

# 图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ ) 方法

柳建军 贺国强

(上海大学数学系, 上海 200444)

**摘要** 为了充分利用广义极小化残量方法在处理大规模线性问题时的优势, 将其同正则化技术相结合应用于图像恢复领域, 提出了一种新的图像恢复方法。该方法基于 Arnoldi 过程, 用一系列规模远小于原不适定问题的最小二乘问题来逼近原问题, 并应用截断奇异值分解正则化技术保证稳定求解这些最小二乘问题。其中, 根据图像恢复问题的具体特点, 在确定截断奇异值分解的截断次数时, 对传统的 L-曲线准则进行了少许修改。数值试验结果表明, 试验数据与肉眼观察恢复图像的清晰程度相吻合, 说明新方法是有效的。

**关键词** 图像恢复 正则化 GMRES 改造 L-曲线准则

中图分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2008)12-2297-05

## A Hybrid Regularized GMRES( $m$ ) Method for Image Restoration

LIU Jian-jun, HE Guo-qiang

(College of Science of Shanghai University, Shanghai 200444)

**Abstract** Based on Generalized Minimal RESidual (GMRES) method and regularization technique, a new image restoration method is presented. The method is based on the Arnoldi process, which yields a sequence of smaller least squares problems to approximate the original ill-posed problem. Truncated Singular Value Decomposition (TSVD) regularization is used to solve these least squares problems stably. According the characters of image restoration, L-curve criterion is modified while selecting iteration in TSVD method. Numerical results illustrate good restoration effect.

**Keywords** image restoration, regularization, GMRES, modified L-curve criterion

## 1 引言

人们对于图像恢复领域的研究开始于 20 世纪 50 ~ 60 年代对模糊卫星图片的处理<sup>[1]</sup>。如今, 这项技术已经趋于成熟, 并且已广泛应用于射电天文学、工业视觉、医学成像等领域。作为数字图像处理的基本问题之一, 图像恢复的目的在于消除或减轻图像获取及传输过程中造成的图像品质下降现象, 以恢复图像的本来面目。当图像品质下降过程是线性和空不变时, 图像恢复可用下面的数学模型来描述<sup>[2]</sup>:

$$\mathbf{g} = \mathbf{H}\mathbf{f} + \mathbf{n} \quad (1)$$

式中,  $\mathbf{g}$ 、 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{n}$  分别对应模糊图像、原图像和噪声按行堆叠而成的列向量,  $\mathbf{H}$  是模糊算子矩阵, 它具有分块循环的形式。

图像恢复问题有以下两个特点: 一是规模大, 式 (1) 模型是大型稀疏非对称线性方程组, 对于普通  $256 \times 256$  pixels 大小的灰度图来说, 该方程组已经是上万阶; 二是作为一类典型的反问题, 由于求解过程具有不适定性<sup>[3]</sup>, 因此解的准确性对噪声非常敏感。常用的图像恢复方法包括迭代法、统计法和正则化方法等。广义极小化残量 (generalized minimal residual, GMRES) 方法作为求解大型稀疏非对称线性方程组的常用方法, 自然可以应用于图像的恢复, 但是必须进行正则化处理。

本文针对大型稀疏线性方程组(式(1)),综合考虑计算过程所需的存储量和计算时间,应用混合重新开始 GMRES 方法<sup>[4]</sup>(GMRES( $m$ )),并结合截断奇异值分解(truncated singular value decomposition, TSVD)正则化技术<sup>[5]</sup>来恢复原图像。在噪声水平未知的情况下,先利用改进的 L-曲线<sup>[6]</sup>准则决定截断次数,同时提出图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ )方法,最后的数值试验表明,本方法切实有效。

## 2 GMRES 和 GMRES( $m$ ) 方法

### 2.1 Arnoldi 过程

Saad 和 Schultz 在文献[7]中最先提出的 GMRES 方法是以 Galerkin 原理<sup>[4]</sup>为基础,其基本思想是先通过 Arnoldi 过程求出 Krylov 子空间,即先求出

$$K_m(\mathbf{H}, \mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{H}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{H}^{m-1}\mathbf{r}_0\}$$

的标准正交基,同时将线性方程组(式(1))投影到  $m$  维 Krylov 子空间  $K_m(\mathbf{H}, \mathbf{r}_0)$  上,然后经过迭代使残余向量极小化,进而求得原方程组的解,故名为广义极小化残量方法。同 Gauss 消去法相比,GMRES 方法所需计算时间由  $O(N^3)$  减少至  $O(N^2)$ ,但所需存储量相同,皆为  $O(N^2)$ ,这里  $N$  为方程组的阶数。为了导出 GMRES 方法,下面先给出 Arnoldi 过程,它实际上就是 Gram-Schmidt 正交化方法。

#### 算法 1 Arnoldi 过程

算法步骤如下:

(1) 取初始向量  $\mathbf{f}_0$ , 计算残量  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_0$

令  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|$ ;

(2) 对  $j = 1, \dots, m$ , 执行

①  $\mathbf{t} = \mathbf{H}\mathbf{v}_j$ ;

② 对  $i = 1, \dots, j$ , 执行

$$h_{i,j} = (\mathbf{t}, \mathbf{v}_i), \mathbf{t} = \mathbf{t} - h_{i,j}\mathbf{v}_i;$$

③  $h_{j+1,j} = \|\mathbf{t}\|$ ;

④  $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{t}/h_{j+1,j}$ ;

只要  $h_{j+1,j} \neq 0$ , 则 Arnoldi 过程总能进行。记

$$\mathbf{V}_{m+1} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}]$$

**定理 1** 对于  $m < n$ , Arnoldi 过程产生的向量序列  $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1}^m$  是  $\text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{H}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{H}^{m-1}\mathbf{r}_0\}$  的一组标准正交基,而且

$$\mathbf{v}_{m+1} \perp \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{H}\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{H}^{m-1}\mathbf{r}_0\}$$

由此即可知,  $\mathbf{V}_{m+1}$  的第  $m+1$  个列向量  $\mathbf{v}_{m+1}$  确实构成 Krylov 子空间  $K_{m+1}(\mathbf{H}, \mathbf{r}_0)$  的标准正交基,如果表示为矩阵形式,则它应该满足下面的关系式:

$$\mathbf{H}\mathbf{V}_m = \mathbf{V}_{m+1}\hat{\mathbf{H}}_m \quad (2)$$

式中,  $\hat{\mathbf{H}}_m = [h_{i,j}] \in \mathbf{R}^{(m+1) \times m}$  是上 Hessenberg 矩阵,其具有如下形式:

$$\hat{\mathbf{H}}_m = \begin{bmatrix} h_{1,1} & h_{1,2} & \cdots & & h_{1,m} \\ h_{2,1} & h_{2,2} & \cdots & & h_{2,m} \\ 0 & h_{3,2} & & & h_{3,m} \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & h_{m,m} \\ 0 & \cdots & & 0 & h_{m+1,m} \end{bmatrix}$$

### 2.2 重新开始 GMRES 方法

当投影的 Krylov 子空间维数  $m$ , 即 GMRES 方法的迭代次数不断增加时,近似解越来越接近原问题的解。但是,其所需的计算量和存储量也随之增加,当  $m$  很大时,这些代价将无法接受。为了克服这一缺点,实际计算时常采用重新开始策略,即预先设定一个迭代次数增加的上限,如果已经达到迭代上限,而近似解精度还未达到要求,则以近似解作为新的迭代初值,让迭代次数从 1 开始,重新开始进行 GMRES 方法。

GMRES( $m$ ) 方法可通过求解式(1)的近似解  $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}$ , 使得其残差极小,即

$$\|\mathbf{r}_m\| = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_m\| = \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m} \|\mathbf{g} - \mathbf{H}(\mathbf{f}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y})\|$$

由式(2)及  $\mathbf{V}_{m+1}$  的正交性可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_m\| &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m} \|(\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_0) - \mathbf{H}\mathbf{V}_m\mathbf{y}\| \\ &= \min_{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m} \|\mathbf{r}_0\| \|\mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{H}}_m\mathbf{y}\| \end{aligned} \quad (3)$$

式中,  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^m$ 。显然,只要解出满足式(3)的  $\mathbf{y}$ , 就能够最终得到式(1)的近似解  $\mathbf{f}_m$ 。

#### 算法 2 GMRES( $m$ ) 算法

算法步骤如下:

(1) 选择  $\mathbf{f}_0 \in \mathbf{R}^n$ , 计算残余向量  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_0$

令  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_0 / \|\mathbf{r}_0\|$ ;

(2) 选择适当大小的  $m$ , 通过  $m$  步 Arnoldi 过程得到  $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{m+1}$  和  $\mathbf{H}_m$ ;

(3) 通过极小化式(3)得到  $\mathbf{y}$ ;

(4)  $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_0 + \mathbf{V}_m\mathbf{y}$ ;

(5) 计算  $\|\mathbf{r}_m\| = \|\mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_m\|$ , 如果满足精度, 则停止, 否则转下一步。

(6)  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_m, \mathbf{v}_1 = \mathbf{r}_m / \|\mathbf{r}_m\|$ , 转向步骤(2);

显然,在 GMRES( $m$ ) 算法中,如何选择迭代次数  $m$  以及如何极小化式(3)是计算中两个最为关键的问题,下面紧紧围绕这两点展开本文方法的讨论。

### 3 图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ ) 方法

#### 3.1 选择合适的迭代次数 $m$

选择合适的迭代次数  $m$ , 不仅关系到方法的收敛性, 而且直接影响到算法所需的存储量和计算时间。大家知道, GMRES( $m$ ) 方法仅当迭代次数  $m$  足够大时, 收敛性才能一定得到保证, 但是随着迭代次数  $m$  的不断增大, 存储量也会相应增加。上面已经指出在实际计算时, 常采用重新开始策略, 由于迭代次数  $m$  每增加一步, 都要重新进行 Arnoldi 过程, 因此将耗费大量的计算时间。这对于实时性要求较高的图像恢复问题来说显然是无法接受的, 所以必须寻找一条快捷更新  $m$  的途径。

对于固定的迭代次数  $m$ , 存在次数不超过  $m$  的多项式  $p_m(\lambda)$  满足  $\mathbf{r}_m = p_m(\hat{\mathbf{H}}_m)\mathbf{r}_0$  [4], 即

$$\frac{\|\mathbf{r}_m\|}{\|\mathbf{r}_0\|} = \frac{\|p_m(\hat{\mathbf{H}}_m)\mathbf{r}_0\|}{\|\mathbf{r}_0\|} = \tau < 1$$

因此, 在后续计算中不再重新进行 Arnoldi 过程, 而是用这个多项式参加迭代。显然,  $n$  次多项式迭代后残余项范数不超过  $\tau^n \|\mathbf{r}_m\|$ 。这样得到的混合 GMRES( $m$ ) 算法就由以下两个阶段组成, 第 1 个阶段是 GMRES( $m$ ) 算法, 第 2 个阶段是多项式迭代, 合理的情况要求如下:

GMRES( $m$ ) 的工作量等于后期多项式迭代的工作量, 比较两个阶段的工作量即可得  $m$  满足 [4]

$$m + 3 + \delta = (1 + \delta)(\log \varepsilon / \log \tau - 1) \quad (4)$$

式中,  $\delta$  是模糊矩阵  $\mathbf{H}$  的每行非零元素的平均值,  $\varepsilon$  是求解要求的精度, 这个  $m$  就是条件要求下的一种很快的更新次数。因此本文的方法是, 首先设置迭代次数  $m$  的上限  $m_{\max}$ , 然后取定  $\mathbf{f}_0$  和一个较小的  $m_0$  开始运算 GMRES( $m$ ) 算法, 如果得到的近似解不满足要求的精度, 则按照式 (4) 更新  $m$ , 如果  $m$  达到上限还不能保证近似解满足要求的精度, 则以近似解为初值  $\mathbf{f}_0$ , 并从  $m_0$  开始重新运行 GMRES( $m$ ) 算法。

#### 3.2 应用正则化方法极小化 $\|\|\mathbf{r}_0\| \mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|$

通过 Arnoldi 过程, 模糊矩阵  $\mathbf{H}$  的病态性质就转移到矩阵  $\hat{\mathbf{H}}_m$  上, 由于此时极小化  $\|\|\mathbf{r}_0\| \mathbf{e}_1 - \hat{\mathbf{H}}_m \mathbf{y}\|$  仍然是一个不定问题, 所以必须进行正则化处理。此时的情况是,  $\hat{\mathbf{H}}_m$  的规模较之模糊矩阵  $\mathbf{H}$  小了许多, 因此可应用 TSVD 正则化方法求解式 (3), 这样就具有较快的收敛速率 [8]。假设 Arnoldi 过程总能

进行下去, 则矩阵  $\hat{\mathbf{H}}_m \in \mathbf{R}^{(m+1) \times m}$  列满秩, 并有如下奇异值分解:

$$\hat{\mathbf{H}}_m = \mathbf{P} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{Q}^T \quad (5)$$

式中,  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_{m+1}]$ ,  $\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_m]$  分别是  $m+1$  和  $m$  阶正交矩阵,  $\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_m)$ ,  $\omega_i (1 \leq i \leq m)$  是  $\hat{\mathbf{H}}_m$  的第  $i$  个奇异值。对于截断次数  $k$ , 式 (3) 的第  $k (1 \leq k \leq M)$  个截断解可表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_k &= \|\mathbf{r}_0\| \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Omega}_k^+ \mathbf{0}) \mathbf{P}^T \mathbf{e}_1 \\ &= \|\mathbf{r}_0\| \sum_{i=0}^k \frac{p_{1,i}}{\omega_i} \mathbf{q}_i \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $p_{1,i} (1 \leq i \leq k)$  表示矩阵  $\mathbf{P}$  的第 1 行的第  $i$  个元素。利用截断解  $\mathbf{y}_k$  即可得线性方程组 (式 (1)) 的近似解  $\mathbf{f}_m = \mathbf{f}_0 + \mathbf{V}_m \mathbf{y}_k$ , 由此可见, 图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ ) 算法如下:

#### 算法 3 正则化混合 GMRES( $m$ ) 算法

算法步骤如下:

- (1) 给定要求精度  $\varepsilon$ , 设定  $m$  的上限  $m_{\max}$ ;
- (2) 取初始迭代向量  $\mathbf{f}_0$ , 计算  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_0$ ;
- (3) 取较小的初始迭代次数  $m_0$ , 通过 Arnoldi 过程来得到  $\{\mathbf{v}_j\}_{j=1}^{m_0}$  和  $\hat{\mathbf{H}}_{m_0}$ ;
- (4) 进行  $\hat{\mathbf{H}}_{m_0}$  的奇异值分解;
- (5) 利用 L-曲线方法确定截断次数  $k$ ;
- (6) 由式 (6) 求解得  $\mathbf{y}_k$ ;
- (7) 计算近似解  $\mathbf{f}_{m_0,k} = \mathbf{f}_0 + \mathbf{V}_{m_0} \mathbf{y}_k$ ;
- (8) 计算  $\mathbf{r}_{m_0,k} = \mathbf{g} - \mathbf{H}\mathbf{f}_{m_0,k}$ , 如果  $\|\mathbf{r}_{m_0,k}\| \leq \varepsilon$ , 则将  $\mathbf{f}_{m_0,k}$  作为式 (1) 的解, 停止; 否则
- (9) 根据  $\mathbf{r}_{m_0,k}$ ,  $\mathbf{f}_{m_0,k}$ , 通过增加一些工作量算出  $p_m(\lambda)$  系数, 再根据式 (4) 更新  $m$ , 若  $m \leq m_{\max}$ , 且  $m_0 = m$ , 则转步骤 (3), 否则  $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}_{m_0,k}$ , 转步骤 (2); 这里迭代次数  $m$  和截断次数  $k$  都起着正则参数的作用, 剩下的工作是如何确定截断次数  $k$ 。

#### 3.3 改造传统 L-曲线准则确定截断次数 $k$

噪声水平未知情况下, L-曲线准则是普遍采用的确定正则参数的方法。尽管人们在 20 世纪 70 年代就采用 L-曲线来分析许多数值计算问题, 但真正将这一方法作为正则参数的选取方法, 应归功于 Hansen。Hansen 1992 年指出, 所谓 L-曲线是指以  $(\lg \rho(k), \lg \eta(k))$  为点坐标, 在直角坐标系中所构成的曲线图 [9]。由于这一曲线的形状非常像字母 “L”, 故命名为 L-曲线法。根据正则化理论,  $\eta(k) = \|\mathbf{f}_k\|$  为正则化解的范数, 单调不减;

$\rho(k) = \|g - Hf_k\|$  为正则化解的残量范数, 单调不增。然而, 混合 GMRES( $m$ ) 算法产生的残差序列  $\{r_{m_0,k}\}$  和正则化解序列  $\{f_{m_0,k}\}$  只满足

$$\|r_{m_0,1}\| \geq \|r_{m_0,2}\| \geq \|r_{m_0,3}\| \geq \dots$$

而不满足

$$\|f_{m_0,1}\| \leq \|f_{m_0,2}\| \leq \|f_{m_0,3}\| \leq \dots$$

所以由点列  $\{s_k\} = \{\lg \|f_{m_0,k}\|, \lg \|r_{m_0,k}\|\}$  线性插值而得到的图形一般不具备“L”形状。若令

$$H_j = V_{j+1} \hat{H}_j (V_j)^T \quad j \geq 1$$

$$\text{则 } c_j = \|H_j\| \|H_j^*\|$$

文献[10]命题 2.1 保证定义的  $c_j$  满足

$$c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots$$

如果用条件数序列  $\{c_j\}$  代替正则化解的范数序列  $\{\|f_{m_0,k}\|\}$ , 则由新变量构成的点列  $\{\hat{s}_j\} = \{\lg c_j, \lg \|r_{m_0,j}\|\}$  线性插值而得到的图形就具备“L”形状, 通过确定其角点就可以得到所需 TSVD 方法的截断次数  $k$ 。

### 4 数值试验

为了验证算法中用  $\{c_j\}$  代替  $\{\|f_{m_0,k}\|\}$  后, 新点列  $\{\hat{s}_j\}$  是否形成“L”形状, 以及本文算法的恢复效果, 本文进行了下面的数值试验, 即先对原始图像施以  $5 \times 5$  的均匀模糊, 并加上不同信噪比 (SNR)<sup>[11]</sup> 的白噪声, 然后应用本文算法对得到的降质图像 (包括模糊和噪声) 进行图像恢复。

图 1 表明, 新点列  $\{\hat{s}_j\}$  确实形成了“L”曲线形状, 而且能够比较明显地看出曲线角点所在位置。

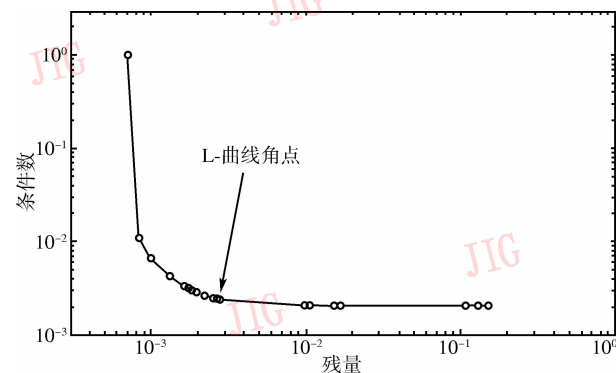


图 1 新点列形成的 L-曲线

Fig. 1 L-curve of new serial points

图 2(a) ~ 图 2(f) 依次为降质图像 (SNR 值为 30dB), 以及经过取截断次数  $k = 5, 10, 16, 19, 22$  来进行 TSVD 迭代后得到的恢复图像。直观上看, 截断次数  $k = 5, 10, 16$  时, 没有取得好的恢复效果。而在恢复效果较好的后两幅图中, 又以截断次数  $k = 19$  时的恢复图像较为清晰。



图 2 降质图像和恢复图像

Fig. 2 Blurred image and restoration images

表 1 不同截断次数下 ISNR 值的比较

Tab. 1 Comparison of different ISNR in different  $k$

	$k = 5$	$k = 10$	$k = 16$	$k = 19$	$k = 22$
ISNR (dB)	-1.250 6	0.596 4	0.759	1.405 6	0.907

表 1 给出了当 SNR 值为 30dB 时, 数值试验的部分恢复数据, 这里仅以通用的衡量标准——改进信噪比 (ISNR)<sup>[11]</sup> 作为参照量。表 1 数据显示, 截断次数  $k = 19$  时, ISNR 值最大, 此时图像的恢复效果最好, 且肉眼观察的直观判断和恢复数据结果吻合, 这表明本文算法是有效的。

## 5 结 论

由于应用 GMRES 方法计算右端项含有误差的线性不适定问题(1),具有计算量小、易于程序实现等优点,所以本文把此类方法用于图像恢复这类典型的不适定问题的求解是完全可行的。在求解中,关键问题是迭代终止准则的确定,即 TSVD 截断次数  $k$  的选取。考虑到噪声水平未知以及 GMRES 方法自身特点等因素<sup>[12]</sup>,给出了由残差序列  $\{r_{m_0,j}\}$  和条件数序列  $\{c_j\}$  组成的改进 L-曲线准则,用来确定截断次数  $k$ ,并且加快了迭代次数  $m$  的更新速度,进而提出了用于图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ ) 算法。

数值试验中,新序列  $\{\hat{s}_j\}$  确实形成“L”形状,这表明结合具体问题、具体条件得到的改进的 L-曲线准则是成功的;同时表明,图像恢复的正则化混合 GMRES( $m$ ) 算法切实可行,具有较好的恢复效果。当然,对于其他具体问题,GMRES 方法也可以和不同的正则化方法相结合形成新的正则化 GMRES 方法,用来解决不同的问题,而且,确定截断次数的准则也可以不同,例如:当噪声水平已知时,就可以应用残差准则。

### 参考文献 (References)

- 1 Katsaggelos A K. Digital Image Restoration [M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1991.
- 2 Huo Hong-tao. Digital Image Processing [M]. Beijing: Beijing Institute of Technology Press, 2003. [霍宏涛. 数字图像处理

- [M]. 北京:北京理工大学出版社,2002.]
- 3 Tikhonov A N, Arsenin V Y. Solution of Ill-Posed Problems [M]. New York: John Wiley and Sons, 1977.
- 4 Cai Da-yong, Bai Feng-shan. Advanced Numerical Analysis [M]. Beijing: Tsinghua University Press, 1997. [蔡大用,白峰杉. 高等数值分析 [M]. 北京:清华大学出版社,1997.]
- 5 Hansen P C. The truncated SVD as a method for regularization [J]. BIT. Numerical Mathematics, 1987, 27(4): 534 ~ 553.
- 6 Engl H W, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems [M]. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996.
- 7 Saad Y, Schultz M. GMRES: a generalized minimal residual method for solving nonsymmetric linear systems [J]. Society of Industrial and Applied Mathematics Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7(3): 856 ~ 869.
- 8 He Guo-qiang. A TSVD form for ill-posed equations leading to optimal convergence rates [A]. In: International Congress of Mathematicians. Abstracts of Short Communication and Poster Sessions [C], Beijing, China, 2002: 328.
- 9 Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve [J]. SIAM Review, 1992, 32(4): 561 ~ 580.
- 10 Calvetti D, Lewis B, Reichel L. GMRES, L-curve, and discrete ill-posed problems [J]. BIT. Numerical Mathematics, 2002, 42(1): 44 ~ 65.
- 11 Liu Jian-jun. An improved regularization algorithm of two parameters for image restoration [A]. In: The Characteristics of the Twelfth National Conference on Image and Graphics [C], Beijing: Tsinghua University Press, 2005: 632 ~ 636. [柳建军. 一种改进的双参数图像恢复正则化算法 [A]. 见:第十二届全国图象图形学学术会议论文集 [C], 北京:清华大学出版社,2005: 632 ~ 636.]
- 12 Zhong Bao-jiang. A flexible hybrid GMRES algorithm [J]. Numerical Mathematics A Journal of Chinese Universities, 2001, 23(3): 261 ~ 272. [钟宝江. 一种灵活的混合 GMRES 算法 [J]. 高等学校计算数学学报, 2001, 23(3): 261 ~ 272.]