳跃点的  $\mathbf{u}_2$ , 通过解关于  $\mathbf{u}_1$  和  $\mathbf{u}_2$  的反卷积问题得到重建的图像; Chan 等人<sup>[4,6,7]</sup> 发展了 Chambolle 的方法。本文从另外一种途径来考虑这个问题, 基于 ROF 模型(式(2))和高阶 PDE 的 CEP 模型(式(6))在图像重建中的各自特点, 把式(2)和式(6)进行凸组合, 进而得到了较好的

结果。

ROF 模型式(2)对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|_{\beta}} \right) + \lambda_1 (\mathbf{u} - \mathbf{z}) = 0 & \mathbf{u} \in \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \mathbf{u} \in \partial \Omega \end{cases} \quad (7)$$

式中,  $\partial \Omega$  表示  $\Omega$  的边界;  $\mathbf{n}$  是  $\partial \Omega$  的法向量;

$|\nabla \mathbf{u}|_{\beta} = \sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta^2}, \beta \geq 0$ , 当  $\beta > 0$  时, 可以避免因  $\nabla \mathbf{u} = 0$  而带来的麻烦。参数  $\lambda_1$  可由下式决定:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega} \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|_{\beta}} \right) \cdot \nabla (\mathbf{u} - \mathbf{z}) dx dy \quad (8)$$

式中

$$\sigma^2 = \int_{\Omega} |\mathbf{u} - \mathbf{z}|^2 dx dy \quad (9)$$

为误差水平。若记

$$L(\mathbf{u})\mathbf{v} = -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \beta^2}} \nabla \mathbf{v} \right) \quad (10)$$

则方程式(7)可改写为

$$\begin{cases} L(\mathbf{u})\mathbf{u} + \lambda_1 (\mathbf{u} - \mathbf{z}) = 0 & \mathbf{u} \in \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \mathbf{u} \in \partial \Omega \end{cases} \quad (11)$$

CEP 模型式(6)相应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\begin{cases} \Delta^2 \mathbf{u} + \lambda_2 (\mathbf{u} - \mathbf{z}) = 0 & \mathbf{u} \in \Omega \\ \frac{\partial \Delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \mathbf{u} \in \partial \Omega \\ \frac{\partial \Delta^2 \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 & \mathbf{u} \in \partial \Omega \end{cases} \quad (12)$$

为了确定参数  $\lambda_2$ , 可以用  $\mathbf{u} - \mathbf{z}$  乘式(12)的第一个等式, 然后在  $\Omega$  上积分, 注意到式(9), 则得到

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega} \Delta^2 \mathbf{u} (\mathbf{u} - \mathbf{z}) dx dy \quad (13)$$

为方便起见, 分别记  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  为式(7)及式(12)的解。

众所周知<sup>[1]</sup>,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  可以通过解下面的非线性扩散方程得到

$$u_i = -\nabla \cdot \left( \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|_{\beta}} \right) + \lambda_1 (\mathbf{u} - \mathbf{z}) \quad (14)$$

$$v_i = \Delta^2 \mathbf{u} + \lambda_2 (\mathbf{u} - \mathbf{z}) \quad (15)$$

若用迭代法求上述两个方程, 则解可以表示为  $\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - [\lambda_1^k \mathbf{I} + L(\mathbf{u})]^{-1} [L(\mathbf{u})\mathbf{u}^k + \lambda_1^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{z})]$  (16)

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k - [\lambda_2^k \mathbf{I} + \Delta^2]^{-1} [\Delta^2 \mathbf{v}^k + \lambda_2^k (\mathbf{v}^k - \mathbf{z})] \tag{17}$$

其中,  $L(\mathbf{u})$  由式(10)所表示,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵。

式(14)对不连续的区域有很好地控制, 式(15)对光滑的区域有很好地控制, 由于两种方法有自己的优点和不足, 所以为了充分利用这两种方法的优势, 考虑如下解的凸组合

$$\mathbf{w} = \tau \mathbf{u} + (1 - \tau) \mathbf{v}, \tau \in [0, 1] \tag{18}$$

当  $\tau = 1$  时, 无论是在边缘还是平滑区域强调的是式(14)的性质, 为了利用式(15)好的属性, 自然希望在图像的光滑区域时  $0 \leq \tau < 1$ 。由此可知  $\tau$  取固定的一个值是没有根据的。所以把  $\tau$  的取值与  $|\nabla \mathbf{u}|$  和  $|\nabla \mathbf{v}|$  联系起来。测试几个不同的计算权值的函数, 得到如下能得到较好结果的函数:

$$\tau^{k+1} = \begin{cases} 1 & |\nabla \mathbf{w}| \geq c \\ 1 - \sin\left(\frac{\pi |\nabla \mathbf{w}|}{2c}\right) & 0 \leq |\nabla \mathbf{w}| < c \end{cases} \tag{19}$$

式中,  $\mathbf{w} = \tau^k \mathbf{u} + (1 - \tau^k) \mathbf{v}$ ,  $c$  是正的参数, 不同的图像选取的  $c$  是不同的。例如: 若  $|\nabla \mathbf{w}| \in [0, 1]$ , 则可以选择  $c = 0.2$ , 在选择  $c$  之前可以先计算一下  $|\nabla \mathbf{w}|$  的均值, 然后在均值的附近选取  $c$ 。对于数字图像来说, 一般情况下,  $|\nabla \mathbf{w}| > 1$  的点的个数相对于总数是较少的。通过多次试验可知, 当  $0 < c < 0.5$  时去噪效果较好。可见, 在  $|\nabla \mathbf{w}|$  相对于  $c$  极大或极小的点上,  $\tau$  的取值为 1, 而在其他区域  $0 \leq \tau < 1$ 。也就是说在边缘区域充分利用了式(14)的性质, 在光滑区域充分利用了式(15)的属性。

解此 ‘Combined 模型’ 的算法步骤如下:

- (1) 给定  $\tau^0 \in [0, 1]$ ,  $c$  和小数  $tol$ ; 令  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{v}^0 = \mathbf{z}$ , 对  $k = 0, 1, \dots$  执行以下各步骤;
- (2) 由式(8)算出  $\lambda_1^k, \lambda_2^k$ ;
- (3) 根据式(16)计算

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - [\lambda_1^k \mathbf{I} + L(\mathbf{u})]^{-1} [L(\mathbf{u}) \mathbf{u}^k + \lambda_1^k (\mathbf{u}^k - \mathbf{z})]$$

(4) 根据式(17)计算

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k - [\lambda_2^k \mathbf{I} + \Delta^2]^{-1} [\Delta^2 \mathbf{v}^k + \lambda_2^k (\mathbf{v}^k - \mathbf{z})]$$

(5) 根据式(19)计算  $\tau^{k+1}$ ;

(6) 根据式(18)进行凸组合

$$\mathbf{w}^{k+1} = \tau^{k+1} \mathbf{u}^{k+1} + (1 - \tau^{k+1}) \mathbf{v}^{k+1}, \text{且令}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1}, \mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{w}^{k+1}$$

(7) 若  $\|\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k\| < tol$  则停止。

### 3 数值试验及结果分析

用 3 个参量来衡量所恢复的图像  $\mathbf{u}^*$  与真图像  $\mathbf{u}^0$  的近似程度, 分别用  $RES, RMSE, SNR$  来表示, 其中,  $RES \stackrel{\text{def}}{=} norm(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^0)$

$$RMSE \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{n^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u^*(i, j) - u^0(i, j))^2}$$

$$SNR \stackrel{\text{def}}{=} 10 \times$$

$$\ln \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u^*(i, j) - mean(\mathbf{u}^*))^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u^*(i, j) - u^0(i, j) - mean(\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^0))^2}$$

在 MATLAB6.5 中, 采用  $128 \times 128$  大小的图像 cameraman 进行数值实验, 附加了方差为 0.2 的高斯白噪声。分别用文中提到的 3 种方法 (ROF, CEP, Combined) 进行去噪, 数据如表 1 所示, 去噪效果如图 1 所示。

表 1 用不同模型处理噪声图像 cameraman 的数据

Tab. 1 Data of noised cameraman image Dealing with different models

	RES	SNR	RMSE
ROF	1 204. 9	16. 0	0. 020 6
CEP	1 432. 6	14. 5	0. 022 6
Combined	897. 6	18. 6	0. 017 2



图 1 3 种方法对 cameraman 图像的去噪效果图

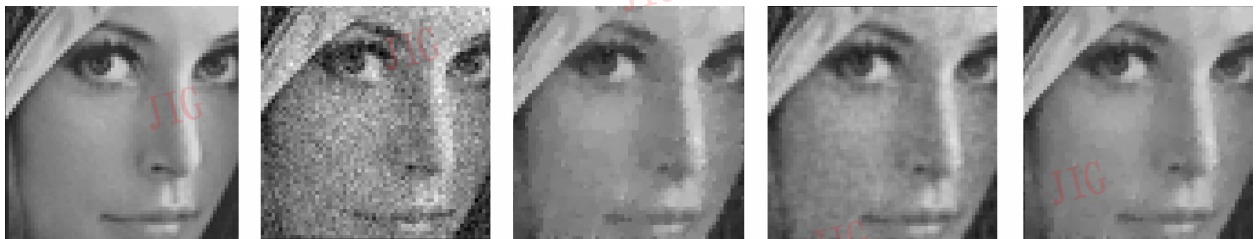
Fig. 1 Denoising Drawings of cameraman image based three methods

改用  $256 \times 256$  大小的 Lena 图像, 同样附加了方差为 0.2 的高斯白噪声, 取其局部部分, 实验所得数据如表 2 所示。从图 2 的效果图中可以看出, ROF 模型恢复的图像具有较强的‘分片’性质, CEP 模型在边缘区域恢复的图像效果较差, 而本文的 Combined 模型吸取了二者的优势, 避免了它们的不足。

表 2 用不同模型处理噪声图像 Lena 局部的数据

Tab. 2 Data of noised Lena image Dealing with different models

	RES	SNR	RMSE
ROF	557.5	12.74	0.0395
CEP	623.8	12.09	0.0432
Combined	387.1	14.20	0.0336



(a) 原始图像

(b) 附加了高斯白噪声的图像

(c) ROF模型

(d) CEP模型

(e) Combined模型

图 2 3 种方法对 Lena 图像的去噪效果图

Fig. 2 Denoising Drawings of Lena image based three methods

从实验中可以看出 Combined 模型在保持边缘的同时削弱了梯子现象, 在同样的噪声水平下, 与本文提到的其他两个模型 ROF、CEP 相比在 RES, RMSE, SNR 上有近 10% 的提高。

### 参考文献 (References)

- 1 Rudin L, Osher S, Fatemi E. nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D, 1992, **60**(1-4):259~268.
- 2 Lysaker M, Lundervold A, Tai X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(12):1579~1590.
- 3 Lysaker M, Osher S, Tai X C. Noise removal using smoothed normals and surface fitting [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, **13**(10):1345~1357.

- 4 Chan T, Marquina A, Mulet P. High-order total variation-based image restoration [J]. SIAM Journal on Scientific Computation, 2000, **22**(2):503~516.
- 5 Greer J B, Bertozzi A L. Traveling wave solutions of fourth order pdes for image processing [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2004, **36**(1):38~68.
- 6 Chan T, Esedoglu S, Park F. A Fourth Order Dual Method for Staircase Reduction in Texture Extraction and Image Restoration Problems [M]. Los Angeles, US: University of California Los Angeles, 2005.
- 7 Chan T, Park F. Data Dependent Multiscale Total Variation Based Image Decomposition and Contrast Preserving Denoising [M]. Los Angeles, US: University of California Los Angeles, 2004.
- 8 Chambolle A. Lions P-L. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. Numerische Mathematik, 1997, **76**(2):167~188.