

# 带尖锐特征的细分曲线参数化及曲线拟合

王 栋<sup>1)</sup> 李桂清<sup>2)</sup> 田绪红<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(华南农业大学信息学院, 广州 510640) <sup>2)</sup>(华南理工大学计算机科学与工程学院, 广州 510640)

**摘 要** 快速精确地估计曲线曲面参数具有广泛的应用。在前人研究的基础上,通过对细分过程及三次 B 样条细分矩阵的特征结构进行分析,将细分模式转换到其特征空间,给出了带尖锐特征的 B 样条细分曲线的参数化形式。并用于处理带尖锐特征的光滑曲线拟合问题。以曲率极大点作为初始拟合点。利用推导的参数化公式构造曲线的尖锐部分并方便误差估计。拟合点为曲线段端点,误差估计时不仅优化计算速度,而且在曲线分支距离过近或自交情况下避免错误匹配。

**关键词** 尖锐特征 参数化 曲线拟合 细分

中图法分类号:TP391 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)08-1554-06

## Parameterization of Subdivision Curve with Sharp Feature and Their Applications

WANG Dong<sup>1)</sup>, LI Gui-qing<sup>2)</sup>, TIAN Xu-hong<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>(College of Informatics, South China Agricultural University, Guangzhou 510640)

<sup>2)</sup>(School of Computer Science & Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640)

**Abstract** The rapid and precise evaluation of curve & surface parameterizations has wide application. In the paper we present a parameterization technique for cubic B-spline subdivision curves with sharp feature. The eigenstructure of the subdivision matrix is analyzed. The subdivision matrix and control points are projected into the eigenspace of matrix. The technique can deal with curve fitting with sharp features directly. The vertices with maximal curvature are as the initial fitting vertices. With the parameterization technique given in this paper, the curve segment with sharp feature is constructed; and the distance between the original data and the curve is also calculated. The fitting vertices are located at the extremities of curve segment; during error estimation it can improve computation speed and avoid mismatching when the target curve is self intersection or when two branches are too close.

**Keywords** sharp feature, parameterization, curve fitting, subdivision

## 1 引 言

细分技术因其简单、易实现、多分辨率等特点在曲线曲面造型中广受欢迎,但由于其非参数化的表达形式使其应用在某些方面受限制。快速精确地估计曲线曲面参数在很多标准操作中都是非常关键的,如拾取、绘制、纹理映射等<sup>[1]</sup>。本文参照文献

[1],通过转换细分模式到其特征空间,给出了三次 B 样条细分曲线在其特征空间的参数化表达形式。在特征空间,细分等同于特征向量与其相应特征值的一个简单比例,这样我们可以直接计算曲线上的点<sup>[1]</sup>。为了定义参数化,我们引入了一组特征基函数,其为幂基,且特征向量对应三次 B 样条基到幂基的基矩阵变换。作为应用,本文采用该技术处理带尖锐特征的光滑曲线拟合,可方便生成曲线并对

基金项目:广东省自然科学基金项目(07006689)

收稿日期:2007-10-30; 改回日期:2008-04-07

第一作者简介:王 栋(1977 ~ ),女。讲师。中山大学计算应用专业硕士研究生。主要研究方向为 CAD、几何造型、数字几何处理等。

E-mail:wdngng@163.com

曲线拟合效果进行估计。

曲线拟合在计算机视觉, CAD/CAM, 逆向工程等方面有着广泛的应用。一般生成的曲线从拟合精度、控制点个数和拟合速度 3 个方面考虑。要求在保持容忍误差控制的前提下, 曲线具有较少的控制点和较快的拟合速度。由于事先无法确定控制点的个数和位置, 该问题通常采用优化的方法循环调整<sup>[2]</sup>。Yang 等人通过插入或删除控制点进行动态调整<sup>[3]</sup>, 但其在处理时比较费时, 而且算法对初始控制点的位置和个数没做处理。Park 给出了误差控制的平面 B 样条曲线表示, 其先用多边形逼近给定的曲线, 然后用 B 样条曲线拟合多边形<sup>[4]</sup>。随后 Park 又提出一种基于优势点的自适应的 B 样条曲线拟合方法<sup>[2]</sup>, 优势点是对曲线的形状其重要作用的点。他们所讨论的均为采用光滑的 B 样条曲线逼近, 没有考虑曲线的尖锐特征。Ma 等人和李桂清等人给出了带尖锐特征的细分曲面拟合方法<sup>[5,6]</sup>, 但未能对误差进行控制。Guillaume 等人提出了一种用细分技术分段逼近光滑多边形曲线<sup>[7]</sup>。但在误差估计时, 回避了细分技术的非参数表达形式。本文给出了三次 B 样条细分曲线的参数化形式, 可直接处理带尖锐特征的分段光滑曲线拟合并便于误差估计。

## 2 带尖锐特征的细分曲线参数化

细分曲线是通过对初始控制多边形按照一定的细分规则不断递归加细生成的极限曲线<sup>[8]</sup>, 因而难以直接获取曲线上某一点的参数。但是通过对某些细分规则进行处理, 可以将其转换成参数化形式。下面以 B 样条细分为例进行讨论。

### 2.1 基于三次 B 样条的带尖锐特征的细分模式

B 样条细分规则如图 1 所示, 分为 E-顶点, 规则

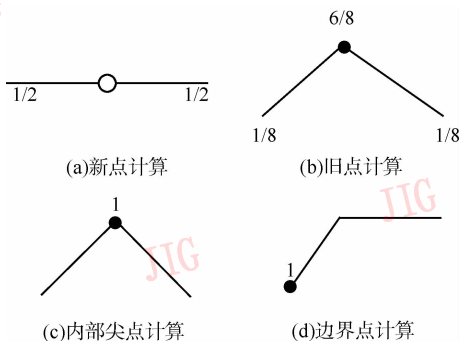


图 1 B 样条细分规则  
Fig. 1 B-spline subdivision rules

V-顶点及异常 V-顶点的计算。设第  $k$  次细分的顶点为  $p_{i-1}^k, p_i^k, p_{i+1}^k, p_{i+2}^k$ , 则第  $k+1$  次细分的顶点坐标计算为

(1) E-顶点:

$$p_{2i+1}^{k+1} = (p_i^k + p_{i+1}^k) / 2$$

(2) 规则 V-顶点:

$$p_{2i}^{k+1} = (p_{i-1}^k + 6p_i^k + p_{i+1}^k) / 8$$

(3) 异常 V-顶点:

$$p_{2i}^{k+1} = p_i^k$$

### 2.2 细分曲线参数化

设  $p_1 p_2 \dots p_n = p_1^0 p_2^0 \dots p_n^0$  为初始控制多边形。引入

顶点向量  $\tilde{P}_i^k = (p_i^k, p_{i+1}^k, p_{i+2}^k)^T$  和  $\hat{P}_i^k = (p_{i-1}^k, p_i^k, p_{i+1}^k, p_{i+2}^k)^T$ 。希望找到一种闭形式来计算线段  $p_i p_{i+1}$  所对应的细分曲线段。

#### 2.2.1 $p_i$ 和 $p_{i+1}$ 均为规则点

此时对应的曲线段由  $\hat{P}_i^k$  确定, 是一段均匀三次 B 样条细分曲线:

$$C_i(u) = B(u) \hat{P}_i^k \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (1)$$

式中,  $B(u) = (B_0(u), B_1(u), B_2(u), B_3(u))$  是三次 B 样条基函数<sup>[9]</sup>  $B_l(t)$  ( $l = 0, 1, 2, 3$ ) 构成的向量。

#### 2.2.2 $p_i$ 和 $p_{i+1}$ 均为尖锐点

所对应的极限曲线退化为一条线段, 其参数化形式为

$$C_i(u) = (1-u)p_i + up_{i+1} \quad 0 \leq u \leq 1 \quad (2)$$

#### 2.2.3 其他情形

$p_i$  和  $p_{i+1}$  一个为尖锐点另一为规则点又可分为两种情形。只考虑其中一种:  $p_i$  为尖锐点而  $p_{i+1}$  为规则顶点;  $p_i$  规则,  $p_{i+1}$  尖锐, 两种情形是类似的, 这里只考虑前一种情形。此时与  $p_i p_{i+1}$  对应的细分曲线段可分为两半段, 前半段为由  $\tilde{P}_{2i}^k$  确定的非规则细分曲线段; 后半段为由  $\hat{P}_{2i+1}^k$  确定的规则三次 B 样条曲线段。剩下需要对前者进行参数化, 一般地考虑与  $p_{2^k i}^k p_{2^k i+1}^k$  对应的曲线段的参数化。它也可分为

$$\tilde{P}_{2^{k+1}i}^{k+1} = A \tilde{P}_{2^k i}^k$$

确定的不规则曲线段和

$$\hat{P}_{2^{k+1}i+1}^{k+1} = \bar{A} \tilde{P}_i^k$$

其中,  $A = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 6 & 1 \end{bmatrix}$  和  $\bar{A} = \begin{bmatrix} A \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$  分

别称为尖锐顶点附近的细分矩阵和扩展细分矩阵。

根据细分规则易推知

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2^{k+1}i}^{k+1} &= A \tilde{P}_{2^k i}^k = A^k \tilde{P}_i^0 \\ \hat{P}_{2^{k+1}i+1}^{k+1} &= \bar{A} \tilde{P}_{2^k i}^k = \bar{A} A^{k-1} \tilde{P}_i^0 \end{aligned}$$

对 A 进行特征分解

$$A = UDU^{-1}$$

其中

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1/8 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$A^{k-1} = U \text{diag}\{8^{1-k}, 2^{1-k}, 1\} U^{-1}$$

$C_i(u)$  ( $0 \leq u \leq 1$ ) 可看作由控制点  $\hat{P}_{2^{k+1}i+1}^{k+1}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$  确定的由无穷多段三次 B 样条曲线段构成。现在考虑由  $\hat{P}_{2^{k+1}i+1}^{k+1} = p_{2^{k+1}i}^{k+1}, p_{2^{k+1}i+1}^{k+1}, p_{2^{k+1}i+2}^{k+1}, p_{2^{k+1}i+3}^{k+1}$  确定的曲线段的参数化。设  $Q_{k+1,i}(t)$  的三次 B 样条曲线则有

$$Q_{k+1,i}(t) = B(t) \hat{P}_{2^{k+1}i+1}^{k+1} \quad 0 < t \leq 1$$

$C_i(u)$  与  $Q_{k+1,i}(t)$  的关系如下:

$$\begin{aligned} Q_{k+1,i}(t) &= B(2^{k+1}u - 1) \bar{A} A^{k-1} \tilde{P}_i^0 \\ &= B(2^{k+1}u - 1) \bar{A} U D^{k-1} U^{-1} \tilde{P}_i^0 \\ &= C_i(u) \end{aligned}$$

其中,  $\frac{1}{2^{k+1}} < u \leq \frac{1}{2^k}, k \in \mathbf{Z}$ 。

根据以上推导,可得如下结论:

**定理 1** 由  $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  确定的一段带尖锐特征  $p_i$  的 B 样条细分曲线可表示为参数曲线  $C_i(u)$  的形式,该曲线可以看作一系列规则的三次 B 样条曲线  $Q_{k,i}(t)$  之并,且有:

- (1)  $Q_{k,i}(0) = Q_{k+1,i}(1)$ ;
- (2) 当  $k \rightarrow \infty$  时,  $Q_{k,i}(0) = C_i(0)$ ;
- (3)  $Q_{k,i}(t) = C_i(u), t = 2^k u - 1, \frac{1}{2^k} < u \leq \frac{1}{2^{k-1}}$ 。

记  $\tilde{B}(u) = B(u)AU = (x_1(u), x_2(u), x_3(u))$ , 这是一组独立于控制顶点和细分次数的三次样条函数,称为本文描述的细分曲线的特征基函数。又记

$R_i = U^{-1} \tilde{P}_i^0 = (c_{1,i}, c_{2,i}, c_{3,i})^T, R_i$  可看作控制顶点

$\tilde{P}_i^0$  在细分矩阵特征空间的投影,则最终结果可写成如下闭合形式:

$$C_i(u) = \sum_{l=1}^3 x_l(u) \lambda_l^{\lceil -\log u \rceil - 1} c_{l,i} \quad 0 < u \leq 1$$

对于给定的细分规则,其  $\lambda$  值固定,定义

$$\varphi_l(u) = x_l(u) \lambda_l^{\lceil -\log u \rceil - 1}, \text{有定理 2。}$$

**定理 2** 由  $p_i, p_{i+1}, p_{i+2}$  确定的一段带尖锐特征  $p_i$  的 B 样条细分曲线可以表示成如下式所示的参数化形式

$$C_i(u) = \sum_{l=1}^3 \varphi_l(u) c_{l,i} \quad 0 < u \leq 1 \quad (3)$$

### 3 带尖锐特征的曲线拟合

给定数据点  $v_i, i=1, 2, \dots, n$ , 期望找到曲线  $f$  对其进行拟合。拟合时,在满足误差控制的范围内,主要考虑两方面的内容:一是控制点的个数和位置尽可能最优;二是选取的参数曲线方程在具有光滑特性的同时能够处理数据的尖锐特性。控制点的确定通常通过选取合适的拟合数据获取。在表现曲线形状时,一些数据扮演重要作用,它们一般位于边界点或曲率极大点处。本文先从原始数据中将其找出,并根据曲率极大点的特征信息,将之分为光滑点和尖点。以这些点作为初始拟合数据反求控制点,然后利用方程式(1)~式(3)生成曲线。初次拟合可实现对原始数据的近似模拟。然后计算原始数据到曲线的距离,对不满足要求的地方插入拟合点重新生成曲线。采用循环优化的方法逐层添加控制点,直至生成的曲线满足给定要求。

### 4 初始数据处理

曲线拟合的一个重要方面是在保持理想精度的前提下采用较少的控制点。由于事先不知道控制点的个数、位置,通常采用循环优化的方法解决。其中初始控制点的数目和位置显得尤为重要,初始曲线逼近越好,收敛速度越快<sup>[2]</sup>。在给定的数据中,曲率极大点对曲线的形状起重要作用,通常以这些点作为拟合点构造初始曲线。曲率极大点分光滑点和尖点两种。

#### 4.1 尖锐特征定义

曲线的尖锐特征表现为尖点,即指曲线上  $C^0$  连续的点。由于曲线拟合时,光滑点和尖点的处理方

式不同,所以特意把尖点提取出来以作特殊对待。一个点是否为尖点是由以它为公共顶点的两边之间夹角确定。当夹角小于指定阈值时,视其为尖点<sup>[8]</sup>。对于开曲线,两个端点非常重要,将其作为尖点对待。

### 4.2 特征提取

特征点的选择基于对目标曲线的形状分析。点的曲率在描述物体的几何形状时提供了重要信息。曲率较大的地方曲线形状较复杂,而较小的地方相对平坦。曲率极大点可被看作特征点。曲率的计算根据初始数据的情况而定,如果给定了曲线方程,可以直接获取曲率方程并非常容易求解极大点。如果给定的数据带噪声,该情况的处理比较复杂,通常采用曲线拟合的方法获取一条基曲线方程,其基本表现了曲线的形状而且产生的曲率光滑变化<sup>[2]</sup>。本文讨论的数据不带噪声,可以采用离散曲率的方法。

对于给定数据  $v_i$ , 离散曲率定义为相邻 3 点  $v_{i-1}, v_i, v_{i+1}$  所构成三角形的外接圆半径的倒数。即

$$K(v_i) = \frac{2\sin(\varphi_i)}{d_i}$$

式中,  $K(v_i)$  表示点  $v_i$  的曲率,  $\varphi_i$  是向量  $\overrightarrow{v_{i-1}v_i}$  和  $\overrightarrow{v_i v_{i+1}}$  之间的夹角,  $d_i$  是向量  $\overrightarrow{v_{i-1}v_{i+1}}$  的长度  $\|v_{i-1}v_{i+1}\|$ 。

根据  $K(v_i) > K(v_{i-1})$  及  $K(v_i) > K(v_{i+1})$ , 得到局部曲率极大点  $q_i$ , 其中尖点一定为曲率极大点。并根据夹角  $\varphi_i$  将曲率极大点分为尖点和光滑点。如果数据非封闭,为边界点指定一个较大的曲率值,并将之视为尖点。

### 4.3 曲线拟合

采取的拟合方法实际上是常用的反插技术。记从原始数据选取的点集按顺序构成的向量为  $Q$ , 相应的控制多边形顶点向量为  $P$ 。如果  $Q$  的分量个数(即点集大小)为  $k$ , 则  $P$  和  $Q$  都是  $k \times 3$  矩阵。根据细分规则可建立如下控制顶点反求方程:

$$MP = Q \tag{4}$$

这里  $M$  为  $k \times k$  矩阵, 上述方程的构造方法描述如下:

(1)  $q_i \in Q$  为尖锐特征点, 则  $p_i = q_i$ , 亦即相应的控制点  $p_i \in Q$  为异常点。

(2)  $q_i \in Q$  为规则点, 根据 B 样条曲线方程有  $(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})/6 = q_i$ , 且对应的控制点  $p_i$  为规则点。

开始的时候, 取  $Q$  为由曲率极大点构成的向量

进行控制顶点反求, 这样可以保证最后的结果比较光滑, 这也是文献[7]的做法。图 2(a) 给出了图 2(b) 中所示的目标曲线数据点的曲率变化情况, 从图中可以看出, 有 9 个曲率极大值, 其对应的数据点如图 2(b) 所示, 其中点 1、4、6、9 为尖点。并且图 2(b) 给出了以 9 个曲率极大点作为拟合点确定的初始曲线及对应的控制多边形, 从图中可以看出, 其基本表现了目标曲线的形状。

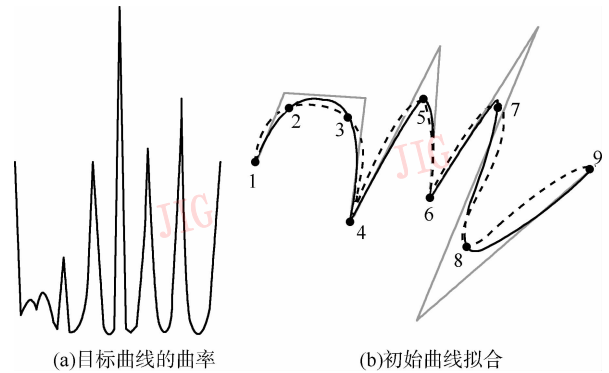


图 2 初始数据处理  
Fig. 2 Initial data process

得到初始控制多边形  $P$  后, 逐一检查原始数据点到  $P$  所确定的细分曲线的最近距离, 对不满足误差要求的部分加入新的拟合点到  $Q$  中, 然后利用式(4)求解新的控制多边形  $P$ 。重复此过程直到所有点到细分曲线的距离都小于指定容忍误差为止。

## 5 误差控制

曲线拟合的效果如何, 通常通过误差估计来衡量。给定数据点  $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ , 希望找到一组控制点  $p_i, i = 1, 2, \dots, m$ , 使其确定的曲线  $f$  满足  $\max_{i=1,2,\dots,n} d(f(t), v_i) \leq \delta$ , 其中  $\delta$  是容忍误差,  $f(t)$  是由控制点  $p_i$  确定的保持数据本身尖锐特征的曲线方程,  $d(f(t), v_i)$  是数据点  $v_i$  到曲线  $f$  最近点的距离:  $d(f(t), v_i) = \min \|f(t) - v_i\|$ 。计算点  $v_i$  到曲线  $f$  的距离关键是确定对应脚点的参数  $t_i$ , 其可通过解方程

$$(f(t) - v_i)^T \cdot f'(t) = 0 \tag{5}$$

求得。

曲线拟合时, 拟合点  $q_i, i = 1, 2, \dots, m$  将原始有序开数据分成  $m-1$  部分, 有序闭数据分成  $m$  部分。由 4.3 节可知, 每部分分别与相应的曲线段对应, 且

拟合点为曲线段的端点。从而曲线方程  $f(t)$  便可用对应曲线段的表达式  $C(t)$  表示。这样方程式 (5) 的表达式  $f$  可用其中的一部分表示,即方程式 (4) 可改写为

$$(C(t) - \mathbf{v}_i)^T \cdot C'(t) = 0 \quad (6)$$

其中,方程  $C(t)$  根据  $\mathbf{v}_i$  所对应曲线段的两端点属性从方程式 (1) ~ 式 (3) 中选择。这样做不仅提高计算速度,而且可以避免曲线某些分支距离太近或者自交时产生不正确结果。如图 3 所示,如果曲线  $f$  采用整个表达式表示,在分支太近的区域就会出现错误匹配。方程式 (6) 是关于  $t$  的隐式方程,可用牛顿迭代法求解, $t$  的初始值采用累加弦长的方法获取,即  $t = \frac{\sum_{k=1}^j \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\|}{\sum_{k=1}^l \|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_{k-1}\|}$ ,其中,

$\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_l$  是  $\mathbf{v}_i$  所在部分的两端点, $j$  是  $\mathbf{v}_i$  在该部分有序数据点的位置, $l$  是该部分点的个数。

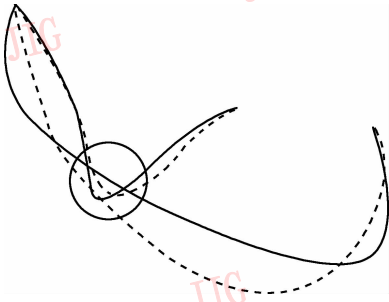
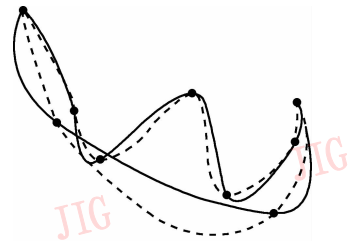


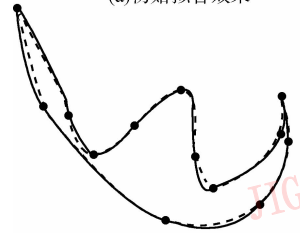
图 3 误差估计  
fig. 3 Error estimation

## 6 实验结果

图 4 和图 5 给了两组实验,一组表示的是开曲线,一组为闭曲线。原始数据都带有尖点。图 4 原始数据点为 64 个,其中 9 个曲率极大点;图 5 原始数据点为 66 个,其中 8 个曲率极大点。图 4(a) 和图 5(a) 是根据曲率极大点作为初始拟合数据得到的曲线拟合效果,从图中可以看出,其基本反映了原始数据的形状,获得了较好的初始拟合效果。两组实验数据的容忍误差均为 0.01。图 4(b) 经过 4 次循环生成的曲线在误差范围内;图 5(b) 经过 6 次循环生成期望的曲线。从图中可以看出,较平坦的部分选择的拟合点较少,较复杂的区域选择的拟合点较多;而且,如果曲线的某一段误差较大,这是因为该段控制点不够,我们通过逐渐插入新的控制点增加曲线段使生成的曲线在误差控制范围内。



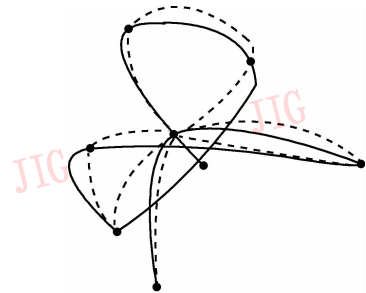
(a)初始拟合效果



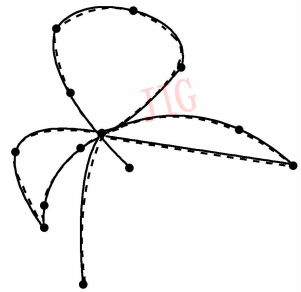
(b)最终拟合效果

图 4 闭曲线拟合

Fig. 4 Close curve fitting



(a)初始拟合效果



(b)最终拟合效果

图 5 开曲线拟合

Fig. 5 Open curve fitting

## 7 结论

该文给出了一种带尖锐特征的 B 样条细分曲线参数化技术和自适应的曲线拟合方法。在细分方案的特征空间定义一组依赖于细分规则的特征基函数,并通过投影得到控制顶点在特征空间的表现形式,从而建立曲线的参数化方程。将该技术用于处

理带尖锐特征的光滑曲线拟合,细分模式转化为参数形式便于误差估计。以曲率极大点作为初始拟合点,可以获得较好的初始拟合效果。采用自适应的拟合点循环加入方法,使得较少的拟合点获得较好的拟合效果。虽然文中讨论的是带尖锐特征的细分曲线参数化及曲线拟合,但也可以扩展到曲面上,将来的工作希望用细分曲面的参数化处理任意情况的曲面拟合。

### 参考文献 (References)

- 1 Stam J. Exact evaluation of Catmull-Clark subdivision surfaces at arbitrary parameter values [A]. In: Proceedings of SIGGRAPH 1998 [C], New York: ACM Press, 1998: 395 ~ 404.
- 2 Park H, Lee J-H. B-spline curve fitting based on adaptive curve refinement using dominant points [J]. Computer-Aided Design, 2007, **39**(6): 439 ~ 451.
- 3 Yang H, Wang W, Sun J. Control point adjustment for B-spline curve approximation [J]. Computer-Aided Design, 2004, **36** (7): 639 ~ 652.
- 4 Park H. An error-bounded approximate method for representing planar curves in B-splines [J]. Computer Aided Geometric Design 2004: **21**(5): 479 ~ 97.
- 5 Ma W, Ma X, Tso S, *et al.* A direct approach for subdivision surface fitting from a dense triangular mesh [J]. Computer Aided Design, 2004, **36**(16): 525 ~ 536.
- 6 Li Gui-qing, Ma Wei-ying, Bao Hu-jun. Fitting system using loop subdivision surfaces with sharp features [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, **17**(6): 1179 ~ 1185. [李桂清, 马维银, 鲍虎军. 带尖锐特征的 Loop 细分曲面拟合系统 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, **17**(6): 1179 ~ 1185.]
- 7 Lavoue G, Dupont F, Baskurt A. A new subdivision based approach for piecewise smooth approximation of 3D polygonal curves [J]. Pattern Recognition, 2005, **38**(8): 1139 ~ 1151.
- 8 Zorin D, Schroder P. Subdivision for modeling and animation [A]. In: SIGGRAPH 2000 Course Notes [C], New Orleans, 2000: 65 ~ 102.
- 9 Zhu Xin-xong. Technology of Free form Curves and Surface Modeling [M]. Beijing: Science Press, 2000: 118. [朱心雄. 自由曲线曲面造型技术 [M]. 北京: 科学出版社, 2000: 118.]