

基于 LEPP 递变的四面体网格自适应剖分算法

刘 君¹⁾ 朱善安¹⁾ HE B²⁾

¹⁾(浙江大学电气学院, 杭州 310027)

²⁾(Department of Biomedical Engineering, University of Minnesota, Minneapolis 55455, USA)

摘要 为了更合理地进行四面体网格剖分,提出了一种根据待剖分对象形态不同进行网格密度自适应调整的四面体网格剖分方法。该方法首先采用 BCC(body-centered cubic) 网格初始化网格空间,并根据表面曲率的大小以及距离物体表面的远近,采用 LEPP(longest edge propagation path) 算法由外至内对初始化后的网格空间进行不同尺度的细分;然后对横跨表面的网格进行调整,以形成对象的表面形态;最后采用以质量函数引导的拉普拉斯平滑与棱边收缩(edge collapse)的方法对网格的质量进行优化来最终得到待剖分对象的四面体网格。结果表明,该方法所生成的网格不仅具有自适应的网格密度,而且网格质量比常用的 Advancing Front 算法也有所提高。对于基于 3 维断层图像或表面模型进行有限元建模,该方法不失为一种行之有效的好方法。

关键词 网格剖分 网格优化 有限元建模

中图分类号: TP341.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2008)12-2394-06

Adaptive Tetrahedral Mesh Generation Based on LEPP Algorithm

LIU Jun¹⁾, ZHU Shan-an¹⁾, HE B²⁾

¹⁾(College of Electrical Engineering, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

²⁾(Department of Biomedical Engineering, University of Minnesota, Minneapolis, 55455, USA)

Abstract A tetrahedral mesh generation method based on which the mesh density could be adjusted with the shape of the object was developed in the paper. The BCC lattice was used to initialize the mesh space. According to the curvature and the distance from the lattice to the surface of the object, the LEPP algorithm is adopted to refine the initialized mesh from the outer to the inner with different scales. Then all the lattices that stride the surface were adjusted to fit the shape of the object. At last the quality function navigated Laplacian smoothing and Edge Collapse methods were used to optimize the quality of the meshed tetrahedral and the meshed model was obtained. Result shows the method improves the configuration of the mesh while the quality of the tetrahedral is also guaranteed. The method is tested to be useful in the finite element modeling based on 3D computer tomography images or surface model.

Keywords mesh generation, mesh optimization, finite element modeling

1 引言

随着计算机图形学和基于有限元的数值计算方法在 3 维计算领域的应用日益广泛,用有限

元网格方式构建物体的 3 维模型显得越来越重要。在有限元网格的剖分中,网格的类型通常可以有多种选择方式,如四面体和六面体等等。由于四面体单元结构简单,且容易逼近弯曲的物体表面,因此在网格剖分中,四面体单元通常是人

基金项目: 美国国家科学基金资助项目(NSF BES-0411898);美国国立卫生院基金资助项目(NIH R01 EB00178);中国国家自然科学基金资助项目(NSFC-50577055)

收稿日期: 2006-12-29; **改回日期:** 2007-09-20

第一作者简介: 刘 君(1980 ~),男,浙江大学电气工程学院博士研究生。研究方向为图像处理。E-mail:liujun1980@sohu.com

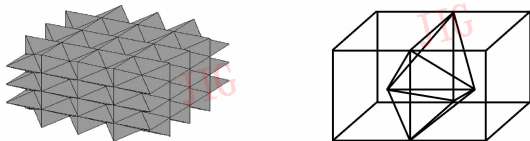
们的首选。对于四面体网格的剖分,近些年来研究者们提出了多种剖分算法,其中比较典型的有基于 Delaunay 剖分的方法^[1]和基于 Advancing Front 算法的剖分方法^[2,3]。然而由于这些剖分方法或是只能形成均匀分布的网络结构,或是需要人为地给定加密区域,因此都无法根据待剖分对象的形态自适应地调整网格的单元尺寸,而且当节点布置不够合理的时候,靠近物体表面的网格质量难以保证。基于上述因素,本文提出了一种在保证网格质量的前提下,可根据待剖分对象的表面形态以及内部纵深大小来自适应调整网格密度的四面体网格剖分方法。测试结果显示,采用该方法剖分得到的网格模型不仅具有更为合理的网格分布,而且其剖分的网格质量可以确保该模型应用于有限元方法的各种数值计算。

2 剖分方法

本文所介绍的剖分算法由 4 部分组成,现简介如下:

2.1 网格空间的初始化

网格空间的初始化,即构建一个可包含整个待剖分对象的空间区域,并对其进行网格化的处理,在这一步中,本文采用的是 BCC (body-centered cubic) 网格的构建方法^[4],BCC 网格是一种与天然水晶的结构完全一致的网格构造方式。在网格构建的时候,首先将选定的空间区域用小立方体的方式进行等分;然后在每个小立方体的中心插入一个中心节点,且小立方体每条棱边上的两个节点都与相邻两个中心节点构成一个四面体,这样整个空间便被划分成了由一系列四面体所组成的网格。图 1 所示即为经过 BCC 网格化后的一个正方体空间及其内部的放大结构。由于在 BCC 网格中每个单元的形状大小都完全一样,因此这种网格结构为后续的网络细分提供了很大的便利。



(a) BCC 网格化后的正方体空间 (b) 正方体空间的内部放大结构

图 1 初始化网格结构

Fig. 1 Intialization of the mesh

2.2 基于 LEPP 的自适应细分

在网格空间的初始化完成了之后,就要对均匀的网格结构进行有选择的细分。为了在整个空间中合理地选择出需要进行细分的区域,本文制定了以下两条规则:

规则(1) 表面的变化率越大,周围区域的细分幅度越大;

规则(2) 距离表面越近,周围区域的细分幅度越大。

在具体的细分过程中可采用一种由表及里的细分过程,即首先确定对象表面的细分幅度,然后根据表面的细分情况确定内部相应的细分幅度。对于位于待剖分对象表面上的每一个点(对于 3 维体数据可以是表面上的每一个像素点,对于表面网格可以是表面网格中的每个节点),细分时,可首先计算物体表面在该点处的曲率,而对于表面曲率的计算则采用了一种简单实用的方法,即先在目标点的一个邻域内计算所有表面点的坐标均值,然后将目标点的坐标与该均值做比较,并通过二者差值的绝对值来决定细分的幅度。考虑到斜面上的坐标在 3 个方向的变化程度不统一,通常只取 x 、 y 、 z 方向中方差最小的 1 维做比较。由于目标点处的细分幅度随坐标差值的增大而增大,因此具体的转换关系可以由用户根据需要设定,本文采用了以下所示的正比例函数关系:

$$T = \text{round}(a \times d) \quad (1)$$

其中, T 表示在包含该目标点的四面体单元的初始化大小的基础上需要进行细分的次数, d 表示该点坐标方差最小的 1 维与其邻域内所有表面点坐标均值的相应维之间的差值,通常以网格初始化时的小立方体的边长为一个单位长度, a 表示细分幅度,可由用户根据需要设定,其大小一般在 1 ~ 10 之间,round 为取整运算。

在确定了所有表面点的细分幅度后,就可对横跨物体表面的所有单元根据所包含表面点的细分幅度进行细分。所谓横跨物体表面的单元是指在一个四面体中至少有一条棱边的两个节点分别位于物体内外的单元。在网格初始化完成后,所有的单元都被定义为一级单元,如果某个单元被做了一次细分,则细分后形成的相应单元的级别就在母单元的基础上加 1,定义为二级单元,以此类推。显然对于任意一个横跨表面的单元,其内部必然包含一个以上的表面点,因此可选取细分

幅度最大的一个表面点作为该单元的细分尺度,如果该单元的细分级别小于这个细分尺度,则采用 LEPP(longest edge propagation path)算法对这一单元进行细分^[5]。

在介绍 LEPP 算法之前,首先定义以下两个概念。

定义 1 四面体 t 的最长边的繁衍路径是由一系列通过公共边相邻的四面体所组成的集合,在这个集合中,后一个四面体通过前一个四面体的最长边与之相连。

定义 2 四面体 t 的最长边的繁衍路径上的最后一个四面体 t_{terminal} 是具有这样一个属性的单元,即通过 t_{terminal} 的最长边 l_{longest} 与 t_{terminal} 相连的所有四面体的最长边的长度与 l_{longest} 相等(注:任意四面体 t 的最长边繁衍路径上可以有多个 t_{terminal})。

利用 LEPP 算法对网格进行细分的步骤可以概括如下:

(1) 对于待细分的四面体 t ,依次找出四面体 t 的最长边繁衍路径上的所有 t_{terminal} ;

(2) 依次在所有 t_{terminal} 的最长边的中点上插入新节点,用于将所有包含这条最长边的单元一分为二,细分后所形成的新单元的细分级别在其母单元的基础上加 1;

(3) 重新搜索四面体 t 的最长边繁衍路径上的所有 t_{terminal} ,并重复步骤(2)的工作,直到四面体 t 的最长边被细分。

LEPP 算法用于网格细分的一个优点是在插入新节点的过程中,能够尽可能地使生成的小四面体的质量得到保证。

在对所有横跨物体表面的单元都根据所包含的表面点进行了细分之后,还需要对完全包含在物体内部的单元也进行幅度不同的细分,这样做的目的是为了保证四面体的大小在物体内部呈现由表及里的逐渐变化。与物体表面单元的细分方法不同的是,内部单元的细分尺度由与其相邻的四面体的细分尺度决定,本文认为当两个四面体包含一条以上的公共边时,则它们就是相邻单元。为了保证细分的尺度由表及里的变化,本文制定了以下规则:

规则(3) 任意一个四面体的细分级别不应该比与之相邻的所有四面体的最大细分级别低一级以上(不含一级),否则就应该应用 LEPP 算法对该单元进行细分。

由于表面单元经过细分后其级别远高于内部单元,因此通过执行上述规则可以在不同尺度的单元之间完成由小到大逐渐的过渡。

2.3 表面形态的重建

网格化后的空间虽然包含了整个待剖分的对象,但是无论如何细分总有一些单元横跨了物体的表面,为了重建对象的表面形态,需要对这部分单元的棱边进行调整,本文采用的是棱边分裂与节点移动相结合的方法进行调整。

所谓节点移动,即是将横跨物体表面的棱边上两个节点中的其中一个移动到这两种组织的表面上,如图 2 所示的四面体 $N_1N_2N_3N_4$,其中棱边 N_1N_2 横跨了两种组织,点 N_0 为这两种组织在棱边 N_1N_2 上的边界点,那么接着要做的就是将节点 N_1 和 N_2 之间的一个移动到点 N_0 的位置上。具体移动哪一个节点可由下式所给出的性能指标函数决定:

$$f(t) = \sqrt{24} \left(\frac{R(t)}{L_{\max}(t)} \right) \quad (2)$$

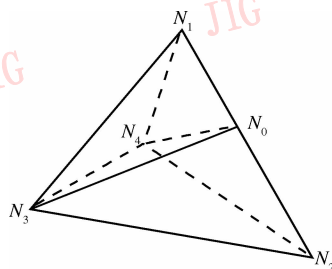


图 2 四面体网格的节点移动与棱边分裂

Fig. 2 Node moving and edge split of a tetrahedral

式(2)是目前较为公认的一个四面体质量评价标准,其中 $f(t)$ 是描述四面体 t 的形状好坏的一个指标函数,称为 stretch value。 $R(t)$ 是四面体 t 的内接球半径, $L_{\max}(t)$ 是四面体 t 的最长边长度, $f(t)$ 越大,则表示四面体 t 的形状越好,一般来说,当有较多数量的四面体的 $f(t)$ 低于 0.05 时,就可能使该模型在用于有限元计算时产生显著的误差^[6]。如果点 N_1 移动到点 N_0 后,所有包含点 N_0 的四面体的 $f(t)$ 的最小值大于点 N_2 移动到点 N_0 后所有包含点 N_0 的四面体的 $f(t)$ 的最小值,则移动点 N_1 ,反之则移动点 N_2 。

需要注意的是,节点的移动不应改变网格的拓扑结构,即所有包含有被移动节点的四面体在该节点移动后的网格结构应与移动前保证拓扑一致性,

简言之,对于任意一个包含有被移动节点的四面体,该节点不能移动到它在这个四面体中所对应的三角面的另一面去,否则网格的拓扑性就会被破坏。当出现这种情况的时候,则取消节点移动,而采用棱边分裂的方式。

所谓棱边分裂是在点 N_0 的位置上插入新的一个节点,使得所有包含有棱边 N_1N_2 的四面体都在点 N_0 处被剖分成两个小四面体(如图 2 所示),四面体 $N_1N_2N_3N_4$ 被分成了 $N_1N_0N_3N_4$ 与 $N_0N_2N_3N_4$ 两个更小的四面体。

2.4 网格质量的优化

棱边分裂的方式虽然不会破坏网格的拓扑结构,但是当点 N_0 非常接近于点 N_1 或者点 N_2 时,分裂所形成的四面体单元的形状会非常差,这样可能会导致最后所形成的模型在用于基于有限元方法的数值计算时不收敛,因此要对网格形态进行的优化,本文是采用棱边收缩(edge collapse)^[7]与拉普拉斯平滑^[8]相结合的方法进行优化。

所谓棱边收缩是指对于某一个四面体 t ,如果 $f(t) < f_0$, 其中 f_0 是所设定的阈值,则将四面体 t 的某一条棱边上的两个节点移动至同一点,继而所有包含这条棱边的四面体单元都因为被压缩成了一个平面而被取消。

节点的移动方式有以下 3 种情况:

(1) 若待收缩棱边的两个节点都是表面节点,则这两个节点中的其中一个保持不动,另一个节点移动到与之相同的位置,具体移动两个节点中的哪一个由与 2.3 节中之节点移动相同的判别方法决定。

(2) 若待收缩棱边的两个节点中的一个为表面节点,而另一个是内部节点,则表面节点不动,可将内部节点移动到表面节点的位置。

(3) 若待收缩棱边的两个节点都是内部节点,则将这两个节点同时移动到该棱边的中点处。

具体收缩四面体 t 中哪一条棱边同样由与节点移动相同的判别方法决定,一般来说,可首先选择收缩 6 条棱边中最短的一条。

拉普拉斯平滑是指对所有的节点都按照如式(3)所示的方法做移动,其中 N_i 表示第 i 个节点平滑前的坐标, \hat{N}_i 表示该节点平滑后的坐标, $N_{i,j}$ 表示与该节点相邻的其他节点的坐标, n 表示与该节点相邻的其他节点的个数之和, α 是一个在 0 到 1

之间的尺度参数,表示每次调整的幅度。

$$\hat{N}_i = N_i + \alpha \times \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_{i,j} - N_i \right) \quad (3)$$

剖分完成以后,还需要对四面体进行分类,即确定哪些四面体落在了物体内部,哪些落在了物体的外部。分类的过程是这样进行的:对于任意一个四面体,其单元属性由它的 4 个节点所决定,如果 4 个节点都是表面节点的话,则该四面体的属性就由其重心所在的位置决定;如果该单元中存在某个节点不是表面节点,则该四面体的属性可由该节点所在的位置决定。由于所有横跨物体表面的棱边都在节点移动或者棱边分裂环节中被调整过了,因此不会出现在一个四面体中拥有两个以上分别属于物体内外的节点的情况。至此,只需要挑出那些落在剖分对象几何区域内的四面体,而抛弃掉周围的背景单元,即可完成剖分。

3 测试结果

为了对算法的有效性进行检验,本文在断层成像数据的基础上,对不同形状的零件和人体组织做了剖分测试,图 3 所示为一个 3 层球模型的剖分结果,这类球模型由于在医学工程领域经常用于脑电问题的有限元仿真计算,因此构造这类多层球的有限元模型非常有意义。从该球模型的剖面图可以看出,球模型内部的网格密度从边缘向球中心呈现出由密至疏的变化,很明显这比均匀的网格结构更为合理的布置了网格单元。

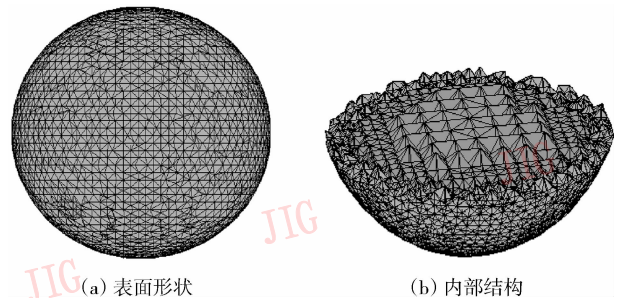


图 3 剖分后的 3 层球模型及其内部结构

Fig. 3 Meshed 3-layer ball with its inner configuration

图 4 所示为将该 3 层球模型用于基于有限元方法的脑电正问题计算后,当偶极子位置与方向变化时其计算结果与解析解的比较情况。由图 4 可以看出,从该模型上计算得到的有限元解与解

析解的误差及相关系数都在合理的范围之内^[9], 因此可以认为,应用本文方法剖分出的模型是真实可靠的。

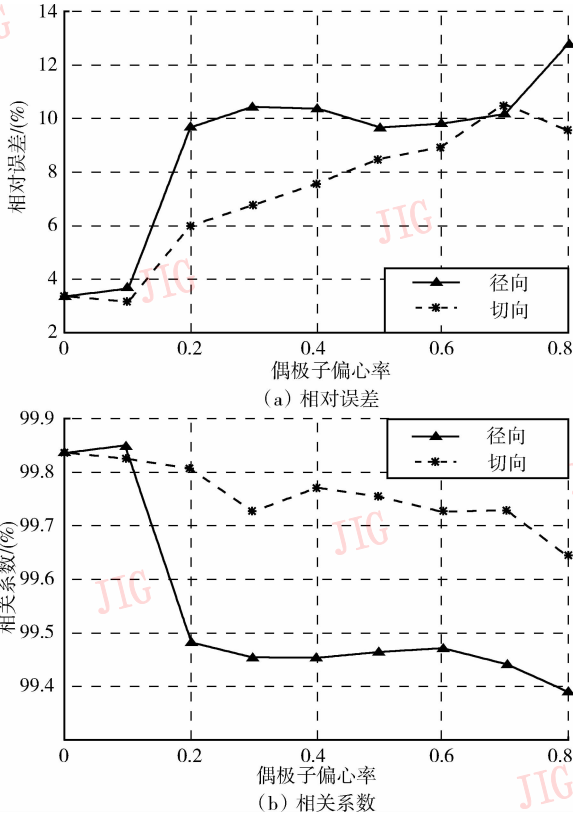


图 4 误差与相关系数随偶极子偏心率的变化情况
Fig. 4 Change of the error and the correlation coefficient with the eccentricity of the dipole

图 5 所示为一个由工业中空板材和金属零件断层图像剖分出的表面 3 维网格。通过表面的网格分布可以看出,网格的分布符合在曲率较大处更密,而在平滑处更疏的原则。

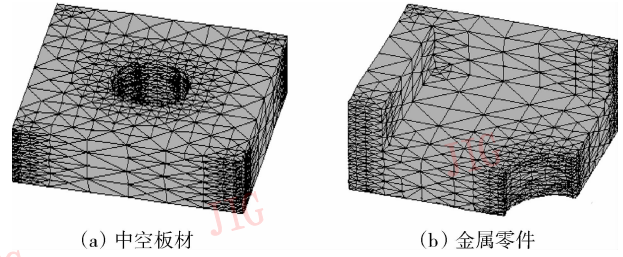


图 5 剖分后的中空板材与金属零件表面 3 维网格
Fig. 5 Meshed hollow board and metal hardware

图 6 所示为人体头部与颅脑的 CT (Computer Tomography) 图像的剖分结果。这两个模型均在经过阈值化处理后的 CT 图像上进行直接剖分得到。

表 1 中数据为图 6(a) 的头部 CT 数据在相同单元数量等级下,采用本文方法剖分的结果,以及对其表面进行网格化后,再采用 I-DEAS 软件(采用 Advancing Front 算法)进行剖分的结果的单元质量的比较,其中网格质量的衡量标准由式(2)给出。由表 1 可以看出,采用本文方法剖分出的模型不仅网格布局合理,而且在单元质量上明显优于传统的 Advancing Front 算法。

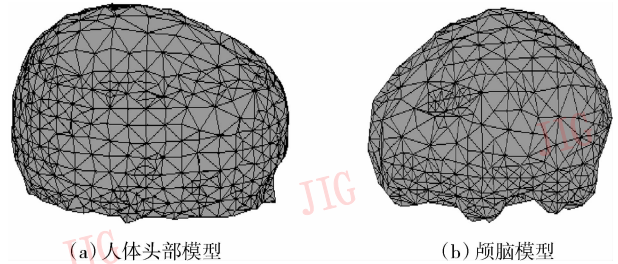


图 6 基于 3 维 CT 图像剖分后的头部与颅脑模型
Fig. 6 Meshed human head and brain

表 1 对不同单元数量模型的质量分析

Tab. 1 Analysis of models with different number of elements

| 方法 | 节点数 | 单元数 | 最大伸展 | 最小伸展 | 平均伸展 | 伸展小于 0.1 的单元数量/百分比 (%) |
|--------|--------|---------|------|---------|-------|------------------------|
| 本文方法 | 10 568 | 51 465 | 0.99 | 0.032 3 | 0.637 | 62/0.12 |
| | 21 246 | 105 685 | 0.99 | 0.042 2 | 0.645 | 109/0.10 |
| | 44 368 | 213 216 | 0.99 | 0.040 1 | 0.642 | 268/0.12 |
| | 10 128 | 49 826 | 0.99 | 0.001 7 | 0.623 | 105/0.21 |
| I-DEAS | 20 082 | 105 438 | 0.99 | 0.001 2 | 0.606 | 362/0.34 |
| | 45 106 | 223 656 | 0.99 | 0.000 8 | 0.628 | 756/0.33 |

4 结 论

本文提出了一种网格密度随物体的表面形态与空间位置而自适应变化的四面体网格剖分方法。由于该方法采用了分级 LEPP 算法,致使该方法在合理布置网格结构的基础上,得到了高质量的四面体单元,因此采用该方法剖分出的模型,不但可以用于 3 维造型的演示与分析,同样可以用于基于有限元方法的力学与电磁学方面的数值计算。然而该方法在基于体数据的剖分方面还存在一定的不足,这主要表现在对体数据表面特征点的寻优上,该方法只能通过多次细分的方法来逼近物体表面的细节,还不能确保一定可以在特征点处形成节点,对于这一问题将在接下去的工作中做进一步的深入研究。

参考文献 (References)

- 1 Yang Xiao-song, Shen Hao, Tang Zhe-seng. Segmented volume based tetrahedralization algorithm [J]. *Journal of Image and Graphics*, 2002, **7A**(9): 865 ~ 875. [杨晓松,申皓,唐泽圣. 基于分类体数据的四面体网格剖分算法[J]. *中国图象图形学报*, 2002, **7A**(9): 865 ~ 875.]
- 2 Lohner R, Parikh P. Generation of three-dimensional unstructured

- grids by the advancing front method [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 1988, **8**(10): 1135 ~ 1149.
- 3 Woo Y C, Dae Y K, Young T I, *et al.* Tetrahedral mesh generation based on advancing front technique and optimization scheme [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2003, **58**(12): 185 ~ 1872.
- 4 Mootz D, Wussow H G. Crystal structures of pyridine and pyridine trihydrate [J]. *Journal of Chemical Physics*, 1981, **75**(3): 1517 ~ 1522.
- 5 Rivara M C. New longest-edge algorithms for the refinement and/or improvement of unstructured triangulations [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1997, **40**(18): 3313 ~ 3324.
- 6 Tizzard A, Horesh L, Yerworth R J, *et al.* Generating accurate finite element meshes for the forward model of the human head in EIT [J]. *Physiological Measurement*, 2005, **26**(2): 251 ~ 261.
- 7 Molinari J F, Ortiz M. Three-dimensional adaptive meshing by subdivision and edge-collapse in finite deformation dynamic-plasticity problems with application to adiabatic shear banding [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002, **53**(5): 1101 ~ 1126.
- 8 Mark D, Dennis D G. Toward optimal mesh quality improvements for adaptive finite element electromagnetics with tetrahedral [J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2004, **40**(2): 989 ~ 992.
- 9 Zhang Y C, Zhu S A, He B. A second-order finite element algorithm for solving the three-dimensional EEG forward problem [J]. *Physics in Medicine and Biology*, 2004, **49**(4): 2975 ~ 2987.