

基于PCA的边缘检测方法

华继钊^{1),2)} 王建国^{1),3)} 杨静宇¹⁾

¹⁾(南京理工大学计算机科学与技术学院,南京 210094) ²⁾(扬州大学信息工程学院,扬州 225009)

³⁾(唐山学院网络教育中心,唐山 063000)

摘要 为了更有效地进行边缘检测,通过分析PCA的方向特性,提出了一种基于PCA的边缘检测方法。PCA先利用KL变换来将原始数据变换成维数较少的特征数据,该变换在能量积聚和数据取舍上都具有方向性;同时在证明PCA的这两个方向特性的基础上,提出了一个经两次PCA操作获取边缘的新方法——TPCA。该新方法首先通过对图像进行PCA来得到其重建后的残差,然后再对该图像的转置图像进行PCA,并将所得残差做转置;最后通过对两个残差进行叠加,并二值化来得到比较好的边缘。实验结果表明,该算法不仅有效稳定,而且与经典的边缘检测算子相比,在提取感兴趣区域方面有独特的优势。

关键词 边缘检测 区域 主成分分析 两次主成分分析

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)05-912-08

A Novel Approach to Edge Detection Based on PCA

HUA Ji-zhao^{1),2)}, WANG Jian-guo^{1),3)}, YANG Jing-yu¹⁾

¹⁾(College of Computer Science & Technology, Nanjing University, Nanjing 210094)

²⁾(College of Information Engineer, Yangzhou University, Yangzhou 225009)

³⁾(Network & Education Center, Tangshan College, Tangshan 063000)

Abstract We present a PCA-based edge detection method with analysis on the orientation character of PCA. PCA translates the original data set to feature components in low dimension space using Karhunen-Loève transform, which shows the tendency on energy collection and data selection. We point out and prove these orientation characters, and then present the new detection method TPCA, which processes an image with twice principal component analysis. First, an image is analyzed with PCA, and the residual is retained. Then, the image's transpose is processed using PCA again, and the residual is transposed too. Finally, the two residuals are added. A better edge will be produced just with some simple operates, such as binary process. Experimental results show that the algorithm is effective, stable and has its own advantages compared with the traditional algorithms.

Keywords edge detection, area, PCA, Twi-PCA (TPCA)

1 引言

边缘是指图像上局部强度变化最显著的部分,它反映了图像中一个物体区别于其他物体最基本的特征,是模式识别和图像理解的基础。边缘检测广

泛应用于图像分割、特征提取、图像匹配等方面,也是计算机视觉、模式识别领域的重要研究内容。

经典的边缘检测方法是基于空间运算的,其中包括对应于一阶微分的梯度法和二阶微分法,主要有 Robert、Sobel、Prewitt、Laplacian、Canny 和 LOG 等算子^[1-2],这些算子虽各有针对性和特点,但由于它

基金项目:国家自然科学基金项目(60632050)

收稿日期:2007-10-10;改回日期:2008-01-08

第一作者简介:华继钊(1968~),男,现为南京理工大学计算机科学与技术学院计算机应用专业博士研究生,扬州大学副教授。主要研究方向为图像处理、模式识别。E-mail:huajizhao@sohu.com

们都是基于像素级操作,因此所有像素具有同等地位,且对人眼的敏感和不敏感区域不能区别对待。而基于小波变换^[3]的边缘检测方法,虽能够考虑到像素的不同类别,将其区分为高频和低频成分,但要进行多级小波分解,计算量大。此外,一些新的边缘检测器^[4-5],在考虑实用特点的同时,则更加注重算子的综合性能,但通常还是着眼于提取精细的边缘,而没有兼顾像素的统计特性。边缘检测算法通常以 Canny 提出的以下 3 个准则作为评价标准^[6]:(1) 良好的检测结果;(2) 良好的定位;(3) 低重复响应。虽然其作为衡量边缘检测算法的精确度,是一个理想的准则,但对一个特定的边缘检测算子,由于这三个方面常常相互制约,不易兼顾,所以每一种边缘检测算法都有自己的适用范围和侧重点。Berkeley 大学的 Martin 等人认为,好的边缘检测结果应该与人的视觉相一致^[7],因此从图像中应该有选择地获取图像要表达的意义,而不仅仅是对图像做盲目的操作。主成分分析(PCA)^[8-11]是多变量分析的经典技术,1901 年由 Pearson 引入到生物理论研究,Karhunen 在 1974 年用概率论形式来进行表示,Loève 随后发展和完善了这一理论,所以 PCA 又被称为 KL 变换。

PCA 是人脸识别和大容量数据分析中的常用算法,它从数据特征中选择能使数据更集中的特征,以便实现用较少的特征数据近似表示整个数据集来达到降低数据量的目的。当用有限的主分量来表示大部分数据时,一些不能由这些主分量表示的数据就是与大部分数据没有共同属性的数据。如果是针对一幅图像的灰度进行主分量分析,则与主分量表示的数据对应的就是图像中较大块的灰度平滑区域,剩余的数据就是与灰度平滑区域不同的像素点,也就是灰度发生突变的点,即边缘点。所以利用主分量分析后的重建残差,就可以抽取图像中的边缘。

2 KL 变换及其误差分析

设 n 维随机矢量 $\mathbf{X} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, 其均值矢量 $\bar{\mathbf{X}} = E[\mathbf{X}]$, 相关矩阵 $\mathbf{R}_X = E[\mathbf{X}\mathbf{X}^T]$, 协方差矩阵 $\mathbf{C}_X = E[(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}})^T]$, \mathbf{X} 经标准正交矩阵 \mathbf{T}^T 正交变换后,则可得到矢量 $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T$, 也就是

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^T \mathbf{X} = [t_1, t_2, \dots, t_n]^T \mathbf{X} \quad (1)$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{Y} = \mathbf{T} \mathbf{Y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i t_i \quad (2)$$

如果选择 \mathbf{X} 关于 \mathbf{y}_i 的展开式的前 m 项在最小均方误差准则下的线性估计为 $\hat{\mathbf{X}}$, 则其估计式为

$$\hat{\mathbf{X}} = \sum_{i=1}^m \mathbf{y}_i t_i \quad (1 \leq m < n) \quad (3)$$

其产生的均方误差为

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(m) &= E[(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T (\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})] = \sum_{i=m+1}^n E[\mathbf{y}_i^2] \\ &= \sum_{i=m+1}^n E[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T] = \sum_{i=m+1}^n t_i^T E[\mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^T] t_i \\ &= \sum_{i=m+1}^n t_i^T \mathbf{R}_X t_i \end{aligned} \quad (4)$$

在 \mathbf{T} 为标准正交矩阵的约束下,为了求取使得 $\varepsilon^2(m)$ 最小的 t_i , 需选择以下准则函数:

$$J = \sum_{i=m+1}^n [t_i^T \mathbf{C}_X t_i - \lambda_i (t_i^T t_i - 1)] \quad (5)$$

由 $\frac{\partial J}{\partial t_i} = 0$ 知,

$$\mathbf{C}_X t_i = \lambda_i t_i \quad i = m+1, \dots, n \quad (6)$$

即 t_i 为对应于 \mathbf{X} 的协方差矩阵 \mathbf{C}_X 的特征值 λ_i 的特征矢量。将式(6)代入式(4)得

$$\varepsilon^2(m) = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \quad (7)$$

式(7)说明,当用前 m 个特征向量来估计数据集时,则产生的均方误差为剩余特征值之和。由此可以得到以下两个推论^[12]:

推论 1 KL 变换后各分量的非零平方期望或方差更趋于不均(证明见附录 1)。

推论 2 KL 变换使能量向某些分量相对集中。因为标准正交变换下的所有模式总的平均能量保持不变,也就是模式总的平均交变能量保持不变。由推论(1)知,KL 变换使各分量能量分布更趋不均,即能量会向某些方向相对集中。

3 PCA 的方向性

对单幅图像用 PCA 方法进行处理,实际上就是将每一列当成一类,每列数据表示类内数据,列之间表示类间关系。

对于一幅有 c 列数据的图像,其列向量 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_c$ 就是 c 个模式类,而整幅图像 \mathbf{X} 为 n 维实向量,即

$$\mathbf{X} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_c] \quad (8)$$

设 $m_i = E\{X/w_i\}$ 为第 i 列的均值, $m_0 = E\{X\}$
 $= \sum_{i=1}^c p(w_i) m_i$ 为 X 中所有数据的均值, 则 X 的散布
 矩阵分列如下:

类间散布矩阵为

$$S_b = \sum_{i=1}^c p(w_i) (m_i - m_0) (m_i - m_0)^T \quad (9)$$

类内散布矩阵为

$$S_w = \sum_{i=1}^c p(w_i) E\{(X - m_i)(X - m_i)^T / w_i\} \quad (10)$$

总体散布矩阵为

$$S_t = S_b + S_w = E\{(X - m_0)(X - m_0)^T\} \quad (11)$$

可应用以下 Fisher 鉴别准则函数进行鉴别:

$$J_f(\varphi) = \frac{\varphi^T S_b \varphi}{\varphi^T S_w \varphi} \quad (12)$$

其中, φ 是一个 n 维非零列向量, 其可以通过 KL 变换求得。选取使 $J_f(\varphi)$ 达到最大值的 φ 作为投影方向, 就可以保证在方向 φ 上投影后, 数据间具有最大的类间离散度和最小的类内离散度, 这就是 KL 变换在数据集聚上的方向性。由于主成分分析是依据 KL 变换原理, 通过对数据进行空间转换来找出能反映原来数据特征(离差最大)的主成分作为压缩后的变量集合, 所以 PCA 在数据集聚上具有方向性^[10-12]。

为了提高类内聚合度, 需选择能将尽量多的相似数据聚在一起的投影方向, 这就说明 PCA 总是从数据集中找相似的数据子集, 且每个子集内的类内离散度要最小, 即数据要相似, 其反映在图像上就是灰度值要一致。当用部分主分量来近似表示数据集时, 图像中的大块灰度平滑区域就能被抽取出来, 其中与较大特征值对应的特征向量就是由灰度平滑区域的数据构成的。这一点通过实验也得到了验证。



(a) 原图 (b) 重建图 (c) 残留

图 1 PCA 的块抽取能力示意图

Fig. 1 PCA's ability to extract blocks from an image

如图 1 所示, 原图经 PCA 处理后, 大块区域都

被重建出来, 这与 KL 变换的推论(2)相符, 即说明 PCA 重建具有积聚相似灰度像素的能力。这样的积聚可称为 PCA 在内容上的方向性, 它总是趋向图像上最主要的内容, 换言之, 它总是集中抽取最感兴趣的区域(ROI)。这在基于内容的图像处理 and 图像理解方面有着重要的意义。

另外, PCA 技术在处理单幅图像时, 在垂直方向上存在方向性。由于 PCA 是将列看成一类, 为了使类内散布度最小, 在重建图像时, 其找到的最佳投影方向会将同一列中的数据向灰度均值方向拉平。在垂直边缘处, 由于两边的灰度产生突变, 因此为了保证类内散度最小, 重建部分会在垂直边缘处产生模糊, 使该列上的所有像素的灰度相互靠拢。这种效应类似于 Photoshop 中的模糊工具, 即通过将边界处变模糊来使其相似, 以提高整体的一致性。PCA 的这一方向特点, 通过实验也得到验证。



(a) 原图 (b) 重建图 (c) 残留

图 2 PCA 处理的方向性示意图

Fig. 2 Directivity sketch map by PCA

图 2(b) 中黑块的上下两端都产生了模糊现象, 这表明经过 PCA 处理后, 边缘处的像素灰度产生了变化, 像素由白色和黑色变成灰色, 也就是灰度值变化到黑白两个值之间。这种变化只在边缘处产生, 因此利用 PCA 的这种方向特性, 就可以通过检测这种变化来检测边缘。在图 2(b) 中, 还有一个值得注意的现象, 就是右边较长黑块的上端发生了两级模糊, 其中一级发生在它真实的边缘处, 另一级发生在左边黑块的边缘高度处。通过仔细分析 KL 变换发现, 产生这种现象的原因是由于 PCA 处理图像时, 要在类间寻求平衡造成的。虽然 PCA 要进行类间散度最大的投影, 但为了兼顾全局方差最优, 所以重建时会把每一类的数据都向整个数据集的均值拉平。而这一点则不利于边缘检测, 因为它会使边缘处的响应变模糊, 在使用中要通过调节相关的参数加以消除, 在本文后面的实验 1 中, 用不同的参数做实验对这一问题进行了较详细的分析。

4 PCA 边缘检测方法

笔者依据 PCA 的两种方向特征,提出了一种利用两次 PCA 操作来检测图像边缘的方法,命名为 TPCA(Twice-PCA)。

其中第 1 次 PCA 操作,是在原图像上检测垂直方向的边缘。该次 PCA 操作就是对原图像的灰度矩阵实施 PCA,并取适当数目的主分量进行图像重建,重建后剩余的残差就是一幅突出垂直方向边缘的图像。

为了检测水平方向的边缘,需对原图像的转置图像进行第 2 次 PCA 操作,即取与第 1 次 PCA 操作同样数目的主分量进行重建后,再取残差图像的转置,就得到了突出水平方向的边缘图像。

通过对两次操作的残差进行叠加求和来增强边缘效果,就可得到一幅比较好的边缘图了。但这样得到的边缘比较粗,可采取不同的方法对其进行细化。在后面实验中,采取了以下两种方法进行细化:一种是用固定阈值对边缘图进行二值化来得到最终的边缘图;另一种方法是仿照 Canny 算法,对两个阈值进行最大值抑制,即得到细化后的边缘。

TPCA 算法流程如图 3 所示:

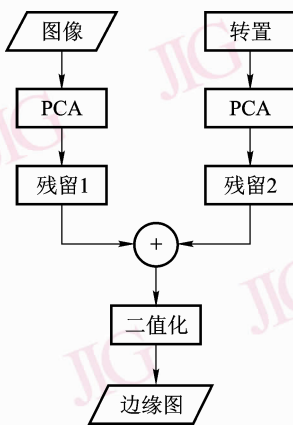


图 3 TPCA 算法流程图

Fig. 3 Flowchart of the TPCA algorithm

5 实验及结果分析

为了验证算法的有效性,采用两组不同的图像进行了边缘检测实验验证。第 1 个实验图像是常用的 Lena 和 Cameraman 两幅图像,实验时,先运用 Sobel、Canny 和 TPCA 算法分别处理,然后以 Canny

算法提取的边缘作为基准,分别与 Sobel 算法和 TPCA 算法提取的边缘进行比较。该实验证明,TPCA 算法不但能有效地提取边缘,而且在性能上与传统算法具有一定的可比性。第 2 个实验是从 Martin 等人建立的 Berkeley 手工分割图像库中任意选择 5 幅图像,先分别用 Canny、Sobel 和 TPCA 算法进行处理,然后将提取的边缘与手工描绘的边缘相比较,由比较结果可以看到,TPCA 算法与经典边缘检测算法相比,它得到的边缘更接近于人对图像内容的理解。

实验 1 的边缘检测结果如图 4 所示。

实验时,对 Lena 和 Cameraman 图像先用 Canny、Sobel 和本文算法进行处理,TPCA 算法中的残差分别通过取前 5 个、前 10 个和前 19 个主分量对图像进行重建后得到,二值化的阈值 T 分别取 0.2、0.25 和 0.3。对于 Lena 图像,在取前 5 个主分量重建时,前 5 个主分量代表的的数据量比例是 65.503 6%;取前 10 个主分量,其对应的数据量比例是 80.790 2%;取前 19 个主分量,其对应的数据量比例为 90.021 6%。Cameraman 图像取前 5 个、前 10 个和前 19 个主分量,其对应的数据量比例是 74.777 3%、84.269 2% 和 91.786 9%。

从图 4 可见,重建图像时所取的主分量个数对 TPCA 算法检测的边缘图有明显的影 响,重建比例越高,边缘图中的点数越少。另外,二值化阈值的选取也会影响边缘精度,阈值越大,精度越高。

为了量化比较 TPCA 算法检测的边缘图的性能,以 Canny 算法检测的 Lena 和 Cameraman 图像的边缘图作为基准,将 TPCA 与 Sobel 算法检测得到的边缘进行了比较,比较结果见图 5。

图 5(a)、(b) 分别是 Lena 和 Cameraman 图像的边缘检测正确率曲线图,这里的正确率是指 TPCA (或 Sobel) 算法的边缘检测结果图中有,且在 Canny 算法的边缘检测结果图中也存在的边缘点数占 Canny 算法检测的边缘图中的总边缘点数的百分比。

图 5 中“TPCA”线是将用 TPCA 算法进行边缘检测得到的叠加图,经双阈值细化处理后的边缘图与 Canny 算法检测的边缘相比,在取前 5、前 10 和前 19 个主分量情况下的正确率曲线。“Sobel”线是 Sobel 算法边缘检测的正确率,Lena 图像边缘检测的正确率是 30.51%,Cameraman 图像边缘检测的正确率是 28.45%。图 5 还显示了 TPCA 算法在阈值为 0.2、0.25、0.3 时对应的边缘检测正确率。

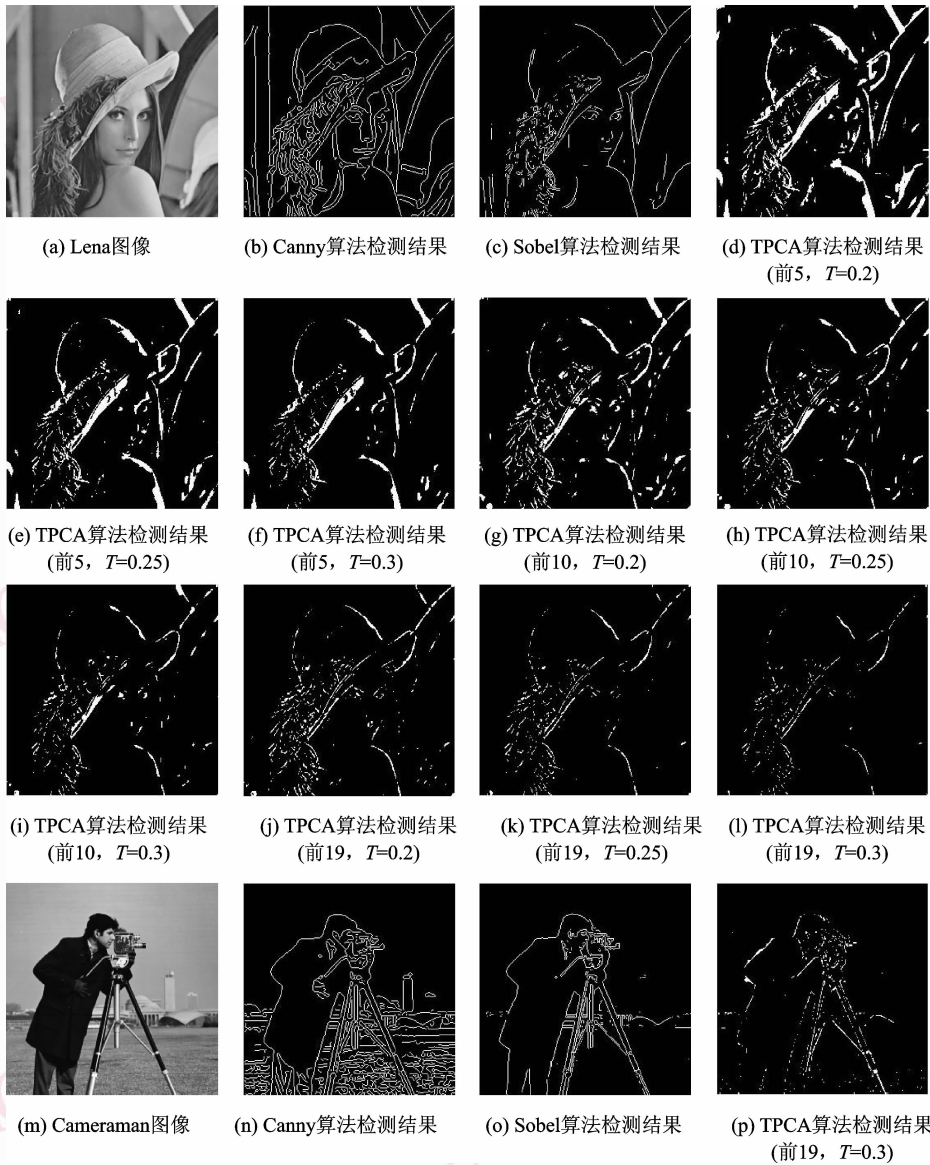


图 4 实验 1 结果

Fig. 4 Results of the first experiment

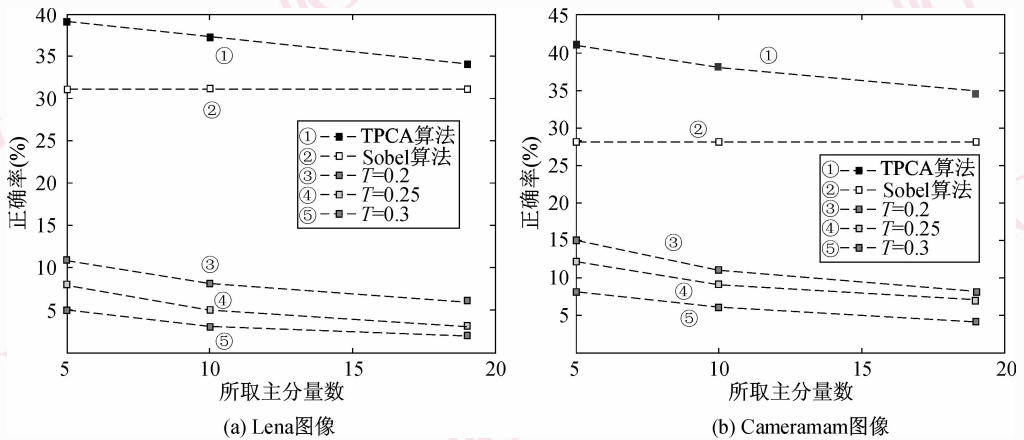


图 5 TPCA 和 Sobel 与 Canny 算法的检测结果比较

Fig. 5 Correct rate of TPCA, Sobel, and Canny

图 5 显示出只用阈值二值化,TPCA 算法的边缘检测正确率低于 Sobel 算法的边缘检测正确率,经双阈值细化处理后,边缘检测的正确率提高了,无论取多少主分量(如 5、10 或 19)和取多大阈值(如 0.2、0.25 或 0.3),TPCA 算法的边缘检测正确率都

明显高于 Sobel 算法。这说明,采用一定的后处理步骤,TPCA 算法能有效地抽取边缘,且结果可以优于传统的边缘检测算子。

实验 2 的边缘检测结果如图 6 所示。

为了体现 TPCA 算法在边缘抽取方面独特的优

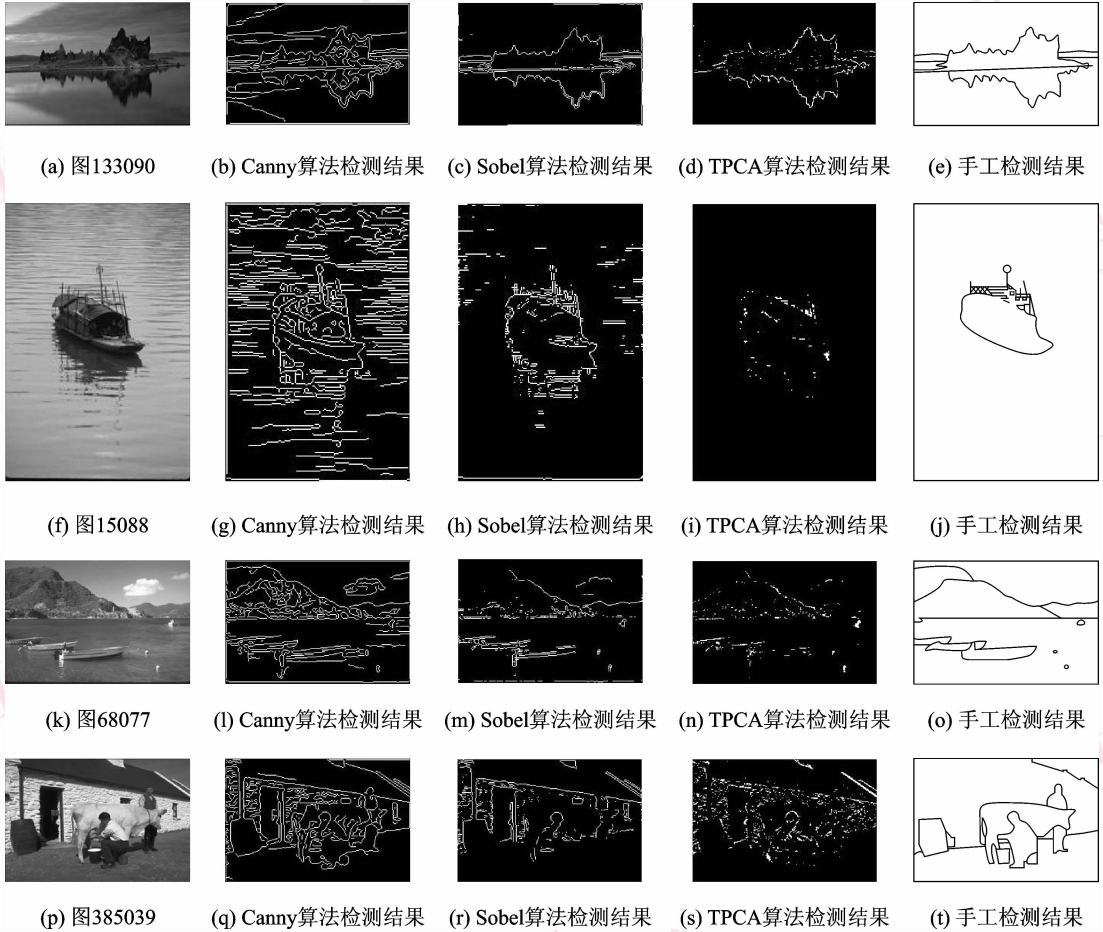


图 6 实验 2 边缘检测结果

Fig. 6 Results of the second experiment

点,本文从另一个角度比较了 TPCA、Canny 和 Sobel 3 种算法的检测结果。为了衡量不同算法的图像分割效果,Berkeley 分割图像库的每幅分割图都是选定几个人,每个人根据自己对图像的理解,先借助专用软件画出图像要表达的主要目标的轮廓,然后再进行综合得到。Martin 等人认为,这样的分割才是真正的分割,而不是盲目的图像处理。在文献[7]中,Martin 等人提出了两个比较分割好坏的指标——GCE(global consistency error)和 LCE(local consistency error)。但这两个指标不能用于比较边缘检测效果,本文经过改进,提出了下列两个指标检测错误率(DER)和检测正确率(DCR)作为边缘检

测效果的衡量指标。

设 e_1, e_2 为同一幅图像用不同边缘算法处理得到的两个边缘像素集合,则

$$DER(e_1, e_2) = \frac{R(e_1 \setminus e_2)}{P(e_2)} \quad (13)$$

$$DCR(e_1, e_2) = \frac{R(e_1 \& e_2)}{P(e_2)} \quad (14)$$

其中, $DER(e_1, e_2)$ 表示在 e_1 中出现,而在 e_2 中没有出现的边缘点的数目与 e_2 中边缘点数的比率; $R(e_1 \setminus e_2)$ 是在 e_1 中出现而在 e_2 中没有出现的边缘点数, $P(e_2)$ 是 e_2 中边缘点的数目。 $DCR(e_1, e_2)$ 表示同时出现在 e_1 和 e_2 中的边缘点数目与 e_2 中边缘

点数目的比率, $R(e_1 \& e_2)$ 是同时出现在 e_1 和 e_2 中的边缘点数。

在计算中, 取人工分割边缘图的边缘点集合为 e_2 , 也就是用人工分割图作为基准, 分别比较 TPCA、Canny 和 Sobel 算法的 DER 和 DCR 这两个指标。从 Berkeley 手工分割图像库中任意取出 4 幅图像进行边缘检测实验, 其检测效果如表 1 所示。

表 1 3 种算法的边缘检测正确率和错误率比较

Tab. 1 Edge detection comparison

算法	图 133090		图 15088		图 68077		图 385039	
	DER (%)	DCR (%)	DER (%)	DCR (%)	DER (%)	DCR (%)	DER (%)	DCR (%)
TPCA	1.125	8.12	0.444	1.14	0.512	3.61	0.935	11.72
Canny	1.334	1.33	1.108	1.11	0.912	0.91	1.204	1.2
Sobel	0.833	0.83	1.39	1.39	0.749	0.75	0.633	0.63

从图 6 可以看出, Canny 算法能够把最细微的变化检测出来, Sobel 算法可通过 X 方向和 Y 方向的竞争来忽略一些细节, 而 TPCA 算法则继承了 Sobel 算法的双向竞争这一特性, 加上它自己在能量集聚方面的优势, 因而可去除重建后剩余残差中的一些小的细节, 留下的是人眼感兴趣区域的边缘。这种特性在表 1 中可以明显看出, 除了图 124084 的检测结果中, TPCA 算法检测结果的 DER 大于 Sobel 算法检测的 DER 外, 其他图的检测结果中, TPCA 算法的 DER 都小于其他两种算法的 DER, DCR 都大于其他两种算法的 DCR, 这些都说明 TPCA 算法的检测结果比 Canny 和 Sobel 算法的检测结果更接近人工分割出来的边缘。

6 结 论

本文在分析了 PCA 的两种方向特性后, 提出了一种新的边缘检测方法。该新方法通过两次使用 PCA 来得到两个重建后图像的残差, 再对残差进行处理后, 即可得到边缘图。本文还将本文算法检测的边缘图与 Canny 和 Sobel 算法检测的边缘图进行了比较, 结果表明, 本文算法在抽取成片平滑区域的边缘方面比 Canny 和 Sobel 算法有优势。由于图像中的大片区域通常是吸引注意力的视觉目标, 因此提取这些目标是图像分割的基本任务。TPCA 算法能够提取感兴趣区域的边缘, 这是由于 PCA 是基于统计理论的特性所决定的, 如果图像分割要在边缘

检测的精度和目标识别之间找平衡, 则可用统计的方法代替基于像素的图像处理, 应该更有利于后续的理解和模式识别。在这一方面, 还要进行更加深入的研究和探讨, 而 TPCA 算法只是基于目标分割图像的一种尝试。

需要指出的是, 本文算法与其他边缘检测算法一样, 并不能在任何情况下都能兼顾 Canny 三准则, 它的优势只有在检测图像中感兴趣区域时才能充分体现出来。

附录 A 推论(1)的证明。

设 $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ 是随机矢量 X 进行 KL 变换的变换矩阵, 则 $Y = U^T X$ 。设有标准正交矩阵 $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, 使 $Z = V^T X$, 即对于 Z 的每个分量, 有

$$z_i = v_i^T X \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A-1)$$

$$\text{记} \quad \sigma_i^2(U) = E[y_i^2] = \lambda_i \quad (A-2)$$

$$\rho_i(U) = \frac{\sigma_i^2(U)}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2(U)} \quad (A-3)$$

$$\sigma_i^2(V) = E[z_i^2] \quad (A-4)$$

$$\rho_i(V) = \frac{\sigma_i^2(V)}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2(V)} \quad (A-5)$$

将标准正交矢量 v_i 按正交基 $\{u_j\}$ 展开, 得

$$v_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A-6)$$

其中系数 $a_{i,j} = u_j^T v_i \quad i = 1, 2, \dots, n$

令 $a_i = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n})^T$, 由 v_i 和 $v_j (i \neq j)$ 正交知, a_1, a_2, \dots, a_n 仍是标准正交矢量, 则

$$\begin{aligned} \sigma_i^2(V) &= E[v_i^T X X^T v_i] \\ &= v_i^T R_x v_i \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j \right)^T R_x \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} u_j \right)^T \left(\sum_{j=1}^n a_{i,j} \lambda_j u_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \lambda_j \\ &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \sigma_j^2(U) \end{aligned} \quad (A-7)$$

由此可得

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(V) = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \sigma_j^2(U) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right) \sigma_j^2(\mathbf{U}) \\
 &= \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(\mathbf{U}) \tag{A-8}
 \end{aligned}$$

这表明 \mathbf{X} 的任意两个标准正交变换所得矢量的各个分量的平方期望之和相等。这是因为正交变换是相似变换,而相似变换不会改变方阵的迹所致。

由式(A-7)和式(A-8)可以推出

$$\begin{aligned}
 \rho_i(\mathbf{V}) &= \frac{\sigma_i^2(\mathbf{V})}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2(\mathbf{V})} \\
 &= \frac{\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \sigma_j^2(\mathbf{U})}{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathbf{U})} \\
 &= \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \rho_j(\mathbf{U}) \tag{A-9}
 \end{aligned}$$

因为 $\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 = 1$, 故可得下列不等式:

$$\begin{aligned}
 &\rho_i(\mathbf{V}) \log \rho_i(\mathbf{V}) \\
 &= \left[\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \rho_j(\mathbf{U}) \right] \log \left[\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \rho_j(\mathbf{U}) \right] \\
 &\leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \rho_j(\mathbf{U}) \log \rho_j(\mathbf{U}) \tag{A-10}
 \end{aligned}$$

由式(A-10)可定义如下的熵:

$$\begin{aligned}
 H(\mathbf{V}) &= - \sum_{i=1}^n \rho_i(\mathbf{V}) \log \rho_i(\mathbf{V}) \\
 &\geq - \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2 \rho_j(\mathbf{U}) \log \rho_j(\mathbf{U}) \right\} \\
 &= - \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^2 \right) [\rho_j(\mathbf{U}) \log \rho_j(\mathbf{U})] \\
 &= - \sum_{j=1}^n \rho_j(\mathbf{U}) \log \rho_j(\mathbf{U}) \tag{A-11}
 \end{aligned}$$

由熵的性质知, $H(\cdot)$ 反映了 $\rho_i(\cdot)$ 和 $\sigma_i^2(\cdot)$ 的不均匀性。当各 $\rho_i(\cdot)$ 相等时,熵最大; $\rho_i(\cdot)$ 越不均匀,熵越小。经 KL 变换后,由于 $\sigma_i^2(\cdot)$ 是按降序排列的,所以 KL 变换后所产生分量的非零的平方期望或方差更趋于不平衡。(证毕)

参考文献 (References)

- 1 Roberts L G. Machine perception of three-dimensional solids[A]. In: Tippet J T, editor: Optical and Electro-Optical Information Processing[C], Cambridge, MA, USA: MIT Press, 1965:159-197.
- 2 Milan Sonka, Vaclav Hlavac, Roger Boyle. Image Processing, Analysis, and Machine Vision 2ED[M]. New York, USA: Thomson Learning and PT Press, 1999:54-55.
- 3 Chang G, Yu B, Martin Vetterli. Spatially adaptive wavelet thresholding with context modeling for image denoising[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 23(9):1522-1531.
- 4 Meer P, Georgescu B. Edge detection with embedded confidence [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2001, 23(12):1351-1365.
- 5 Shigeru Ando. Image field categorization and edge/corner detection from gradient covariance[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(2):179-190.
- 6 Canny J. A computational approach to edge detection[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1986, 8(6):679-698.
- 7 Martin D, Fowlkes C, Tal D, et al. A database of human segmented natural images and its application to evaluating segmentation algorithms and measuring ecological statistics[A]. In: Werner B, ed: Proceeding of the International Conference on Computer Vision[C], Los Alamitos, CA, USA: IEEE Computer Society Press, 2001:416-423.
- 8 Bian Zhao-qi, Zhang Xue-gong. Pattern Recognition (2th edition) [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1999:176-177. [边肇祺, 张学工著. 模式识别(第2版)[M]. 北京:清华大学出版社, 1999:176-177.]
- 9 Yang Jian, Yang Jing-yu. Uncorrelated image projection discriminant analysis and face recognition[J]. Journal of Computer Research and Development, 2003, 40(3):447-452. [杨键, 杨静宇. 具有统计不相关性的图像投影鉴别分析及人脸识别[J]. 计算机研究与发展, 2003, 40(3):447-452.]
- 10 Yong-kyu's blessing. Statistical Pattern Recognition Theory [M]. Beijing: Science Press, 1978:246-275. [福之圭永介. 统计图形识别理论[M]. 北京:科学出版社, 1978:246-275.]
- 11 Cheng Min-de, Shen Xie-chang. Image Recognition Introduction [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1983:190-200. [程民德, 沈燮昌. 图像识别导论[M]. 上海:上海科学技术出版社, 1983:190-200.]