

一种基于卷积积分的图像去噪变分方法

张军¹⁾ 韦志辉²⁾

¹⁾(南京理工大学理学院,南京 210094) ²⁾(南京理工大学计算机科学与技术学院,南京 210094)

摘要 在图像去噪过程中更多地保持图像的细节信息是很重要的。将基于梯度的总变分图像去噪模型推广到基于分数阶微分的模型,并根据分数阶微分与卷积运算在特殊情形下具有相同的离散格式这一特点,提出了一种易于数值计算的基于卷积积分的图像去噪变分模型,实验结果表明,新模型在提高图像信噪比的同时,可以更好地保持图像的细节信息。

关键词 图像去噪 分数阶微分 卷积积分 纹理保持

中图法分类号:TP391 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2008)09-1673-05

A Variation Method Based on Convolution Integral for Image Denoising

ZHANG Jun¹⁾, WEI Zhi-hui²⁾

¹⁾(School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

²⁾(School of Computer Science and Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094)

Abstract It is important to preserve more detailed information in image denoising. In this paper, we extend the total variation model for image denoising which based on gradient to a new model based on fractional derivative, and then making use of the characteristic that fractional derivative and convolution integral have the same discrete formula in certain situation, We propose a variational model based on convolution integral which can be computed easily. The numerical results show that our model can not only better improve the PSNR of image, but also preserve more detailed information.

Keywords image denoising, fractional derivative, convolution integral, texture preserving

1 引言

图像去噪问题的研究,一直以来都是图像处理领域的重点研究问题之一。目前,图像去噪的方法有很多,基于偏微分方程的方法是近十几年来兴起的一类新的方法,其中最重要的一个方法就是1992年,Rudin等人提出的基于图像梯度的图像总变分最小的ROF模型^[1]。ROF模型能较好地保持图像的边缘,但是对于图像中的纹理等细节保持不好。对于含噪声的图像而言,图像结构信息主要分布在低频区域,而噪声主要分布在高频区域,同时图像的

细节也分布在高频区域。ROF模型之所以不能保持图像的细节信息,主要是因为模型中起到去噪作用的正则项不能较好地地区分高频噪声和高频的图像细节。陈遵德等人分析了微分运算的滤波特性^[2],指出微分运算可以近似地看作一个高通滤波器,起到相对增强高频,抑制低频的作用,而且微分阶数越高,这种高通特性就越强,通频带越窄。考虑到通过控制微分运算的阶数来控制高通滤波的通频带宽,从而更好地地区分高频区域中的噪声和图像细节,本文首先引入分数阶微分,并通过分析分数阶微分运算与卷积积分的关系,提出了一种易于实际计算的图像去噪模型。

基金项目:国家自然科学基金项目(60672074)

收稿日期:2007-02-01;改回日期:2007-03-26

第一作者简介:张军(1977~),男,南京理工大学理学院讲师,南京理工大学计算机科学与技术学院控制科学与工程专业博士研究生。主要研究方向为图像建模与算法研究。E-mail: phil_zj@mail.njust.edu.cn

2 基于图像总变分最小的 ROF 模型

目前,大多数图像去噪模型都将图像分为两个部分来处理,即 $I = u + v$,其中 I 为带噪声图像, u 是图像中的分片光滑的子图像即低频部分,而 v 则是图像中的高频部分,主要包括噪声以及高频纹理信息。在图像去噪模型中,一个重要的模型就是 1992 年 Rudin, Osher 和 Fatemi 基于图像梯度提出的图像总变分最小的 ROF 模型:

$$\inf_{u \in BV(\Omega)} \left\{ G(u) = \int_{\Omega} |Du| + \frac{\lambda}{2} \|I - u\|_2^2 \right\} \quad (1)$$

式中, $|Du| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$, Ω 为图像的紧支撑域, $BV(\Omega)$ 表示定义在紧支撑域 Ω 上的有界变差函数空间,这个空间的函数的最大特点就是允许存在跳跃间断。模型参数 $\lambda > 0$ 称为正则参数,模型中等式右端第 1 项称为正则项,它是基于图像梯度的总变分,在极小化过程中可以起到抑制噪声的作用,而且它允许 u 存在跳变边缘,而且由于 $u \in BV(\Omega)$ 允许存在跳变边缘,因此,ROF 模型对于图像边缘的保持是比较好的。第 2 项为保真项,主要作用就是在去噪过程中保持去噪图像与原图像的相似性。对于 ROF 模型的求解,可以转化为求解下面的偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{|Du|} \right) + \lambda(I - u) \quad (2)$$

式中, t 为时间步长,虽然 ROF 模型能比较好地保持图像的边缘信息,但是对于图像中的纹理信息却保持不好。为此,2001 年, Meyer 提出了修改 ROF 模型中的保真项^[3],将 L^2 范数换成比较弱的,更适合于纹理信息的新的范数的思想。在此基础上, Meyer 以及后来一些学者在这方面做了很多工作^[4-6],也取得了一定的效果。本文主要从另一个角度出发,即修改正则项。因为模型中真正起到去噪作用的还是正则项,它的作用就是去掉图像中的高频部分,如果它无法较好地将高频噪声和纹理区分,则在去噪的过程中就会将纹理当成噪声一起去掉,从而损失大量的纹理信息。

ROF 模型去噪的过程是一种利用微分算子进行滤波的过程,而微分的阶数和其滤波特性有着直接的联系^[2]。ROF 模型对纹理的保持不好,可以考虑通过控制微分的阶数来调节微分算子的滤波特性,以达到保持纹理的目的。为此,需要引入分数阶微分,改进 ROF 模型中的正则项,建立更适合于纹理保持的去噪模型。

3 分数阶微分与卷积积分

分数阶微分的研究历史几乎与普通整数阶微分同样久远,但其研究难度要大得多,因此,很长时间以来一直是在纯数学领域进行研究。直到 Mandelbrot 提出分形学说,将分数阶微积分用于分析和研究分形媒介中的布朗运动以来,分数阶微积分才引起工程技术研究人员的关注。目前分数阶微积分已经在流体场理论、电磁理论、非线性动力学、自动控制等领域取得了一些成功,但在图像处理领域中的研究和应用还非常少。

分数阶微分即将整数阶微分 $D^n f, n = 1, 2, \dots$ 推广到一般情形 $D^\alpha f$,其中 α 为实数,这样,一般意义下的整数阶微分就是分数阶微分的特殊情形了。目前,分数阶微分的定义并没有统一的形式,而是在不同的研究领域有不同的定义形式,而且由于分数阶微分的复杂性,其快速稳定的数值计算方法也很少。本文分析 Grünwald-Letnikov 分数阶微分的定义形式,并从实际计算的角度出发,将分数阶微分的运算转为卷积积分的运算,并在此基础上提出基于卷积积分的图像去噪模型。

首先定义一般实数意义下的二项式系数^[7]:

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$$

式中, $\Gamma(a) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} dx & a > 0 \\ a^{-1} \Gamma(a+1) & a < 0 \end{cases}$ 为伽玛函数。

在这个二项式系数中, a, b 为实数,当 $b < 0$ 时, $\binom{a}{b} = 0$; 当 a 为整数,而且 $b \geq a + 1$ 时, $\binom{a}{b} = 0$ 。

Grünwald-Letnikov 分数阶微积分^[8]定义为

$$D^\alpha f = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh)}{h^\alpha}, \alpha \in \mathbf{R} \quad (3)$$

式中, \mathbf{R} 为实数集,当 $\alpha > 0$ 时,式(3)定义了分数阶微分;当 $\alpha < 0$,式(3)定义了分数阶积分。本文仅考虑分数阶微分,即 $\alpha > 0$ 的情形。由分数阶微分的定义形式可以看到,分数阶微分的计算比较困难。在实际计算时,需要将连续的函数离散化。特别地,作为式(3)的离散化近似,取 $h = 1$,得到

$$\Delta^\alpha f = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - k) \quad (4)$$

若记卷积核函数 $v^\alpha(z) = \begin{cases} (-1)^z \binom{\alpha}{z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$, 则

式(4)也可以看作卷积积分

$$v^\alpha * f = \int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(z)f(x-z)dz \quad (5)$$

的一个离散化近似。因为式(3)和式(5)具有相同的离散化格式(如式(4)所示),在这个意义下,可以将式(5)看作 Grünwald-Letnikov 分数阶微分的一种近似,而式(5)无论实际计算还是理论分析都比式(3)要方便得多。对于卷积积分式(5),在频域中还满足

$$\widehat{v^\alpha * f} = \widehat{v^\alpha} \cdot \widehat{f} \quad (6)$$

式中, \widehat{f} 和 $\widehat{v^\alpha}$ 表示函数 f 和 v^α 的 Fourier 变换。

4 基于卷积积分的变分模型及算法

4.1 模型的建立

对定义在有限区域 Ω 上的函数 $f(x,y)$, 定义 $f(x,y) = 0, (x,y) \notin \Omega$, 将函数延拓到整个空间 \mathbf{R}^2 。引入分数阶导数,将模型 ROF 模型修改为

$$\inf_u \{ E(u) = \int_{\Omega} |D^\alpha u| + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_2^2 \} \quad (7)$$

式中, $|D^\alpha u| = \sqrt{(D_x^\alpha u)^2 + (D_y^\alpha u)^2}$, $D_x^\alpha u$ 和 $D_y^\alpha u$ 分别表示 u 关于 x 和 y 的 α 阶导数。当 $\alpha = 1$ 的时候,模型(7)就退化为 ROF 模型。但是,由式(3)给出的分数阶微分的定义不利于问题的求解,而式(5)作为式(3)的近似,无论在理论推导还是实际计算都要比式(3)方便得多,因此,用式(5)替换分数阶微分,得到基于卷积积分的变分模型。

$$\inf_u \{ E(u) = \int_{\Omega} |v^\alpha * u| + \frac{\lambda}{2} \|f - u\|_2^2 \} \quad (8)$$

式中, $|v^\alpha * u| = \sqrt{(v^\alpha * u)_x^2 + (v^\alpha * u)_y^2}$, $(v^\alpha * u)_x = \int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(z)u(x-z,y)dz$, $(v^\alpha * u)_y = \int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(z)u(x,y-z)dz$ 。

用 Lagrange 乘子法来求解最优化问题(8),对于任意函数 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega), C_0^\infty(\Omega)$ 表示定义在紧交集 Ω 上的无穷阶可微函数集合为函数集合。构造函数

$$g(\varepsilon) := E(u + \varepsilon\varphi) = \int_{\Omega} |v^\alpha * (u + \varepsilon\varphi)| + \frac{\lambda}{2} \|f - u - \varepsilon\varphi\|_2^2 \quad (9)$$

令 $g'(0) = 0$, 可得

$$\int_{\Omega} \frac{(v^\alpha * u)_x (v^\alpha * \varphi)_x + (v^\alpha * u)_y (v^\alpha * \varphi)_y}{|v^\alpha * u|} dx dy -$$

$$\lambda \int_{\Omega} (f - u) \cdot \varphi dx dy = 0 \quad (10)$$

对函数 f , 记 f 的 Fourier 变换为 \widehat{f} , \widehat{f} 的共轭运算记为 $\overline{\widehat{f}}$ (其他函数相应运算也采用相应记号)。注意到 $f(x,y) = 0, (x,y) \notin \Omega$, 利用 Parseval 恒等式

$$\int_{\mathbf{R}^2} f \cdot g dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}^2} \widehat{f} \cdot \overline{\widehat{g}} dw_1 dw_2 \quad \text{可得}$$

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\overline{(v^\alpha * u)_x}}{|v^\alpha * u|} (\overline{v^\alpha * \varphi})_x + \frac{\overline{(v^\alpha * u)_y}}{|v^\alpha * u|} (\overline{v^\alpha * \varphi})_y dw_1 dw_2 - \lambda \int_{\mathbf{R}^2} (\widehat{f} - \widehat{u}) \cdot \widehat{\varphi} dw_1 dw_2 = 0 \quad (11)$$

利用卷积积分的频域计算格式(6),可以得到

$$\int_{\mathbf{R}^2} \frac{\overline{(v^\alpha * u)_x}}{|v^\alpha * u|} \widehat{v^\alpha}(w_1) \cdot \widehat{\varphi} + \frac{\overline{(v^\alpha * u)_y}}{|v^\alpha * u|} \widehat{v^\alpha}(w_2) \cdot \widehat{\varphi} dw_1 dw_2 - \lambda \int_{\mathbf{R}^2} (\widehat{f} - \widehat{u}) \cdot \widehat{\varphi} dw_1 dw_2 = 0 \quad (12)$$

由 φ 的任意性,可得

$$\frac{\overline{(v^\alpha * u)_x}}{|v^\alpha * u|} \cdot \widehat{v^\alpha}(w_1) + \frac{\overline{(v^\alpha * u)_y}}{|v^\alpha * u|} \cdot \widehat{v^\alpha}(w_2) - \lambda(\widehat{f} - \widehat{u}) = 0 \quad (13)$$

注意到 $\widehat{v^\alpha}(w) = \widehat{v^\alpha}(-w)$, 则

$$\frac{\overline{(v^\alpha * u)_x}}{|v^\alpha * u|} \cdot \widehat{v^\alpha}(-w_1) + \frac{\overline{(v^\alpha * u)_y}}{|v^\alpha * u|} \cdot \widehat{v^\alpha}(-w_2) - \lambda(\widehat{f} - \widehat{u}) = 0 \quad (14)$$

利用式(6)卷积的频域形式,并对上式进行反 Fourier 变换,得到

$$\left(v^\alpha(-z) * \frac{(v^\alpha * u)_x}{|v^\alpha * u|} \right)_x + \left(v^\alpha(-z) * \frac{(v^\alpha * u)_y}{|v^\alpha * u|} \right)_y - \lambda(f - u) = 0 \quad (15)$$

即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(z) \cdot \frac{(v^\alpha * u)_x}{|v^\alpha * u|}(x+z,y) dz + \int_{-\infty}^{+\infty} v^\alpha(z) \cdot \frac{(v^\alpha * u)_y}{|v^\alpha * u|}(x,y+z) dz - \lambda(f - u) = 0 \quad (16)$$

由于 $v^\alpha(z) = 0, z < 0$, 上式积分只需在 $[0, +\infty)$ 进行计算。若记

$$F^\alpha(x,y) := \int_0^{+\infty} v^\alpha(z) \cdot \frac{(v^\alpha * u)_x}{|v^\alpha * u|}(x+z,y) dz + \int_0^{+\infty} v^\alpha(z) \cdot \frac{(v^\alpha * u)_y}{|v^\alpha * u|}(x,y+z) dz \quad (17)$$

则式(16)可简记为

$$F^\alpha(x, y) - \lambda(f - u) = 0 \quad (18)$$

利用梯度下降法求解式(18),则模型(8)的求解最终可以转为求解偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -F^\alpha(x, y) + \lambda(f - u) \quad (19)$$

4.2 算法的实现

对于观测的大小为 $M \times M$ 的噪声的图像 $I(i, j), i, j = 0, 1, \dots, M - 1$, 仍然将图像分为两部分, 即 $I = u + v$, 并规定当 $i, j > M - 1$ 或 $i, j < 0$ 时, $I(i, j) = 0, u(i, j) = 0$ 。通过迭代法计算式(19)来实现的去噪过程。首先, 利用式(4), 对 $(v^\alpha * u)_x$ 和 $(v^\alpha * u)_y$ 分别进行离散化

$$\begin{cases} (v^\alpha * u)_x(i, j) = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i - k, j) \\ (v^\alpha * u)_y(i, j) = \sum_{k=0}^{M-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} u(i, j - k) \end{cases} \quad (20)$$

记

$$\begin{cases} D_x(i, j) = \frac{(v^\alpha * u)_x(i, j)}{\sqrt{[(v^\alpha * u)_x(i, j)]^2 + [(v^\alpha * u)_y(i, j)]^2}} \\ D_y(i, j) = \frac{(v^\alpha * u)_y(i, j)}{\sqrt{[(v^\alpha * u)_x(i, j)]^2 + [(v^\alpha * u)_y(i, j)]^2}} \end{cases} \quad (21)$$

则 $F^\alpha(x, y)$ 的离散化格式为

$$F_{i,j}^\alpha(u) = \sum_{l=0}^{M-1} (-1)^l \binom{\alpha}{l} \cdot [D_x(i + l, j) + D_y(i, j + l)] \quad (22)$$

将微分方程(19)离散化, 并通过迭代格式进行求解, 可以得到下面的算法步骤:

- (1) 对于观测图像 I , 设定迭代初值 $u^{(0)} = I$ 。
- (2) 假设经过计算已经得到 $u^{(n)}$, 由式(20) ~ 式(22)计算

$$F_n^\alpha = (F_{i,j}^\alpha(u^{(n)}))_{M \times M} \quad i, j = 0, 1, \dots, M - 1$$

- (3) 由迭代格式: $u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \cdot (-F_n^\alpha + \lambda(I - u^{(n)}))$ 计算 $u^{(n+1)}$; 令 $n = n + 1$ 转步骤(2)

按照去噪图像的峰值信噪比 (PSNR) 达到最大作为迭代终止条件, 这里的峰值信噪比定义为

$$PSNR = 10 \lg \frac{\max_{0 \leq i, j \leq M-1} |I_{i,j}|^2}{\frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} (I_{i,j} - u_{i,j})^2}$$

需要指出的是, 建立的基于卷积积分的模型在理

论推导以及实际计算时都要比模型(7)方便, 但由于计算卷积积分和分数阶微分时, 使用的是相同的离散格式如式(4)所示, 因此, 在数值实现的时候, 新模型实现的就是引入分数阶微分后得到的模型(7)的功能。特别地, 当 $\alpha = 1$ 的时候, 式(20)就退化为向前差分 $u(i, j) - u(i - 1, j)$ 和 $u(i, j) - u(i, j - 1)$, 而式(22)刚好退化为向后差分运算。这两种运算式在离散一阶微分所采用的常用格式, 这时候得到的离散格式实际上退化为计算 ROF 模型的散度扩散方程(如式(2)所示)的离散格式。因此当 $\alpha = 1$ 时, 新模型得到的结果实际上就是 ROF 的结果。

5 数值实验结果及分析

对于一幅 256×256 的纹理图像, 加上方差 $\sigma = 20$ 的高斯白噪声(如图 1 所示), 采用新算法, 选取不同的 α 进行去噪处理。图 2 列出了当 α 分别取 0.8, 1, 1.75 和 2 时的得到去噪图像 u 及相应的残差图像, 为了清楚地显示结果, 这里给残差图像增加了亮度, 定义为 $v = I - u + 100$ 。表 1 给出了对应的去噪图像的峰值信噪比的比较。

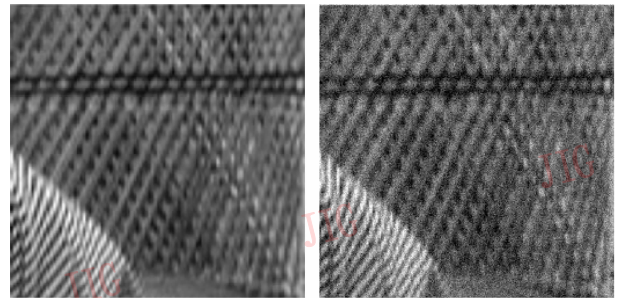


图 1 原始图像及带高斯白噪声的噪声图像

Fig. 1 Original image and noisy image with white Gauss noise

表 1 去噪图像峰值信噪比的比较

Tab. 1 Comparison of PSNR of denoised images

噪声图像	$\alpha = 0.8$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1.75$	$\alpha = 2$
峰值信噪比	22.105 0	28.221 5	28.855 0	29.738 1

利用卷积积分近似微分运算, 它们的滤波特性也是相似的。在新算法中, F_n^α 是卷积积分的离散化, 它起到的作用就是增强高频而抑制低频, 在迭代过程中, 通过从图像中减去这一项, 从而达到去噪目的。当 α 较小的时候, 高通滤波特性减弱, 对低频的抑制能力也减弱, 这样相对噪声频率较低的纹理信

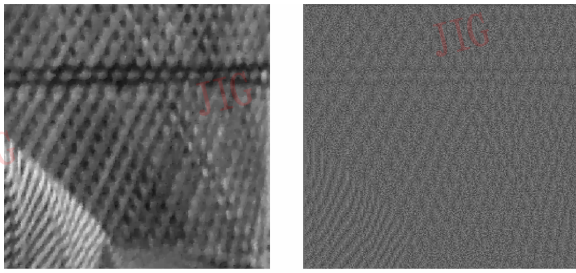
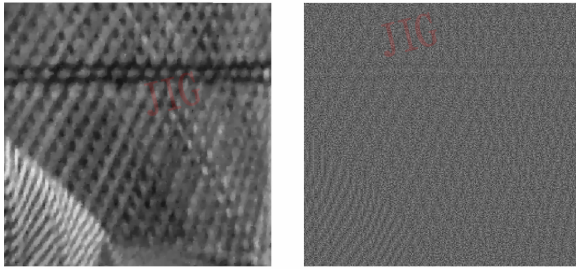
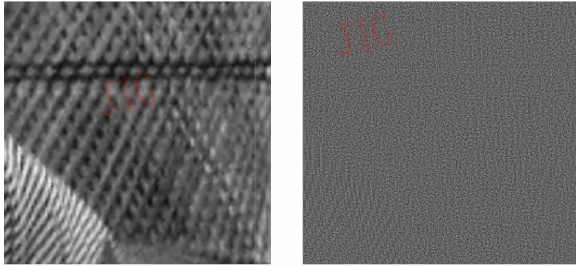
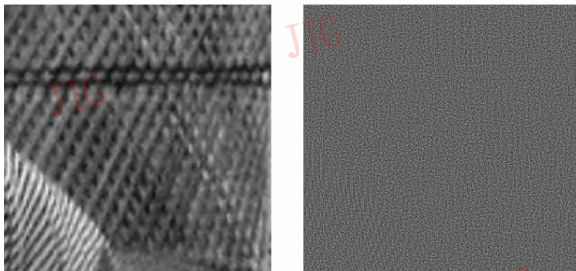
(a) $\alpha=0.8$ 时的去噪图像(左)残差图像(右)(b) $\alpha=1$ 时的去噪图像(左)残差图像(右)(c) $\alpha=1.75$ 时的去噪图像(左)残差图像(右)(d) $\alpha=2$ 时的去噪图像(左)残差图像(右)

图2 去噪图像及相应残差图像的对比

Fig.2 Comparison of denoised images and corresponded residual images

息被从原图像中减掉,从而不能很好的保持,而当 α 比较大的时候,高通性能增强,这样纹理信息不能通过滤波器,从而得到了较好的保持,但如果 α 太大,就只有很少的频率非常高的噪声部分能通过,这样去噪效果会降低。

从实验结果可以看到,当 $\alpha = 0.8$ 时,无论在峰值信噪比提高还是图像纹理的保持方面,都不如 ROF 模型($\alpha = 1$ 时)。当 $\alpha = 1.75$ 时,峰值信噪比和纹理保持都比 ROF 模型好。而当 $\alpha = 2$ 时,峰值

信噪比和纹理保持都比 ROF 模型也要好一些,但是,虽然从残差图像的对比中可以看到,此时纹理的保持比 $\alpha = 1.75$ 的时候是要好一些,但是峰值信噪比却有所下降。因此,从峰值信噪比的提高和纹理保持两方面综合考虑,当 $\alpha = 1.75$ 时的结果是最好的。

6 结 论

本文通过引入分数阶微分,分析了分数阶微分与卷积积分的联系,并在此基础上建立了基于卷积积分的图像去噪变分模型及其算法。实验表明,新提出的模型和算法是非常灵活而有效的。可以通过选择合适的参数 α ,在提高图像信噪比的同时,可以更好地保持图像的细节信息。当 $\alpha = 1$ 时,新算法退化为求解 ROF 模型的差分算法; α 越大,纹理保持效果就越好,但从信噪比提高方面, α 不能取得太大,否则虽然纹理保持更好,但去噪效果也会变差。因此,从纹理保持和信噪比改善综合考虑,一般取 $1 < \alpha < 2$ 。

参考文献 (References)

- 1 Ruding L, Osher S, Fatemil E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, **60** (1-4): 259 ~ 268.
- 2 Chen Zun-de, Chen Fu-gui. Filtering characteristic of non-integral-order calculus and its numerical algorithm [J]. Journal on Numerical Methodss and Computer Applicatons, 1999, **20** (1) : 62 ~ 69. [陈遵德, 陈富贵. 非整数阶微积分的滤波特性及数值算法 [J]. 数值计算与计算机应用, 1999, **20** (1) : 62 ~ 69.]
- 3 Meyer Y. Oscillating Patterns in Image Processin and Nonlinear Evolution Equations: The Fifteenth Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures [M]. Boston, MA, USA: American Mathematical Society, 2001.
- 4 Osher S, Solé A, Vese L. Image decomposition and restoration usin total variation minimization and H^{-1} norm [J]. Multiscale Modeling Simulation, 2003, **1** (3) : 349 ~ 370.
- 5 Linh L, Vese L. Image restoration and decomposition via bounded total variation and negative Hilbert-Sobolev space [DB/OL]. <http://www.math.ucla.edu/applied/cam/>, 2005, 05-33.
- 6 Zhang Jun, Wei Zhi-hui. A Class of Multi-scale Models for Image Denoisin in Negative Hilbert-Sobolev Spaces [A]. Proceeding of 2006 International Conference on Intelligent Computing [C], Harbour plaza, kunming china, 2006: 584 ~ 592.
- 7 Unser M, Blu T. Fractional Splines and Wavelets [J]. SIAM Review, 2000, **42** (1): 43 ~ 67.
- 8 Manuel Duarte Ortigueira. A coherent approach to non-integer order derivatives [J]. Signal Processin, 2006, **86** (10) : 2505 ~ 2515.