

基于两变量 Krawtchouk 矩的图像重建

吴海勇

(南京晓庄学院物理系, 南京 210017) (东南大学计算机科学与工程学院, 南京 210096)

摘要 传统的离散正交 Krawtchouk 矩的基函数由两个单变量的 Krawtchouk 多项式乘积构成, 它割裂平面两个方向之间的联系。提出了一种新的、以两变量 Krawtchouk 正交多项式为基函数的图像矩, 并推导了正则化后两变量多项式的简单的计算方法。重建实验结果表明, 相对于同系数的单变量的离散正交矩, 两变量离散正交矩的重建误差更小。

关键词 两变量 Krawtchouk 矩 图像重建 离散正交矩

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)09-1645-04

Image Reconstruction by Krawtchouk Moments of Two Variables

WU Hai-yong

(Department of Physics, Nanjing Xiaozhuang College, Nanjing 210017)

(School of Computer Science and Engineer, Southeast University, Nanjing 210096)

Abstract The basis functions of traditional Krawtchouk moments are constructed by the product of two Krawtchouk polynomials of one variable. However, the relation between two directions of the plane is isolated. Hence, new image moments whose basis functions are Krawtchouk polynomials of two variables are proposed in this paper, while a simple method is deduced to compute normalized polynomials. Reconstruction experiments show that, compared with discrete orthogonal moments of one variable, moments of two variables have less reconstruction error.

Keywords Krawtchouk moments of two variables, image reconstruction, discrete orthogonal moments

1 引言

从一幅图像计算出来的矩集, 通常描述了该图像形状的全局特征, 并提供了一些关于该图像不同类型的几何特征信息, 这些信息在图像平移变换、比例变换或者旋转变换后能够保持不变。这些不变量使得矩在模式识别、图像分析等领域得到了广泛的应用^[1-5]。

Teague 提出了连续正交 Legendre 矩和 Zenike 矩^[3], 克服了几何矩^[6]无法重建图像的不足, 并且能以最少的冗余信息来存储图像。对于离散的 2 维图像, 前面所定义连续正交矩都存在着离散

误差和坐标转换的问题。因此, 离散正交矩^[7-10]相对于传统的连续矩, 有着更好的图像表现能力。由于 Krawtchouk 矩可以通过调整参数, 来获得图像任意的感兴趣区域的特征信息, 因此, 它比其他离散正交矩有着更广泛的应用前景。它利用两个单变量 Krawtchouk 多项式相乘而构成了 2 维正交基, 但是这样却割裂了图像平面两个方向间的联系。本文提出了一种直接以两变量离散正交 Krawtchouk 多项式为变换核的离散正交矩, 对二值图像、灰度图像以及噪声图像进行了重建实验, 从重建误差上比较了两变量离散正交 Krawtchouk 矩和单变量离散正交 Krawtchouk 矩之间的图像表现能力。

基金项目: 江苏省教育厅自然科学基金项目(03KJD140120)

收稿日期: 2008-01-10; 改回日期: 2008-04-14

第一作者简介: 吴海勇(1976~), 男, 讲师。东南大学计算机科学与工程学院图像处理与科学可视化专业博士研究生。研究方向包括医学图像分析、特征识别等。E-mail: wu.haiyong@163.com

2 两变量 Krawtchouk 矩

2.1 两变量 Krawtchouk 多项式

两变量的 Krawtchouk 多项式^[11]：

$$K\left(\begin{matrix} q_1, q_2 \\ \Delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1, y_2 \\ n_1, n_2 \end{matrix}\right) = k_{n_1}\left(y_1 + y_2, \frac{q_1}{q_1 + q_2} \middle| y_1\right) \times k_{n_2}(\Delta - n_1, q_1 + q_2 \mid -n_1 + y_1 + y_2) \quad (1)$$

式中, $q_1, q_2 > 0, q_1 + q_2 < 1, y_1, y_2 \geq 0, y_1 + y_2 \leq \Delta$. $k_n(x)$ 为单变量的 Krawtchouk 多项式^[11]：

$$k_n(N, q \mid x) = (-N)_{n_2} F_1\left(\begin{matrix} -n, -x \\ -N \end{matrix} \middle| q^{-1}\right) \quad (2)$$

$(a)_n$ 为 Pochhammer 级数：

$$(a)_n = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad (3)$$

$F_s(\cdot)$ 为超几何级数：

$${}_rF_s\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_s \end{matrix} \middle| z\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^r (a_j)_k}{\prod_{j=1}^s (b_j)_k} \times \frac{z^k}{k!} \quad (4)$$

式(1)满足正交性：

$$\sum_{y_2} \sum_{y_1} \rho(y_1, y_2) K_{n_1, n_2}(y_1, y_2) K_{m_1, m_2}(y_1, y_2) = \lambda(n_1, n_2) \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} \quad (5)$$

式中, $\rho(y_1, y_2)$ 为权函数, $\lambda(n_1, n_2)$ 为内积：

$$\begin{cases} \rho(y_1, y_2) = \frac{\Delta!}{(\Delta - y_1 - y_2)!} \times \frac{q_1^{y_1}}{y_1!} \times \frac{q_2^{y_2}}{y_2!} \times (1 - q_1 - q_2)^{\Delta - y_1 - y_2} \\ \lambda(n_1, n_2) = n_1! q_1^{-n_1} n_2! (q_1 + q_2)^{-n_2 + n_1} \times q_2^{n_1} \frac{\Delta!}{(\Delta - n_1 - n_2)!} (1 - q_1 - q_2)^{n_2} \end{cases} \quad (6)$$

式(1)的值通常都是很大, 为了避免数值溢出, 通常用权函数和内积去正则化：

$$\tilde{K}_{n_1, n_2}(y_1, y_2) = \sqrt{\frac{\rho(y_1, y_2)}{\lambda(n_1, n_2)}} K_{n_1, n_2}(y_1, y_2) \quad (7)$$

令 $y = y_1, x = y_1 + y_2$, 式(1)可以改写为

$$K\left(\begin{matrix} q_1, q_2 \\ \Delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x, y \\ n_1, n_2 \end{matrix}\right) = k_{n_1}\left(x, \frac{q_1}{q_1 + q_2} \middle| y\right) \times k_{n_2}(\Delta - n_1, q_1 + q_2 \mid -n_1 + x) \quad (8)$$

正则化后的两变量 Krawtchouk 多项式的正交性可以这样描述：

$$\sum_{x=0}^{\Delta} \sum_{y=0}^x \tilde{K}_{n_1, n_2}(x, y) \tilde{K}_{m_1, m_2}(x, y) = \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} \quad (9)$$

2.2 图像的 Krawtchouk 矩

由 Krawtchouk 多项式的定义可知, 式(8)中变

量 x, y 的范围: $0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq \Delta$, 构造 $\tilde{K}_{n_1, n_2}(x, y)$ 的对称多项式：

$$\tilde{K}'_{n_1, n_2}(x, y) = \tilde{K}_{\Delta - n_2, \Delta - n_1}(y - 1, x) \quad (10)$$

在离散平面上, 构造新的正交多项式：

$$G_{n_1, n_2}(x, y) = \begin{cases} \tilde{K}_{n_1, n_2}(x, y) & 0 \leq x \leq \Delta \\ & 0 \leq y \leq x \\ \tilde{K}'_{n_1, n_2}(x, y) & 0 \leq x \leq y - 1 \\ & 1 \leq y \leq \Delta \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (11)$$

$G_{n_1, n_2}(x, y)$ 满足正交性：

$$\sum_{x=0}^{\Delta} \sum_{y=0}^{\Delta} G_{n_1, n_2}(x, y) G_{m_1, m_2}(x, y) = \delta_{n_1, m_1} \delta_{n_2, m_2} \quad (12)$$

式(12)中变量 x, y 的范围变为 $0 \leq y \leq \Delta, 0 \leq x \leq \Delta$. 设图像的灰度函数为 $f(x, y)$, 定义图像的两变量 Krawtchouk 正交矩为

$$M(n_1, n_2) = \sum_{x=0}^{\Delta} \sum_{y=0}^{\Delta} f(x, y) G_{n_1, n_2}(x, y) \quad (13)$$

根据多项式的正交性, 可以由 2Δ 阶矩完全重建出图像：

$$f(x, y) = \sum_{n_1=0}^{\Delta} \sum_{n_2=0}^{\Delta} M(n_1, n_2) G_{n_1, n_2}(x, y) \quad (14)$$

重建时, 为了减少计算量, 通常只计算到 K 阶 ($0 \leq K \leq \Delta$):

$$\tilde{f}(x, y) = \sum_{n_1=0}^K \sum_{n_2=0}^{K-n_1} M(n_1, n_2) G_{n_1, n_2}(x, y) \quad (15)$$

2.3 多项式的计算

直接计算正则化后的多项式比较困难, 考虑到它是由两个多项式的乘积构成, 先分别正则化两个乘积项, 文献[8]给出了正则化的单变量 Krawtchouk 多项式：

$$\tilde{k}_n(N, q \mid x) = \sqrt{\frac{\rho(x)}{\lambda(n)}} k_n(N, q \mid x) \quad (16)$$

式中,

$$\begin{cases} \rho(x) = \binom{N}{x} q^x (1 - q)^{N-x} \\ \lambda(n) = \frac{N! n!}{(N - n)!} q^{-n} (1 - q)^n \end{cases} \quad (17)$$

对于式(8)中的第 1 个多项式, 令 $n = n_1, N = y_1 + y_2, q = q_1 / (q_1 + q_2), x = y_1$, 代入式(17)得：

$$\begin{cases} \rho_1(y_1, y_2) = \binom{y_1 + y_2}{y_1} \left(\frac{q_1}{q_1 + q_2}\right)^{y_1} \left(\frac{q_2}{q_1 + q_2}\right)^{y_2} \\ \lambda_1(n_1) = \frac{(y_1 + y_2)! n_1!}{(y_1 + y_2 - n_1)!} \left(\frac{q_1}{q_1 + q_2}\right)^{-n_1} \left(\frac{q_2}{q_1 + q_2}\right)^{n_1} \end{cases} \quad (18)$$

同样对于第 2 个多项式,令 $n = n_2, N = \Delta - n_1$, 式中,

$q = q_1 + q_2, x = -n_1 + y_1 + y_2$, 则

$$\begin{cases} \rho_2(y_1, y_2, n_1) = \binom{\Delta - n_1}{-n_1 + y_1 + y_2} \times \\ (q_1 + q_2)^{-n_1 + y_1 + y_2} (1 - q_1 - q_2)^{\Delta - y_1 - y_2} \\ \lambda_2(n_1, n_2) = \frac{(\Delta - n_1)! n_2!}{(\Delta - n_1 - n_2)!} \times \\ (q_1 + q_2)^{-n_2} (1 - q_1 - q_2)^{n_2} \end{cases} \quad (19)$$

考虑式(6)、式(18)和式(19),可以得到下面等式成立。

$$\frac{\rho(y_1, y_2)}{\lambda(n_1, n_2)} = \frac{\rho_1(y_1, y_2)}{\lambda_1(n_1)} \times \frac{\rho_2(y_1, y_2, n_1)}{\lambda_2(n_1, n_2)} \quad (20)$$

因此,式(7)可变为

$$\tilde{k} \left(\begin{matrix} q_1, q_2 \\ \Delta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} y_1, y_2 \\ n_1, n_2 \end{matrix} \right) = \tilde{k}_{n_1} \left(y_1 + y_2, \frac{q_1}{q_1 + q_2} \middle| y_1 \right) \times \tilde{k}_{n_2} \left(\Delta - n_1, q_1 + q_2 \middle| -n_1 + y_1 + y_2 \right) \quad (21)$$

这意味着,正则化后的两变量 Krawtchouk 多项式可以用单变量的有关结论来计算,而且式(10)的对称性可以减少近一半的计算量。正则化后的单变量多项式,一般用 3 项递推式来计算^[11]:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{n+1}(x) &= A \times \frac{d_k(n)}{d_k(n+1)} \times \tilde{k}_n(x) \\ &+ B \times \frac{d_k(n-1)}{d_k(n+1)} \times \tilde{k}_{n-1}(x) \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{cases} d_k(n) = \frac{(-1)^n n!}{(-N)_n} \times \left(\frac{1-q}{q} \right)^n \\ A = \frac{(p(N-n) + n(1-p) - x)}{p(N-n)} \\ B = \frac{n(1-p)}{p(N-n)} \end{cases} \quad (23)$$

迭代的初始值为

$$\begin{cases} \tilde{k}_0(x) = \sqrt{\frac{N!}{(N-x)! x!}} q^x (1-q)^{N-x} \\ \tilde{k}_1(x) = \sqrt{\frac{q}{N(1-q)}} \left(\frac{x}{q} - N \right) \times \tilde{k}_0(x) \end{cases} \quad (24)$$

3 实验结果

图 1 为测试图像。用文献[8]中提出的单变量 Krawtchouk 矩对图 1(a)和(b)重建。Krawtchouk 矩的参数 q 决定了提取特征的主要区域(也就是感兴趣区域),以图像的几何中心点为参照点, $q > 0.5$ 表示水平方向上偏右,垂直方向上偏下部分; $q < 0.5$ 表示水平方向上偏左,垂直方向上偏上部分,结合图 1(b)的特点,并考虑到 $q_1 + q_2 < 1$, 单变量 Krawtchouk 矩的参数取 $q = 0.4$, 两变量的参数取 $q_1 = q_2 = 0.4$ 。



图 1 测试图像

Fig. 1 Images to be tested

对于二值图像,利用式(15)得到的重建结果后还需进行阈值化处理:

$$\hat{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \tilde{f}(x, y) < 0.5 \\ 1 & \tilde{f}(x, y) \geq 0.5 \end{cases} \quad (25)$$

定义二值图像重建误差为

$$e = \frac{1}{(\Delta + 1)^2} \sum_{x=0}^{\Delta} \sum_{y=0}^{\Delta} |\hat{f}(x, y) - f(x, y)| \quad (26)$$

对于灰度图像,定义重建误差为

$$e = \frac{1}{(\Delta + 1)^2} \sum_{x=0}^{\Delta} \sum_{y=0}^{\Delta} |\tilde{f}(x, y) - f(x, y)| \quad (27)$$

图 2 和图 3 描绘了单变量离散正交矩和两变量离散正交矩的重建误差。可以看出,两变量离散正交矩不仅在相同重建阶数下,重建误差更小;而且随着重建阶数的增加,误差收敛的速度更快。

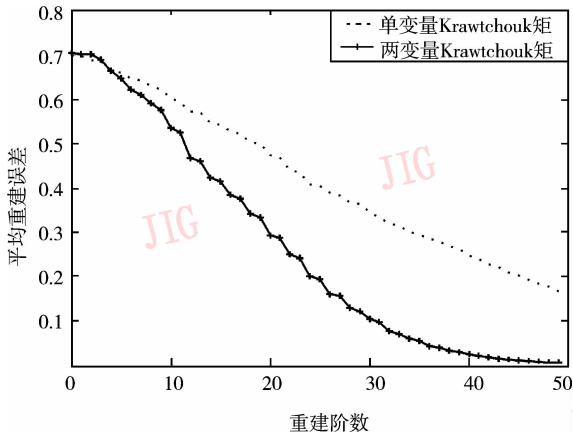


图 2 二值图像重建误差

Fig. 2 Reconstruction error of binary image

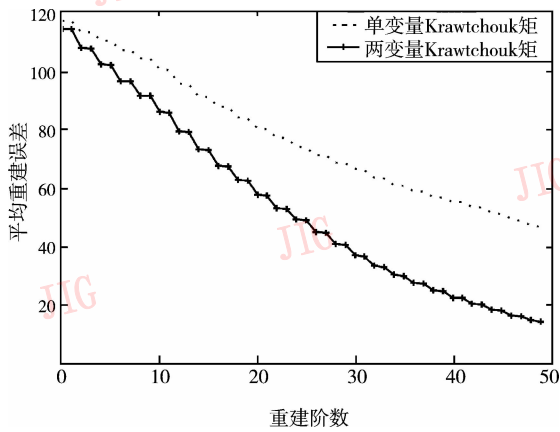


图 3 灰度图像重建误差

Fig. 3 Reconstruction error of gray image

定义灰度图像 $f(x, y)$ 加噪声后的图像为 $\tilde{f}(x, y)$, 用 $\tilde{f}(x, y)$ 代替 $f(x, y)$ 代入式 (13) 和式 (15), 得到重建后的图像 $\tilde{f}(x, y)$, 用式 (27) 来定义噪声图像的重建误差 e 。

由图 3 可以看出,灰度图像前 50 阶的矩,可以保存约 90% 图像的信息,对于噪声污染后的图像,需要的阶数要高些,经过实验发现,在 65 阶的时候,两变量的矩就可以重建出图像,而单变量的重建图像还存在着畸变。图 4(a) 和 (b) 分别描述了用 65 阶的单变量和两变量 Krawtchouk 矩对图 1(c) 进行重建后的图像和重建误差。

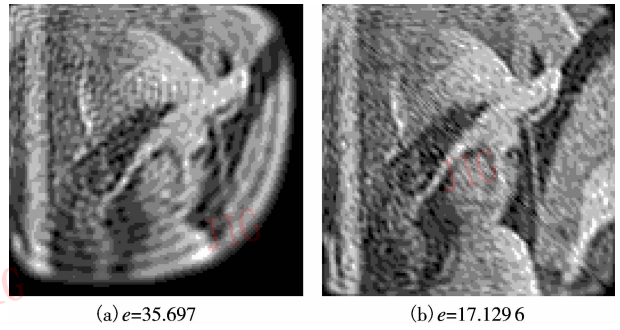


图 4 噪声图像重建

Fig. 4 Reconstruction of noisy image

4 结 论

本文提出了基于两变量离散正交多项式的图像矩,将之应用于图像的重建,分别对二值图像、灰度图像和有噪声图像重建比较,实验结果表明,两变量 Krawtchouk 矩比同参数的单变量离散正交矩能够更好的描述图像的特征。

参考文献 (References)

- Lo C H, Don H S. 3D moment forms: Their construction and application to object identification and positioning [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, **11**(10):1053 ~ 1064.
- Flusser J, Suk T. Pattern recognition by affine moment invariants [J]. Pattern Recognition, 1993, **26**(11):167 ~ 174.
- Teague M R. Image analysis via the general theory of moments [J]. Journal of the Optical Society of America, 1980, **70**(8): 920 ~ 930.
- Teh C H, Chin R T. On image analysis by the method of moments [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1988, **10**(4): 485 ~ 513.
- Liao S X, Pawlak M. On image analysis by moments [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1996, **18**(3): 254 ~ 266.
- Hu M K. Visual pattern recognition by moment invariants [J]. IRE Transactions on Information Theory, 1962, **8**(1): 179 ~ 187.
- Mukundan R, Ong S H. Image analysis by Tchebichef moments [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, **10**(9): 1357 ~ 1364.
- Yap P T, Paramesran R, Ong S H. Image analysis by Krawtchouk moments [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, **12**(11): 1367 ~ 1377.
- Zhou Jian, Shu H Z. Image analysis by discrete orthogonal Hahn moments [A]. In: Proceedings of International Conference on Image Analysis and Recognition 2005 [C], Heidelberg, Berlin, 2005: 524 ~ 531.
- Zhu Hong-qing, Shu Hua-zhong. Image analysis by discrete orthogonal racah moments [J]. Signal Processing, 2007, **87**(4): 687 ~ 708.
- Tratnik M V. Some multivariable orthogonal polynomials of the Askey tableau-discrete families [J]. Journal of Mathematical Physics, American Institute of Physics, 1991, **32**(9):2337 ~ 2342.