

图像扭曲变换中高斯基函数的最优参数分析

张智雄 周平 杨烜

(深圳大学信息工程学院, 深圳 518060)

摘要 薄板样条插值 TPS 是基于标记点的医学图像弹性配准中常用的插值方法, 但该方法的扭曲作用是全局的, 对于局部扭曲配准会导致匹配精度下降。基于径向基函数的图像变换方法可以解决局部扭曲配准问题, 但如何选取径向基函数的参数还没有很好地解决。本文针对以高斯基函数为径向基函数的局部弹性变换问题, 讨论了双标志点情况下高斯径向基函数的参数选取方法, 该方法可以使双标志点之间的扭曲影响范围最局部化。本文结论用于多标志点的图像配准时可以解决图像局部弹性变换问题, 实验结果验证了本文的结论。

关键词 图像配准 紧支撑 弹性扭曲 标志点

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)02-0334-06

Parameter Choosing of Gaussian Function in Elastic Image Deformation

ZHANG Zhi-xiong, ZHOU Ping, YANG Xuan

(College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060)

Abstract Common tools based on landmarks in medical image elastic registration are the thin plate spline (TPS). However, in real application, such scheme would deform the image globally when the deformation desired is local. Although radial basic functions can limit the effect of the deformation locally, how to choose its parameter is still a problem. This paper used Gaussian function to compute the local elastic registration, purposed a method to choose Gaussian parameter to localize the deformation between two landmarks. Using this method in local image elastic registration base on landmarks, deformation of image could be reduced. Finally, this paper provides lots of experiments to support our conclusion.

Keywords image registration, compact support, elastic registration, landmarks

1 引言

弹性图像配准是医学图像配准中一个具有挑战性的问题, 而图像弹性变换方法是弹性配准问题的重要研究内容。1989年, Bookstein 提出了薄板样条插值(TPS)方法^[1], 该方法可以确保标记点准确位置, 并使整图的扭曲能量最小, 得到了广泛的应用^[2-3]。在此基础上, Donato 和 Belongie 提出了近似薄板样条算法^[4], 使标记点对的误差得到处理, 并使扭曲的平滑性得到调控。但是, TPS 的扭曲目标

是使图像扭曲能量最小, 它的扭曲效果是全局性的, 其扭曲作用将作用到整个图像空间。当待配准的图像与目标图像间仅存在局部的差异时, 该方法的应用带来了配准的匹配情况的下降^[5-7]。为解决局部弹性配准问题, Arad 和 Reisfeld 提出了使用高斯函数 $U(r) = e^{-(r/c)^2}$ 作为径向基函数来进行图像的局部扭曲变换^[8]。图像的扭曲效果与高斯函数的参数 c 有直接关系, c 取值大则扭曲的影响范围大, 扭曲能量较小; c 取值小则扭曲的影响范围小, 但扭曲能量较大。如何寻找合适的参数 c 以在扭曲能量与扭曲范围之间取得平衡, 还没有得到很好的解决。

基金项目: 国家自然科学基金项目(60572101)

收稿日期: 2007-02-05; 改回日期: 2007-07-19

第一作者简介: 张智雄(1982 ~), 男, 深圳大学计算机应用专业硕士研究生。主要研究方向为医学图像处理。

E-mail: terry_kim@21.cn.com

本文将讨论以高斯函数为基函数的图像局部弹性变换中的参数选择问题。

2 基于高斯基函数的局部弹性变换方法

弹性图像插值函数 $f(x, y)$ 如下:

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + R(x, y) = a_1 + a_x x + a_y y + \sum_{i=1}^n \omega_i U(p_i - (x, y)) \quad (1)$$

式中, $\Phi(x, y)$ 和 $R(x, y)$ 分别代表弹性插值函数的仿射部分和弹性部分, 高斯基函数 $U(r) = e^{-r/c}$, $r_i = |p_i - p| = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2}$ 为点 $p(x, y)$ 到标记点 $p_i(x_i, y_i)$ 的距离, ω_i 为对应标记点 p_i 的弹性系数。为了更进一步地了解弹性形变, 在研究高斯函数作为薄板样条插值基函数时, 把仿射变换的部分去掉, 也就是先假设经过初步配准, 已经解决图像的平移、旋转及拉伸问题, 从而更进一步突出弹性形变的效果。令 \mathbf{K} 为 $n \times n$ 矩阵, $K_{ij} = U(r_{ij})$, \mathbf{P} 为参考图中的标志点集, \mathbf{Q} 为配准图中对应的标志点集, 解方程(2)可以得到弹性变换系数 ω :

$$\omega = \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{Q} - \mathbf{P}) \quad (2)$$

映射函数可简化如下:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= x + \sum_{i=1}^n \omega_{xi} U(p_i - (x, y)) \\ f_y(x, y) &= y + \sum_{i=1}^n \omega_{yi} U(p_i - (x, y)) \end{aligned} \quad (3)$$

3 高斯基函数的参数选取

首先从只有两个标志点的网格图入手, 分析高

斯基函数的参数选取问题。设原图和配准图上有 2 对标志点, 原图上的标志点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2) 对应的配准图的标志点 (x'_1, y'_1) 和 (x'_2, y'_2) 。根据式(2), 可以列出求解 ω 的方程:

$$\begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{1y} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 & \Delta y_1 \\ \Delta x_2 & \Delta y_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式中, $\Delta x_i = x'_i - x_i$, $\Delta y_i = y'_i - y_i$, 也就是标志点对在 x 和 y 方向上的位移量。解方程可得:

$$\begin{bmatrix} \omega_{1x} & \omega_{1y} \\ \omega_{2x} & \omega_{2y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1 - U(r) \cdot \Delta x_2}{1 - U^2(r)} & \frac{\Delta y_1 - U(r) \cdot \Delta y_2}{1 - U^2(r)} \\ -\frac{U(r) \cdot \Delta x_1 + \Delta x_2}{1 - U^2(r)} & -\frac{U(r) \cdot \Delta y_1 + \Delta y_2}{1 - U^2(r)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

从而得到 x 方向和 y 方向的插值函数:

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= x + \omega_{1x} \cdot U(r_1) + \omega_{2x} \cdot U(r_2) \\ f_y(x, y) &= y + \omega_{1y} \cdot U(r_1) + \omega_{2y} \cdot U(r_2) \end{aligned} \quad (6)$$

插值函数(6)在 x 方向上的插值函数和在 y 方向上的插值函数实质上是一样的, 本文以 y 方向上的扭曲变换为例子进一步分析。

图 1 是双标志点在不同高斯函数参数情况下局部扭曲的效果。从图 1(a)可以看出, 当高斯参数过小时, 两标志点之间的弹性扭曲形变存在着鞍点, 两个标志点之间的扭曲似乎没有太大关系, 且这个扭曲造成的扭曲能量很大, 可以认为这两点之间的扭曲是不关联的; 而当高斯参数过大时, 两标志点之间的扭曲明显是相关的, 但是扭曲所影响的范围明显过大, 如图 1(b)所示。理想的是找到一种临界状态(如图 1(c)所示), 使得图像的扭曲范围不要太大(限制在局部), 同时又使得两标志点之间的扭曲相互关联(即两标志点在同一个局部之中)。

* 表示原标志点位置 ○ 表示位移后标志点位置

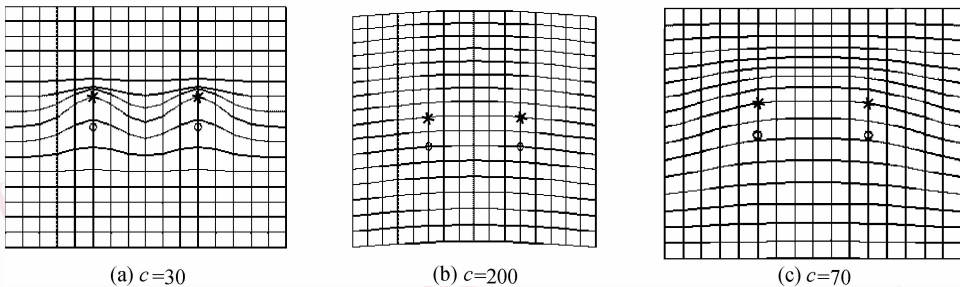


图 1 两个标志点在高斯参数 c 取不同值时弹性扭曲结果

Fig. 1 Deformation of 2 Landmarks with different Gaussian parameter

因此,做出如下假设:①标志点之间的扭曲存在鞍点,则定义它们之间没有互相影响;②两标志点之间的扭曲不存在鞍点,则说明这两点之间的扭曲相互影响。为了简化分析,本文假设这两个标志点都沿着 y 方向上位移了 n 个像素。然后讨论两个水平标志点之间连线的位移情况,分析什么情况下会出现鞍点。 y 方向的位移函数为

$$\begin{aligned} \Delta f_y &= w_{1y} \cdot U(r_1) + w_{2y} \cdot U(r_2) \\ &= w_{1y} \cdot e^{-((x-x_1)/c)^2} + w_{2y} \cdot e^{-((x-x_2)/c)^2} \end{aligned} \quad (7)$$

鞍点出现在 Δf_y 一阶导数为 0,二阶导数大于 0 处。为了更好地研究鞍点什么情况下会出现,将式(7)作如下简化:由于 x_1 和 x_2 是表示两标志点距离的参数,而希望得到的是 $|x_1 - x_2|$ 与高斯参数 c 之间的关系,因此,可假设 $x_1 = 0, x_2 = L$, 于是有 $|x_1 - x_2| = L$, 并用 L 来代替原有的 x_1 和 x_2 (这个替换相当于对原图像和配准图同时作了一个向左平移 x_1 的仿射变换)。则式(7)可简化为

$$\Delta f_y = w_{1y} \cdot e^{-((x)/c)^2} + w_{2y} \cdot e^{-((x-L)/c)^2} \quad (8)$$

由于当 $\Delta y_1 = \Delta y_2$ 的时候, $w_{1y} = w_{2y}$ 。因此,进一步假设 $w_{1y} = w_{2y} = a$, 其中 a 为常数,做一个归一化处理,即使 $a = 1$ 。最后,令 $x/c = p, L/c = k$ (注意 k 恒大于 0)。将参数代入式(8),并计算其一阶导数和二阶导数,有

$$\Delta f_y = e^{-(p)^2} + e^{-(p-k)^2} \quad (9)$$

$$\Delta f'_y = -2p \cdot e^{-(p)^2} - 2(p-k) \cdot e^{-(p-k)^2} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta f''_y &= -2e^{-(p)^2} + 4p^2 \cdot e^{-(p)^2} - 2e^{-(p-k)^2} + \\ &4(p-k)^2 \cdot e^{-(p-k)^2} \end{aligned} \quad (11)$$

对式(10)用泰勒公式展开(五阶),并分解因式,得:

$$\begin{aligned} \Delta f'_y &= -2p - 2(p-k) + 2p^3 + 2(p-k)^3 \\ &= (2k-p)[p^2 - kp + (k^2 - 1)] \end{aligned} \quad (12)$$

从式(12)可以看出,使得 $\Delta f'_y = 0$ 的其中一个根是 $p = k/2$ 。由于实验中标志点的扭曲是沿着 y 的正方向扭曲的,因此,若出现鞍面,则 $p = k/2$ 这个点上的 2 阶导数必然大于 0;反之,则 $p = k/2$ 这个点的 2 阶导数小于等于 0。因此,我们将 $p = k/2$ 代入式(11),考察原式二阶导数在这点近似值的正负性:

$$\Delta f''_{y(p=k/2)} = 2 \cdot (k^2 - 2) \cdot e^{-\left(\frac{k}{2}\right)^2} \quad (13)$$

式(13)的正负取决于 $(k^2 - 2)$ 这个因式。上文提过,当 $p = k/2$ 这个点的 2 阶导数小于等于 0 的时候不出现鞍面。因此,解方程 $\Delta f''_{y(p=k/2)} \leq 0$, 得:

$(k^2 - 2) \leq 0$, 即 $k \leq \sqrt{2}$ 。(注意这里省略了 $k > 0$ 这个前提条件)即 $c \geq L/\sqrt{2}$ 。

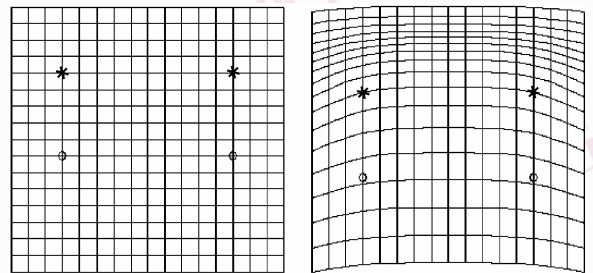
关于这个结论的误差分析如下:对等式(9)使用泰勒展开式展开到 5 阶,此时的精确度 $Rn(x) < e^0/(n+1)! \cdot x^{n+1} = \frac{1}{6!} \cdot x^6$, 这里的 x 表示的是 L/c 的值,一般来讲 x 至少小于 1.5, 将 $x = 1.5$ 代入,得 $Rn(x) < 0.016$, 即误差至多不超过 0.016。

根据上述推理,当 $c \geq L/\sqrt{2}$ 的时候,两点之间的扭曲不会出现鞍点,可以根据这个原则按需要调整高斯函数的参数 c , 使扭曲的局部性达到较好,同时又能保持扭曲的连续性。

4 实验结果

采用大量实验以验证本文提出的高斯参数选取方案的实际效果。首先以网格图为例,验证局部出现两个标志点平移的局部扭曲效果:图 2 中两标志点之间距离为 10 个格子(一个格子大小为 16 像素),它们同时向上位移了 5 个格子,按本文第 3 节提出的方案选取参数 $c = \frac{L}{\sqrt{2}} = 113.15$, 扭曲效果如图 2(b) 所示。

○标志点在原图上的位置 * 对应点在目标图上的位置



(a) 标志点位置

(b) 扭曲效果

图 2 本文方法双标志点局部扭曲效果图
Fig. 2 Deformation of 2 Landmarks using the proposed method

从图 2(b) 可以看到,该结果正好处在鞍点出现的临界值,验证了第 3 节中的结论。

为了将实验结果应用在图像处理中,接下来使用一组网格图来模拟实际图像扭曲变换中的局部扭曲效果,并提出多标志点时高斯参数的选取方案:图 3 为模拟一张图上有两个局部发生了弹性形变的情形,实验图中的变形发生在右上及左下两个局部

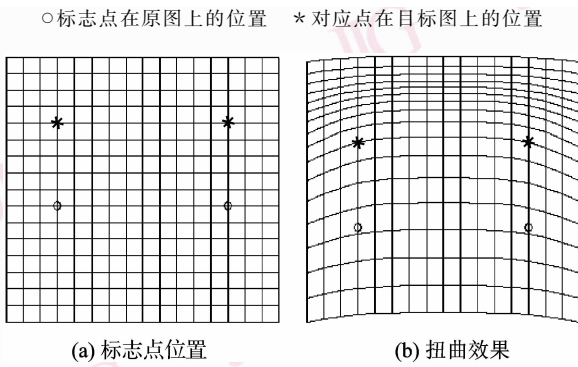


图 3 网格图多个标志点局部扭曲效果

Fig. 3 Deformation using the proposed method

(每个局部以 4 围成正方形的标志点表示,左下方的正方形标志点向右平移了 1 个格子,右上方的正方形标志点向左平移了 1 个格子),下面将介绍如何选取高斯参数,以求实每个局部内的扭曲限制在一个小范围之内,使两个扭曲之间互相不影响。

若希望两个正方形之间弹性扭曲相互不影响,则应对左上和右下正方形的标志点之间没有相互影响。为此,应尽量减小高斯参数以限制标志点的影响范围,但是图中两个局部的标志点与相邻的标志点应该有相互影响的关系,它们之间的扭曲不应该存在鞍点,故应按上文分析结果选择高斯参数 $c \geq L/\sqrt{2}$ (其中 L 为正方形边长) 以达到此目的。为了尽量限制扭曲局部化,可选择 $c = L/\sqrt{2} = 34$ (L 等于正方形边长,48 像素) 的情况。扭曲后结果如图 3(b),效果比较理想,两个正方形之间的扭曲是相互独立的,而正方形内部的扭曲是相互关联的。

下面对一幅测试图进行局部扭曲变换以验证上述结论。图 4(a) 中的弹性形变仅发生在图右上方局部,手工选取了 4 个标志点,采用 TPS 和高斯基函数进行弹性扭曲变换。并比较选择不同高斯参数

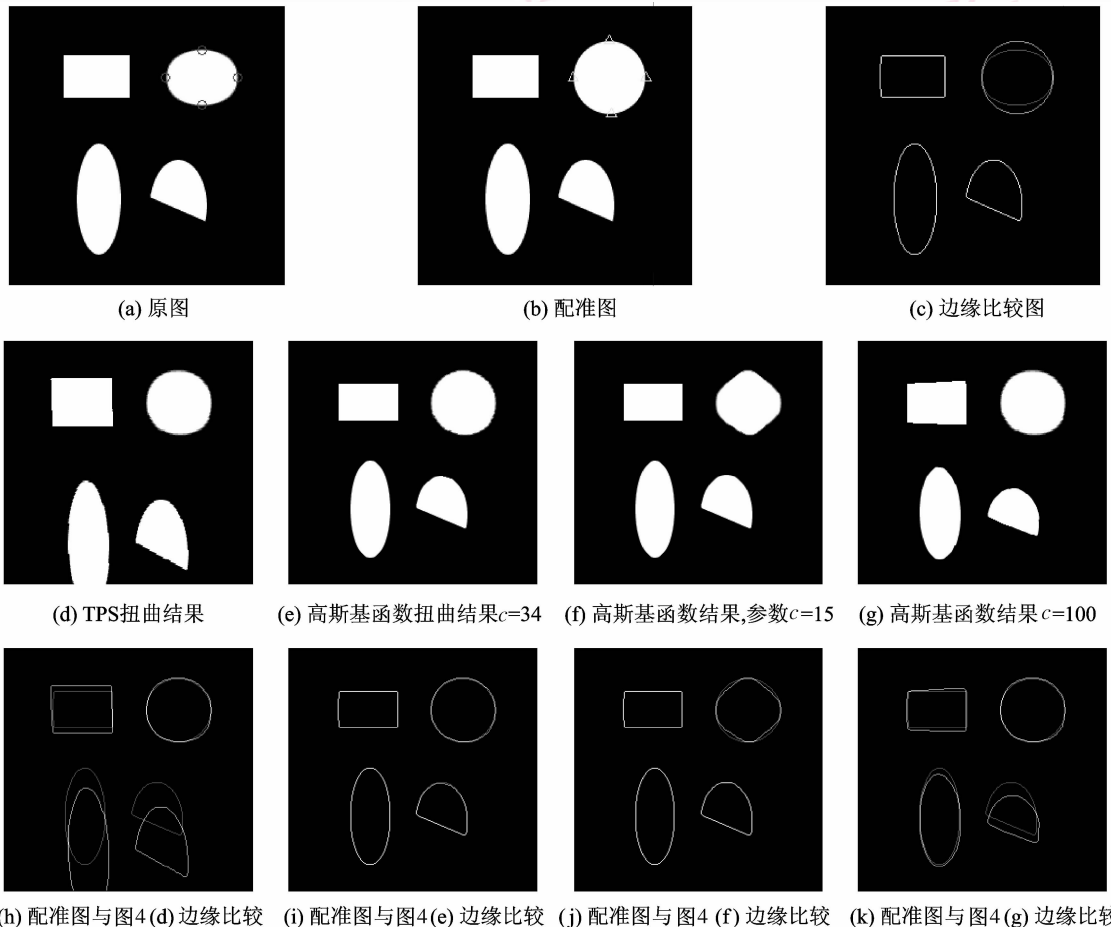


图 4 测试图扭曲效果比较

Fig. 4 Comparison of local deformations of test image

时的扭曲效果。按照本文介绍的方法, 高斯参数 c 由标志点之间的距离决定, 右上方区域可以被认为是一个局部, 在这个局部里面的扭曲每个标志点至少要和一个最近的标志点之间是相互影响的, 也就是其扭曲至少要和一个相邻的标志点保持相关。要达到该目的, 只需选择局部的标志点中最邻近标志点的最近距离最大者作为 L , 并按提出方法计算高斯参数 c 便可: 右上方相邻标志点之间的最大距离为 50, 所以, 可用下列式子确定高斯参数: $c = 48 / 1.414 = 34$ 。下面还给出了利用其他高斯参数进行扭曲的结果进行比较以说明该参数的优越性。

从图 4 可以看出, 图 4(e) 的边缘比较图中边缘重合部分最多, 并且能按照所需的局部大小限制扭曲范围, 扭曲效果比较理想; 当 c 取值过小时 (图 4(f)), 扭曲的能量过大, 导致扭曲不平滑; c 取值过大时 (如图 4(g) 所示), 扭曲发生的范围过大, 影响了一些不希望发生扭曲的地方。表 1 是对图 4(d) ~ (g) 与配准图的 Hausdorff 距离^[9] 的比较, Hausdorff 距离的定义如下:

$$H(A, B) = \max(h(A, B), h(B, A)) \quad (14)$$

$$h(A, B) = \max_{a \in A} \min_{b \in B} \|a - b\|,$$

$$h(B, A) = \max_{b \in B} \min_{a \in A} \|a - b\| \quad (15)$$

$\|a - b\|$ 代表点 a 到 b 的欧氏距离。Hausdorff 距离越小意味着两幅图像越近似。从表 1 可以看出本文

方法得到的配准结果与原图 Hausdorff 距离最接近, 也就说明其扭曲效果较好。

表 1 图 4 高斯参数取值不同时扭曲结果与原图的 Hausdorff 距离

Tab. 1 Hausdorff distance of deformation results with different Gaussian parameters and reference image in Fig. 4

	$c = 15$	$c = 34$	$c = 100$	TPS
Hausdorff 距离	3.606	1.000	13.928	40.000

最后, 利用一组医学图像扭曲变换的例子来说明选择高斯参数的扭曲效果。图 5 中只有左上方部分存在局部变形, 本文采用手工选取的标志点, 并使用 TPS 方法和高斯函数分别对图像作弹性扭曲变换。

图 5(a) 左上方相邻的标志点之间的最远距离约为 20 个像素左右, 为了保持扭曲变换的连续性并使扭曲的局部化达到最强烈, $c = L/\sqrt{2}$ 取值在 15 左右比较合适。图 5(d) 是 TPS 的扭曲结果, 从图上扭曲的情况来看, 标志点原本只存在于图像的左上方, 也就是说原图像和配准图上只有左上方区域存在局部差异。然而, 经 TPS 扭曲后结果却和配准图的全局都存在差异, 其 Hausdorff 距离为 7.071 1; 图 5(f) 使用高斯函数并按本文方法选择参数扭曲后的结果, 扭曲很好地限制在局部, 其 Hausdorff 距离为 5.385 2,

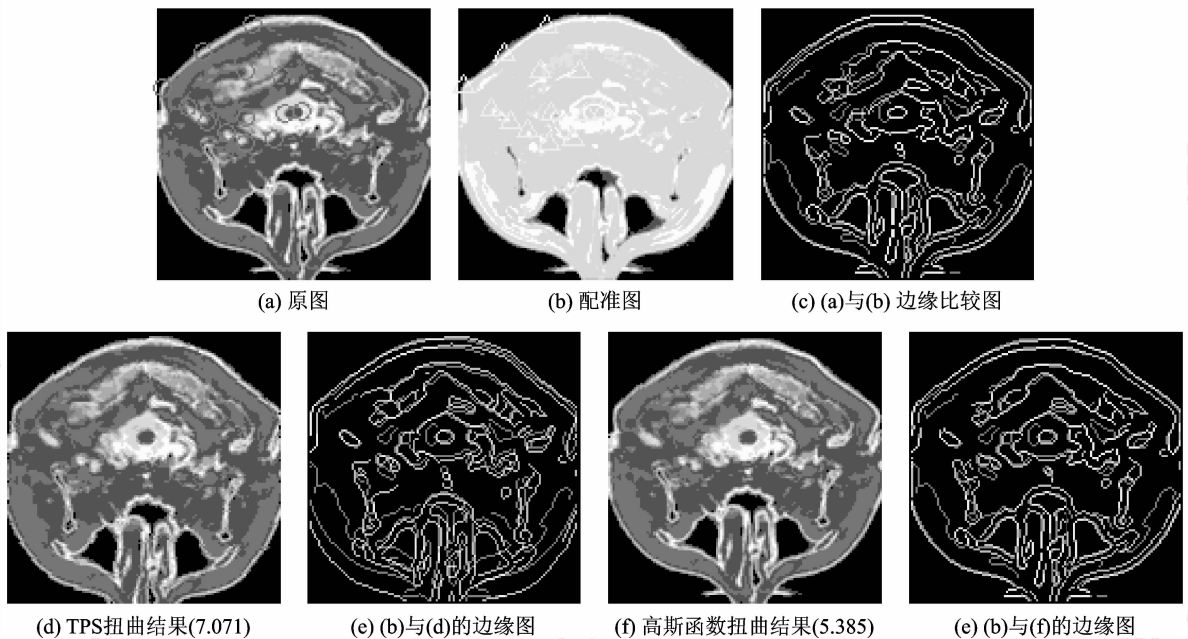


图 5 医学图像扭曲效果比较

Fig. 5 Comparison of local deformations of medical image

比 TPS 的扭曲效果好。这说明 TPS 原始基函数很难处理局部扭曲问题,另一方面也说明使用高斯函数作为支撑函数作弹性扭曲变换,通过选择合适的参数,可以很好地解决图像的局部扭曲问题,使得扭曲只发生在局部(图 5(e))。

从上述实验可以看出,在处理局部扭曲问题时,选择合适参数的高斯基函数的弹性扭曲效果明显要比 TPS 算法好,可以使局部的弹性扭曲效果达到最优。

5 结 论

薄板样条插值 TPS 算法的扭曲效果是全局的,不适用于具有局部扭曲的图像的匹配问题。本文使用 Gauss 函数代替 TPS 原始基函数,并研究图像扭曲局部化效果和 Gauss 参数之间的关系。医学图像弹性配准时,我们可以取局部的相邻两个标志点之间的最大距离来确定最优高斯参数,对图像进行弹性扭曲变换,使图像扭曲的效果达到最优。

参考文献 (References)

1 Bookstein Fred L. Principal warps: Thin-plate splines and the decomposition of deformations [J]. IEEE Transactions on Pattern

- Analysis and Machine Intelligence, 1989, 2(6): 567-585.
- 2 Brown B J, Rusinkiewicz S. Non-rigid range-scan alignment using thin-plate splines [A]. In: Proceedings of the 2nd International Symposium on 3D Data Processing, Visualization and Transmission [C], Thessalonica, Greece, 2004: 759-765.
- 3 Likar B, Pernuš F. A hierarchical approach to elastic registration based on mutual information [J]. Image and Vision Computing, 2001, 19(1): 33-44.
- 4 Donato G, Belongie S. Approximate thin plate spline mappings [A]. In: Proceedings of the 7th European Conference on Computer Vision [C], Copenhagen, Denmark, 2002: 531-542.
- 5 Ruprecht D, Müller H. Free form deformation with scattered data interpolation methods [A]. In: Computing Supplementum [C], London, UK, 1993: 267-281.
- 6 Fornet M, Rohr K, Stiehl S. Elastic registration of medical images using radial basis functions with compact support [A]. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Fort Collins, Colorado, USA, 1999: 402-407.
- 7 Fornet M, Rohr K, Stiehl H. Radial basis functions with compact support for elastic registration of medical images [J]. Image and Vision Computing, 2001, 19(1-2): 87-96.
- 8 Arad N, Reisfeld D. Image warping using few anchor points and radial functions [J]. Computer Graphics Forum, 1995, 14(1): 35-46.
- 9 Sim Dong-Gyu, Kwon Oh-Kyu, Park Rae-Hong. Object matching algorithm using robust Hausdorff distance measures [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, 8(3): 425-429.