

空间曲率矩不变量的构造及其应用

郭克华 刘传才 杨静宇

(南京理工大学计算机科学与技术学院, 南京 210094)

摘要 由于传统的不变量方法是针对位置坐标进行计算,难以识别形状特征有微小区别的3维目标。为了能方便地识别有微小区别的3维目标,首先利用平均曲率来描述空间曲面的固有特征,并将传统的3维矩不变量和曲率思想相融合,构造出了一类新的矩不变量——空间曲率矩不变量;然后通过归一化过程,证明了这类不变量对平移、旋转和尺度变换具有无关性。实验表明,空间曲率矩不变量方法和传统的方法相比,不仅能够更好地对形状相似的目标进行分类,并能降低运算复杂度。

关键词 空间曲率 矩不变量 微分几何 模式识别

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)05-925-06

Construction and Application of Spatial Curvature Moment Invariants

GUO Ke-hua, LIU Chuan-cai, YANG Jing-yu

(School of Computer Science & Technology, Nanjing University of Science & Technology, Nanjing 210094)

Abstract The three-dimensional shape descriptors have been applied to object recognition and classification. A novel three-dimensional shape descriptor combined with local and global representations is proposed in this paper. Firstly, traditional moment invariants are extended by including a term to represent spatial curvature and a series of new moment invariants named spatial curvature moment invariants is constructed. Secondly, normalization method of these invariants is presented and they are independent of the translation, rotation and scaling transforms. Experiments indicate the proposed method is of lower computation complexity than traditional three-dimensional shape descriptors without reducing the recognition rate.

Keywords spatial curvature, moment invariants, differential geometry, pattern recognition

1 引言

3维目标识别是模式识别领域内的一个重要课题,在许多应用场合,如3维目标配准、目标识别与分类等方面都具有较大的应用前景^[1-2]。形状描述方法是目标识别技术研究的核心,一般来说,形状描述方法可分为基于局部信息的形状描述方法(简称局部描述方法)和基于全局信息的形状描述方法^[3](简称全局描述方法)两种。其中全局描述方法通

常用于描述目标的总体特征,比较有代表性的方法有3维傅里叶描述子^[4-5]、3维矩不变量^[6-7]和统计方法^[8-9]等;局部描述方法主要根据目标局部信息的组织来表达目标特征,这类方法中比较有代表性的是曲率描述方法^[10]和形状分布方法^[11]等。与全局描述方法相比,局部描述方法虽能够更加准确地描述空间的曲面信息,但是其对噪声比较敏感,并且运算复杂度较高。全局描述方法虽有着较低的运算复杂度,且在噪声情况下具有鲁棒性,但是由于它们一般是针对坐标信息进行计算,因此对于形状区别

基金项目:国家自然科学基金项目(60472060,60472061)

收稿日期:2007-08-01;改回日期:2008-01-22

第一作者简介:郭克华(1980~),男,南京理工大学计算机科学与技术专业博士研究生。主要研究方向为模式识别与人工智能。

E-mail: guokehua@yahoo.com.cn

不大的目标,难以取得较好的识别效果。如图 1 中的两个 3 维目标所示,由于总体形状区别较小,因此用传统的 3 维矩不变量难以区分。

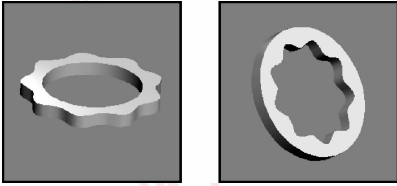


图 1 传统矩方法难以区分的两个目标

Fig. 1 Two objects moment approach cannot distinguish

针对此问题,本文提出了一种融合了局部描述方法和全局描述方法优势的新的 3 维目标描述方法。根据微分几何原理,空间曲面的固有特征可以由各个像素点的空间曲率来描述^[12],但由于此方法仅仅能够表达局部信息,因此本文将曲率的概念与传统的 3 维矩不变量融合起来用于形状描述。

3 维矩不变量^[6]是一种重要的全局描述方法,而且经过归一化的 3 维矩不变量对平移、旋转和缩放变换具有不变性。Lon 和 Don 等人成功地将 3 维矩不变量应用到目标识别中,并提出了较好的数值计算方法^[13]。Alexander 将 3 维矩不变量扩充到了 N 维空间^[14]。在各种矩不变量中,Zernike 矩具有最好的描述性能,并且已经被采纳到 MPEG-7 标准中,但是,Zernike 矩具有较高的复杂度。尽管如此,Nowotni 等人将 3 维 Zernike 矩成功地运用到了 3 维图像检索中^[7]。

由于传统矩不变量是基于目标区域信息来进行计算,因此运算复杂度较高。例如,计算一个边长为 N pixels 的正方体的 $p+q+r$ 阶矩,其运算复杂度为 $O(pqrN^3)$ 。本文的方法将传统的基于区域的矩不变量计算转变为基于曲面边界的计算,在不降低识别效果的情况下,其运算复杂度降低为 $O(pqrN^2)$ 。由于传统的矩不变量主要是针对空间区域内的像素点的位置进行计算,难以识别形状有微小区别的目标,而本文方法则是基于空间曲面上像素点的平均曲率进行计算,并构造出一种新的空间曲率矩不变量,通过对此不变量进行归一化,即可保证它在刚体变换下的不变性。实验表明,空间曲率矩不变量方法和传统方法相比,能够更好地对形状相似的目标进行分类。

总之,本文方法基于以下两个创新:(1)通过

将传统的基于 3 维区域的矩不变量计算转化为基于曲面边界的矩不变量计算来降低运算复杂度;(2)将曲率方法和矩方法融合在一起,使得这种新的描述方法既能够表达局部信息,又能够表达全局信息。

2 利用平均曲率表示空间曲面

空间曲面上任意一点的曲率是曲面的固有特征。由于曲面发生刚体变换时,曲率属于不变量^[12],因此可以利用曲面的表面曲率来描述其形状特征。离散情况下,给定以下 3 维空间中的参数曲面:

$$S(x, y) = [x, y, f(x, y)]^T, (x, y) \in D \quad (1)$$

式中, X - Y 平面为 3 维空间的参考平面, D 为曲面在此平面上的投影区域。 $f(x, y)$ 表示离散曲面到参数平面点 (x, y) 的距离。

$S(x, y)$ 可表示为以下两种基本形:(1) E, F, G 为第 1 基本形参数;(2) L, M, N 为第 2 基本形的参数^[12],其可表示如下:

$$\begin{cases} E = S_x \cdot S_x, F = S_x \cdot S_y, G = S_y \cdot S_y \\ L = S_{xx} \cdot n, M = S_{xy} \cdot n, N = S_{yy} \cdot n \\ n = (S_x \times S_y) / |S_x \times S_y| \end{cases} \quad (2)$$

E, F, G, L, M, N , 这 6 个参数就唯一地确定了曲面的两种基本形,在离散情况下,参数曲面 S 的一阶和二阶偏导可以分别表示为

$$\begin{cases} S_x = [1, 0, f_x]^T, S_y = [0, 1, f_y]^T \\ S_{xx} = [0, 0, f_{xx}]^T, S_{yy} = [0, 0, f_{yy}]^T \\ S_{xy} = [0, 0, f_{xy}]^T \end{cases} \quad (3)$$

这样,平均曲率 H 就可以由以下公式得出^[15]:

$$H = \frac{(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy}}{2(1 + f_x^2 + f_y^2)^{3/2}} \quad (4)$$

对于深度图像表面,采用局部多项式拟合方法求偏导的近似值,常利用 $n \times n$ 大小算子与原深度图像做卷积运算获得^[16],即

$$\begin{cases} f_x = D_x * f, f_y = D_y * f \\ f_{xx} = D_{xx} * f, f_{xy} = D_{xy} * f, f_{yy} = D_{yy} * f \end{cases} \quad (5)$$

式中, D 为 $n \times n$ 大小的算子。Besl 等人给出了当 $n=7$ 时其偏导窗口算子的计算方法^[17],即

$$\begin{cases} \mathbf{D}_x = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_1^T, \mathbf{D}_y = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_0^T \\ \mathbf{D}_{xx} = \mathbf{D}_0 \mathbf{D}_2^T, \mathbf{D}_{yy} = \mathbf{D}_2 \mathbf{D}_0^T, \mathbf{D}_{xy} = \mathbf{D}_1 \mathbf{D}_1^T \\ \mathbf{d}_0 = \frac{1}{7} [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T \\ \mathbf{d}_1 = \frac{1}{28} [-3 \ -2 \ -1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 3]^T \\ \mathbf{d}_2 = \frac{1}{84} [5 \ 0 \ -3 \ -4 \ -3 \ 0 \ 5]^T \end{cases} \quad (6)$$

式中, $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$ 是计算偏导窗口算子的列矢量。将按照式(5)、式(6)求出的偏导值代入式(4), 即可求出平均曲率。

3 空间曲率矩不变量的构造

传统的空间矩不变量中, 3 维 Zernike 矩^[7]虽具有较好的识别效果, 但是计算复杂度较高。因此, 本文将传统的 3 维矩不变量^[6]和平均曲率融合在一起构造了一种新的矩不变量。对于参数曲面 S 来说, 其 $p+q+r$ 阶空间曲率矩不变量定义如下:

$$m_{p,q,r} = \sum_x \sum_y \sum_z x^p y^q z^r H(x, y, z) \quad (7)$$

$p, q, r \in N, (x, y, z)$ 是表面上的任意像素点。曲面 S 的 $p+q+r$ 阶中心矩定义如下:

$$v_{p,q,r} = \sum_x \sum_y \sum_z (x-x_0)^p (y-y_0)^q (z-z_0)^r H(x, y, z) \quad (8)$$

其中,

$$x_0 = m_{1,0,0}/m_{0,0,0}, y_0 = m_{0,1,0}/m_{0,0,0}, z_0 = m_{0,0,1}/m_{0,0,0}$$

由于中心矩具有平移不变性, 因此可通过归一化过程来构造以下具有尺度不变性的矩:

$$\mu_{p,q,r} = \frac{v_{p,q,r}}{v_{0,0,0}} = \frac{v_{p,q,r}}{m_{0,0,0}^{1-p-q-r}} \quad (p, q, r \in N) \quad (9)$$

为降低运算复杂度, 可构造如下的 2 阶空间曲率矩不变量:

$$\begin{cases} J_1 = \mu_{2,0,0} + \mu_{0,2,0} + \mu_{0,0,2} \\ J_2 = \mu_{2,0,0}\mu_{0,2,0} + \mu_{2,0,0}\mu_{0,0,2} + \mu_{0,2,0}\mu_{0,0,2} - \mu_{1,0,1}^2 - \mu_{1,1,0}^2 - \mu_{0,1,1}^2 \\ J_3 = \mu_{2,0,0}\mu_{0,2,0}\mu_{0,0,2} - \mu_{0,0,2}\mu_{1,1,0}^2 - \mu_{0,2,0}\mu_{1,0,1}^2 - \mu_{2,0,0}\mu_{0,1,1}^2 + 2\mu_{1,1,0}\mu_{1,0,1}\mu_{0,1,1} \end{cases} \quad (10)$$

接下来将证明 2 阶空间曲率矩不变量的不变性。首先, 给定曲面 S , 若将一因子为 $k > 0$ 的尺度变换应用到此曲面, 并令其为 \hat{S} , 则像素点 (x, y, z)

变为 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, 显然有

$$\begin{cases} \hat{x} = kx, \hat{y} = ky, \hat{z} = kz \\ \hat{H}(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = H(x, y, z)/k \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} \hat{v}_{p,q,r} &= \sum_{\hat{x}} \sum_{\hat{y}} \sum_{\hat{z}} (\hat{x} - \hat{x}_0)^p (\hat{y} - \hat{y}_0)^q (\hat{z} - \hat{z}_0)^r \hat{H} \\ &= \sum_x \sum_y \sum_z (kx - kx_0)^p (ky - ky_0)^q (kz - kz_0)^r H/k \\ &= k^{p+q+r-1} \sum_x \sum_y \sum_z (x - x_0)^p (y - y_0)^q (z - z_0)^r H \\ &= k^{p+q+r-1} v_{p,q,r} \end{aligned}$$

因 $v_{0,0,0} = \sum_x \sum_y \sum_z H, \hat{v}_{0,0,0} = \sum_x \sum_y \sum_z H/k = v_{0,0,0}/k$, 所以对任意 $k > 0$, 则有

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{p,q,r} &= \frac{\hat{v}_{p,q,r}}{(\hat{v}_{0,0,0})^{(1-p-q-r)}} = \frac{k^{p+q+r-1} v_{p,q,r}}{(v_{0,0,0}/k)^{(1-p-q-r)}} \\ &= \frac{v_{p,q,r}}{(v_{0,0,0})^{(1-p-q-r)}} = \mu_{p,q,r} \end{aligned}$$

上式说明, $\mu_{p,q,r}$ 对于尺度是不变的, 因此, 如式(10)所示的矩不变量是尺度不变的。考虑如下旋转变换:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_i = (\cos\alpha_{i,1}, \cos\alpha_{i,2}, \cos\alpha_{i,3})^T, \mathbf{R} = (\mathbf{n}_1 \ \mathbf{n}_2 \ \mathbf{n}_3)^T \\ (\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z})^T = \mathbf{R} (x \ y \ z)^T \end{cases}$$

式中, (x, y, z) 和 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 分别表示空间坐标系中原坐标和旋转后的坐标, \mathbf{R} 为旋转矩阵, 且 $|\mathbf{R}| = 1, \mathbf{n}_i$ 为两两正交的单位向量。考虑到中心矩 $\mu_{p,q,r}$ 对平移具有不变性, 可设 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$, 于是

$$\hat{v}_{2,0,0} = \sum_{\hat{x}} \sum_{\hat{y}} \sum_{\hat{z}} \hat{x}^2 \hat{H} = \sum_x \sum_y \sum_z (xcos\alpha_{1,1} + ycos\alpha_{1,2} + zcos\alpha_{1,3})^2 H$$

$$\hat{v}_{0,2,0} = \sum_{\hat{x}} \sum_{\hat{y}} \sum_{\hat{z}} \hat{y}^2 \hat{H} = \sum_x \sum_y \sum_z (xcos\alpha_{2,1} + ycos\alpha_{2,2} + zcos\alpha_{2,3})^2 H$$

$$\hat{v}_{0,0,2} = \sum_{\hat{x}} \sum_{\hat{y}} \sum_{\hat{z}} \hat{z}^2 \hat{H} = \sum_x \sum_y \sum_z (xcos\alpha_{3,1} + ycos\alpha_{3,2} + zcos\alpha_{3,3})^2 H$$

若将上述 3 式相加、展开, 并考虑到 $|\mathbf{R}| = 1$, 则可得

$$\hat{v}_{2,0,0} + \hat{v}_{0,2,0} + \hat{v}_{0,0,2} = \sum_x \sum_y \sum_z (x^2 + y^2 + z^2) H$$

曲面被旋转时, 因 $\hat{v}_{0,0,0} = v_{0,0,0}$, 故

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \frac{\hat{v}_{2,0,0} + \hat{v}_{0,2,0} + \hat{v}_{0,0,2}}{\hat{v}_{0,0,0}^{1-p-q-r}} \\ &= \frac{\sum_x \sum_y \sum_z (x^2 + y^2 + z^2) H}{v_{0,0,0}^{1-p-q-r}} = J_1 \end{aligned}$$

用同样的方法也可证明 J_2 和 J_3 的旋转不

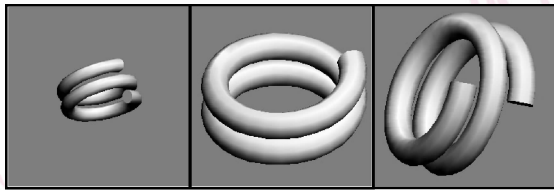
变性。

4 实验结果和复杂度分析

为验证本文方法的不变性和多目标分类效果,进行了以下两组实验。实验环境:CPU 为 PIV2.0GHZ, RAM 为 512M。

实验 1 空间曲率矩不变量的不变性质

实验 1 用于验证空间曲率矩不变量的不变性质。图 2 给出了 3 个目标,实验时首先计算它们的空间曲率矩不变量,计算出来的结果如表 1 所示:



目标1

目标2

目标3

图 2 待计算样本

Fig. 2 Objects for classification

表 1 空间曲率矩不变量

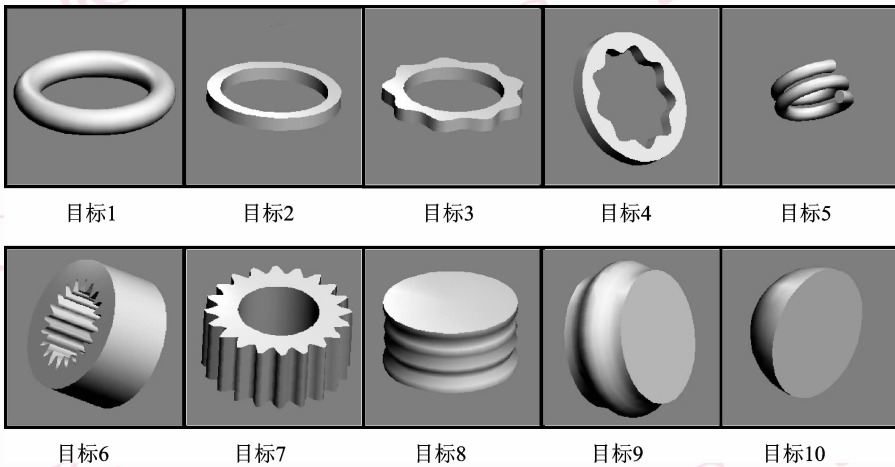
Tab. 1 Spatial curvature moment invariants

	目标 1	目标 2	目标 3	标准差与平均值的比值(%)
$J_1 \times 10^7$	33.25	34.65	34.87	2.56
$J_2 \times 10^{13}$	42.67	44.76	45.01	2.91
$J_3 \times 10^{19}$	10.32	11.15	11.58	5.81

从表 1 可以看出,标准差与平均值的比值都在 10% 之内,由此可以确定,空间曲率矩不变量具有一定的不变性。

实验 2 空间曲率矩不变量的多目标分类效果

实验 2 的目的是利用一些 3 维图像来测试本文算法的分类效果。测试数据库中含有 100 幅 3 维图像,这 100 幅 3 维图像包括图 3 所示的 10 个目标。实验时,对于每一个目标,首先对其实施了任意的平移、旋转和缩放变换,同时记录了 10 张图像并存入数据库。从图 3 中可以看出,在这 10 个目标中,有些目标具有相似之处。为了进行不同算法识别效果



目标1

目标2

目标3

目标4

目标5

目标6

目标7

目标8

目标9

目标10

图 3 数据库中的 10 个目标

Fig. 3 Ten objects in the test database

的对比,实验中也会将一些传统方法应用到分类过程之中。

本实验是对这 100 幅图像进行归类。实验时,对于数据库中的每幅图像,首先计算曲面上各点的平均曲率;然后根据式(10)来计算它们的空间曲率矩不变量;最后,计算每两幅图像之间的距离,如果距离足够小,则认为它们属于同一类。为了保证距离的自适应性,本实验利用一阶 Minkowski 距离来

计算两幅图像之间的相似距离。令 S 、 \hat{S} 为两个空间曲面,则 S 和 \hat{S} 之间的一阶 Minkowski 距离定义如下:

$$\text{dis}(S, \hat{S}) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \frac{|J_i - \hat{J}_i|}{\min(J_i, \hat{J}_i)} \quad (11)$$

本实验中的阈值取 20%,为比较不同算法的效果,本文也利用 3 维傅里叶描述子^[4-5]、3 维 Zernike

矩不变量^[7]和曲率方法^[10]、形状分布方法^[11]对 100 幅图像目标进行了分类。其分类效果和运算时间如表 2 所示。

表 2 分类效果和运算时间

Tab. 2 Classification rates and running time

算法	分类准确率(%)	运算时间(s)
本文算法	92.3	234
3 维傅里叶描述子	87.6	735
3 维 Zernike 矩	93.5	1 163
曲率方法	82.6	698
形状分布方法	84.3	725

从表 2 可以看出,本文算法在耗时最少的情况下,能够取得 92.3% 的识别准确率。虽然 3 维 Zernike 矩的识别效果好于本文算法,识别准确率达到 93.5%,但由于它需要对区域内的每个像素点进行计算,所以在运算时间上大大超过了本文算法。需要指出的是,当数据库的规模增大时,本文算法能取得更好的识别效果。

本文算法是利用空间曲率来表达目标的内部信息的。众所周知,因为曲率对噪声是敏感的,所以接下来将测试本文算法在噪声情况下的识别性能。在此实验中,首先,对数据库中的每幅图像增加高斯噪声($N(0, \sigma)$), σ 从 0 mm 到 2.0 mm 之间变化。几种传统算法分类效果的对比结果如图 4 所示。

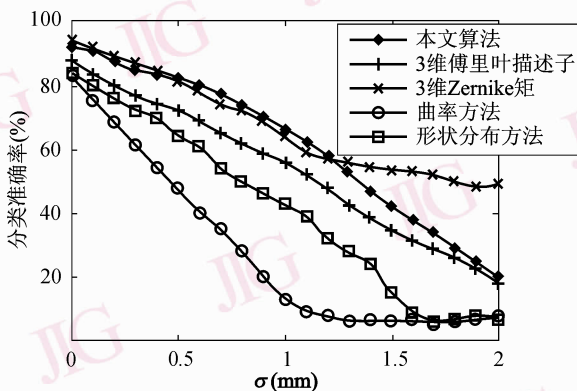


图 4 高斯噪声变化时的识别效果

Fig. 4 Classification rates when Gaussian noise increases

从图中可以看出,本文算法与一些局部描述方法以及 3 维傅里叶描述子相比,在存在噪声的情况下,也能获得较好的分类效果。表 3 给出了本文算法和其他几种算法的运算时间比较。

表 3 5 种方法在噪声情况下的运算时间

Tab. 3 Running time of five methods in presence of noise

单位:s

算 法	运算时间
本文算法	293
3 维傅里叶描述子	934
3 维 Zernike 矩	1 452
曲率方法	920
形状分布方法	1 024

由表 3 可见,本文算法具有较低的运算复杂度。实际上,对于一个边长为 N pixels 的正方体来说,计算每个像素点平均曲率的运算复杂度为 $O(N^2)$,空间曲率矩不变量的运算复杂度为 $O(N^2)$,求各个目标之间的距离的运算复杂度为 $O(1)$ 。由此可见,本文算法的运算复杂度为 $O(N^2)$,而传统的基于区域的矩不变量的运算复杂度为 $O(N^3)$ 。

本实验主要是用于多目标分类的问题,实际上,本文方法还适用于目标识别问题,即只需首先提取样本的空间曲率矩特征,然后将此特征和待识别目标的特征进行匹配,就可以进行目标识别。

5 结 论

本文利用平均曲率来表达曲面的形状特征,并借助矩不变量概念将矩不变量从针对区域坐标的计算转换到针对曲面曲率的计算,首先构造了曲率矩不变量,然后通过归一化设计了一类与平移、尺度和旋转变换无关的不变量。实验表明,本文算法不但针对形状有微小区别的目标比较有效,并且降低了运算复杂度。将来的工作将致力于此方法用于被遮挡目标和部分目标匹配方面的研究。

参考文献 (References)

- 1 Campbell R, Flynn P. A survey of free-form object representation and recognition techniques [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2001, **81**(2): 166-210.
- 2 Huber D, Kapuria A, Donamukkala R, et al. Parts-based 3D object classification [A]. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Washington DC, USA, 2004, **2**: 82-89.
- 3 Zhang D, Lu G. Review of shape representation and description techniques [J]. Pattern Recognition, 2004, **37**(1): 1-19.
- 4 Zhang D, Lu G. Generic Fourier descriptor for shape-based image retrieval [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia and Expo [C], Lausanne, Switzerland, 2002: 425-428.

- 5 Sijbers J, Ceulemans T, Dyck D V. Algorithm for the computation of 3D Fourier descriptors [A] . In: Proceedings of International Conference on Pattern Recognition [C], Quebec City, Canada, 2002, 2: 11-15.
- 6 Sadjadi F, Hall E. Three dimensional moment invariants [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1980, 2(3): 127-136.
- 7 Nowotni M, Klein R. Shape Retrieval using 3D Zernike descriptors [J]. Computer-Aided Design, 2004, 36(11): 1047-1062.
- 8 Aherne F J, Thacker N A, Rockett P I. Optimal pairwise geometric histograms [A]. In: Proceedings of British Machine Vision Conference [C], University of Essex, UK, 1997: 480-490.
- 9 Zhang D, Hebert M. Harmonic maps and their applications in surface matching [A]. In: Proceedings of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition [C], Fort Collins, Colorado, USA, 1999: 2524-2530.
- 10 Vemuri B, Mitiche A, Aggarwal J. Curvature-based representation of objects from range data [J]. Image and Vision Computing, 1986, 4(2): 107-114.
- 11 Osada R, Funkhouser T, Chazelle B, *et al.* Shape distributions [J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, 21(4): 807-832.
- 12 Dubrovin B, Fomenko A, Novikov S. Modern Geometry- methods and Applications (1) (Second Edition) [M]. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1999.
- 13 Lon C H, Don H S. 3D moment forms: Their construction and application to object identification and positioning [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1989, 11(10): 1053-1064.
- 14 Alexander G M. N- Dimensional moment invariants and conceptual mathematical theory of recognition N- dimensional solids [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1998, 20(8): 819-831.
- 15 Sun Long- xiang, Cheng Yi- min, Wang Yi- xiao, *et al.* Analysis of Range Images [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 1996. [孙龙祥, 程义民, 王以孝等编著. 深度图像分析 [M]. 北京: 电子工业出版社, 1996.]
- 16 Besl P J. Surfaces in Range Image Understanding [M]. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1988.
- 17 Besl P J, Ramesh C J. Segmentation through variable- order surface fitting [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1988, 10(2): 167-192.