

保相似的网格参数化

张磊^{1),2)} 刘利刚^{1),2)} 王国瑾^{1),2)}

¹⁾ (浙江大学数学系, 杭州 310027)

²⁾ (浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

摘要 网格参数化是数字几何处理中的重要问题,而三角网格又是典型的一种网格表示形式。为能够快速求解三角网格的平面参数化,同时减少参数化带来的三角形的扭曲,提出了一种保持形状相似的三角网格平面参数化方法—保相似参数化,该方法使得参数化后的网格的相邻两边夹角和长度比例在最小二乘意义下整体上保持不变,从而建立对应三角形的相似性。通过三角形的相邻两条边的夹角和两边的比例值建立线性方程组,在给定初始条件后可以快速地求解该线性方程组,从而得到参数化后的平面网格。该方法也适用于添加任何线性约束条件,而且整个算法是线性的。与现有的一些方法相比,该算法几何意义直观,操作简便。实例表明,该方法可以得到较好的参数化结果,非常适合于纹理映射等计算机图形学的应用。

关键词 数字几何处理 网格参数化 保相似 纹理映射

中图法分类号: TP391 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8916(2008)12-2383-05

As-Similar-As-Possible Planar Parameterization

ZHANG Lei^{1),2)}, LIU Li-gang^{1),2)}, WANG Guo-jin^{1),2)}

¹⁾ (Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

²⁾ (State Key Laboratory of CAD&CG, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Mesh surface parameterization is an important problem in Digital Geometry Processing, and triangular mesh is the typical form for mesh representation. To solve the problem of planar parameterization for triangular mesh fast, and minimize the distortion of triangles generated in the parameterization simultaneously, a simple as-similar-as-possible planar parameterization method for triangular mesh is presented in this paper. The angles and length ratios between two adjacent edges are globally preserved in a least squares sense after the parameterization, by which the similarity of the corresponding triangles can be satisfied. A linear system is constructed according to the corresponding angle and length ratio of two adjacent edges on the triangular mesh, and the planar parameterization result can be fast obtained by solving the sparse linear system with some initial conditions. Linear constraints can be combined into the linear system in our approach, and the algorithm is of linear complexity. This method has a direct geometric interpretation and can be implemented more easily than other methods. Experimental examples show that good planar parameterization results can be derived from this method, which is a very efficient tool for the applications in Computer Graphics, such as texture mapping.

Keywords digital geometry processing, mesh parameterization, as-similar-as-possible, texture mapping

基金项目: 国家自然科学基金项目(60776799, 60503067); 浙江省自然科学基金项目(Y105159); 国家973计划项目(2002CB312101)

收稿日期: 2006-10-17; **改回日期:** 2007-07-10

第一作者简介: 张磊(1981~), 男, 浙江大学应用数学专业博士研究生。主要研究方向为计算机辅助几何设计, 计算机图形学和数字几何处理。E-mail: zhanglei_zju@sohu.com

1 引言

网格参数化在计算机辅助设计和计算机图形学中有很多方面的应用,比如点云的拟合、自由曲面的重新参数化、CAD 模型的修复,以及网格的重构、纹理映射等^[1,2]。随着 3 维激光测距技术的发展,三角网格逐渐成为网格曲面的主要表示形式,因此,关于三角网格的参数化研究成为当前的一个热点。

关于网格参数化,自 20 世纪 90 年代后期以来已经有了很多工作。Floater 等人给出了关于网格参数化的综述^[1],按照参数化映射保持的几何性质不同对它们进行了总结。对于三角网格的平面参数化,Floater 将网格顶点用与它相连接的顶点的凸组合来表示,通过求解线性方程组得到平面参数化^[3],但是他的方法要求边界必须是凸多边形,因此,限制了这种参数化方法的实际应用。Sheffer 等则利用求解角度空间的一个最优化问题先得到平面参数化后的角度分布,再从一条给定的初始边出发逐步生成参数化后的平面网格^[4,5],但这里的优化问题是一个非线性的,求解速度很慢。Lévy 等人采用三角片上的线性函数去逼近该三角片上的 Cauchy-Riemann 方程^[6],通过建立二次逼近误差函数求得在最小二乘意义下的整体的线性拟共形映射,该方法也是一种保形的参数化方法。Yoshizawa 等人提出用一种迭代的参数化方法来使得扭曲度量逐渐变小^[7],每一次迭代采用的参数化方法是 Floater 的平面参数化方法^[3],但凸组合的权因子则根据所定义的扭曲度量进行修正,其本质是改变局部二次能量函数的权重的分布。Karni 等^[8]为了得到有效的平面参数化结果,提出了用 Floater 的均值坐标反复迭代和添加虚拟边界的方法^[9]来产生有效的平面参数网格,该方法适合于在参数化过程中添加约束条件,但参数化需要迭代的过程。

本文直接从网格的三角形表示的边角关系出发,利用保持三角形相似所需的相邻边长的比值及其夹角相等这一内在性质,通过在平面上重构对应的相邻的边的长度比值和夹角来建立全局的线性方程组,求解该线性方程组即可得到参数化后的平面网格。相比于以前的方法,本文提出的

方法更加直观,几何意义更加明显。另外,通过添加适当的线性约束条件,本文的方法能进行带约束的参数化,得到的参数化结果非常适合纹理映射等应用。另外,整个算法是线性的,计算简单快速。

2 保相似的参数化方法

2.1 保相似参数化方程

考虑空间定向三角网格 G 的某顶点 v_i 处的一个夹角,不妨假设位于三角形 $\Delta v_i v_j v_k$ 中(如图 1(a)所示),记 $\theta_{jik} \in (-\pi, \pi]$ 为顶点 v_i 的两条边 $v_i v_j$ 和 $v_i v_k$ 关于 v_i 法向 n_i 的有向转角(夹角方向与法向构成右手系为正,左手系为负),且记两边的边长比为 $r_{jik} = \frac{\|v_i v_k\|}{\|v_i v_j\|}$ 。易知,三角网格 G 的每一个顶点处的夹角所定义的 (θ_{jik}, r_{jik}) 是与平移、旋转和缩放无关的几何量,决定了 G 的几何内在性质。

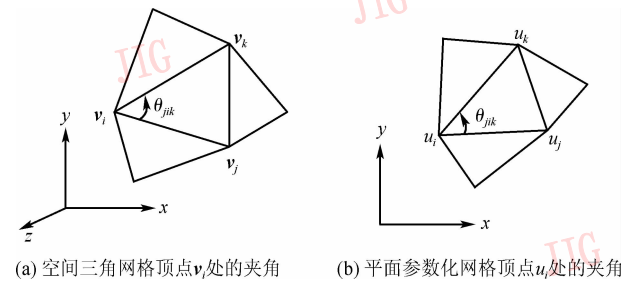


图 1 空间三角形和平面三角形对应的夹角

Fig. 1. The corresponding angle of the spatial triangle and planar triangle

参数化方法的目的是使得参数化平面网格的上述几何量与原三角网格的对应几何内在量尽量保持不变,即网格上的每个三角面片映射到平面上后得到的相应三角形具有相同的夹角和相邻边长度的比值,从而保持了对应三角形的相似性。具体地,如果网格上的三角面片 $\Delta v_i v_j v_k$ (如图 1(a)所示)对应于参数化后平面上的三角形 $\Delta u_i u_j u_k$ (如图 1(b)所示),则有:

$$u_k - u_i = r_{jik} \mathbf{R}(\theta_{jik})(u_j - u_i)$$

式中, $\mathbf{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ 是平面上旋转 θ 角的旋转矩阵。记顶点坐标为 $u_i = (x_i, y_i)^T$,则方程(1)可以展开写成:

$$\begin{pmatrix} r_{jik} \cos\theta_{jik} - 1 & -r_{jik} \sin\theta_{jik} & -r_{jik} \cos\theta_{jik} & r_{jik} \sin\theta_{jik} & 1 & 0 \\ r_{jik} \sin\theta_{jik} & r_{jik} \cos\theta_{jik} - 1 & -r_{jik} \sin\theta_{jik} & -r_{jik} \cos\theta_{jik} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ x_j \\ y_j \\ x_k \\ y_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

将式(2)按三角网格中的每一个夹角依次联立可得如下的线性方程组:

$$\mathbf{AZ} = \mathbf{O} \tag{3}$$

其中,

$\mathbf{Z} = (x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ \dots \ x_{n-1} \ y_{n-1} \ x_n \ y_n)^T$ 为平面参数化网格顶点的坐标向量,系数矩阵 \mathbf{A} 为一个阶为 $2m \times 2n$ 的稀疏矩阵, m 为顶点度数的总和, n 为网格顶点个数。

2.2 最小二乘法求解

因为系数矩阵 \mathbf{A} 非方阵,只能在最小二乘意义下求解方程组(3)的解。由于相邻两边的夹角和它们长度的比值是关于旋转和伸缩变换的不变量,因此,在实际求解中,需要给定初始条件,如指定平面参数化网格的一条边的两个顶点坐标,不妨设为 $u_0 = (x_0^*, y_0^*)^T$, $u_1 = (x_1^*, y_1^*)^T$ 。

可以将顶点 u_0, u_1 的坐标作为已知量将方程组(3)的未知量个数减少。但经过试验和观察发现,顶点 u_0, u_1 作为软约束条件加到方程组(3)中,然后利用最小二乘法求解能得到更好的解,即将 2 个顶点坐标的 4 个约束条件

$$x_i = x_i^*, y_i = y_i^*, i = 0, 1$$

加入到线性方程组(3)中,得到

$$\bar{\mathbf{A}}\mathbf{Z} = \mathbf{b} \tag{4}$$

式中, $\bar{\mathbf{A}}$ 为 $(2m + 4) \times 2n$ 的稀疏矩阵, \mathbf{b} 为 $(2m + 4) \times 1$ 阶列向量。

对方程组(4)求最小二乘解可得到 $\mathbf{Z} = (\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}})^{-1} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{b}$ 。因为 $\bar{\mathbf{A}}$ 是稀疏矩阵,所以方程组的系数矩阵 $\bar{\mathbf{A}}^T \bar{\mathbf{A}}$ 也是稀疏矩阵,该稀疏方程组可以采用 TAUCS 库^[10]快速求解。

2.3 其他线性约束条件

由 2.2 节可知,要在参数化过程中增加线性约束条件,只需要在矩阵 $\bar{\mathbf{A}}$ 中增加相应的行即可,例如还可以增加其他顶点的坐标约束,即将约束顶点的坐标作为软约束条件加到方程组(4)中,然后利

用最小二乘法可求解得到解。

还可以增加一些其他线性约束条件,如共线约束,来改善平面参数化的效果。比如希望参数化后顶点 $u_0 = (x_0, y_0)^T$ 位于直线 $ax + by + c = 0$ 上,只要将方程

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \tag{5}$$

加入到线性方程组(4)中即可。

3 实 例

与其他一些平面参数化方法进行比较,作为一种线性参数化方法,与 Floater^[3]提出的保形参数化的方法相比,本文的方法使得参数化后的三角形扭曲较小,而且边界是自由的(如图 2 所示),从纹理映射的效果看,本文方法的结果(如图 2(e)所示)也远优于 Floater^[3]方法的结果(如图 2(d)所示),

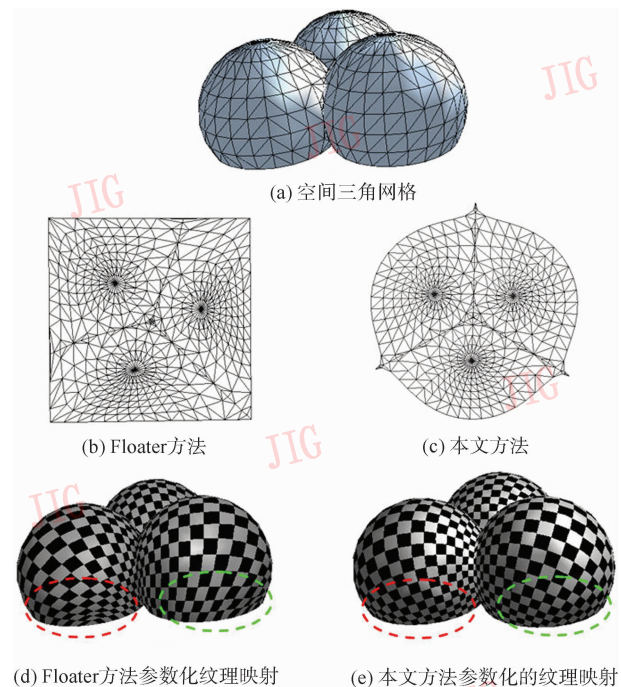


图 2 本文的方法和 Floater 方法的比较
Fig. 2 The comparison between our approach and Floater's method

从对应的红色和绿色虚线框部分可以看出,本文的方法生成更为均匀的纹理映射效果。

Sheffer 等人提出了基于角度的平面参数化方法 ABF (angle based flattening)^[4,5], 他们的方法是从保持参数化的各三角形的角度出发, 优化方法是非线性的, 并且需要多次非线性迭代求解得到参数化的结果, 速度很慢。从图 3 可以看出, 与 Sheffer^[4] 等的 ABF 参数化方法相比, 本文的方法能得到同样质量的参数化结果, 但是 ABF 方法需要 158s^[4], 而本文的方法只要 0.734s。

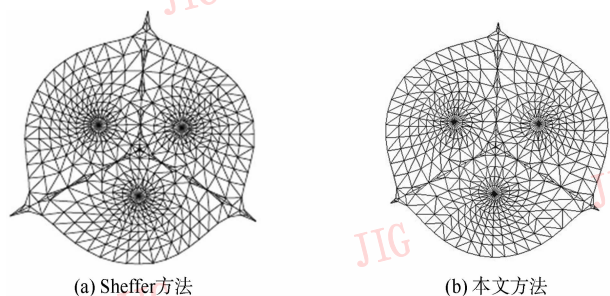


图 3 本文方法与 Sheffer 方法比较

Fig. 3 The comparison between our approach and sheffer's method

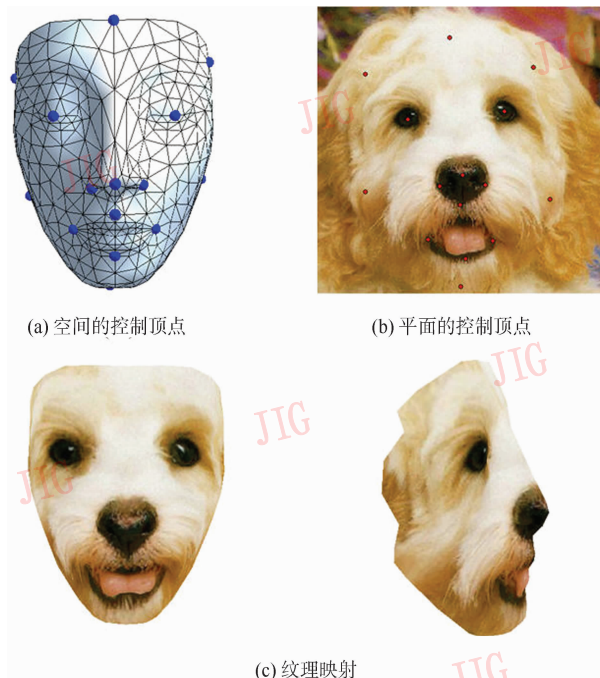


图 4 带点约束的参数化及纹理映射

Fig. 4 Parameterization with point constraints and its texture mapping

在纹理映射中, 为了增加图形的真实感, 往往要求纹理图像映射到网格上的指定区域, 即要求

纹理和网格的特征相匹配。利用保相似参数化方法, 可以添加适当数量的约束点 (在纹理图像上指定对应点作为网格顶点的参数化后的平面上的点) 来得到理想的平面参数化结果, 这样可以使得纹理映射的特征匹配, 在图 4 中纹理图像 (b) 的眼睛、鼻子等特征都很好地映射到网格上的对应区域。

图 5 中, 给出了一个加以顶点共线约束的例子, 图 5 (a) 中红线上的顶点都约束限制在图 5 (b) 的绿线上, 得到的纹理映射的效果为图 5 (c) 所示。

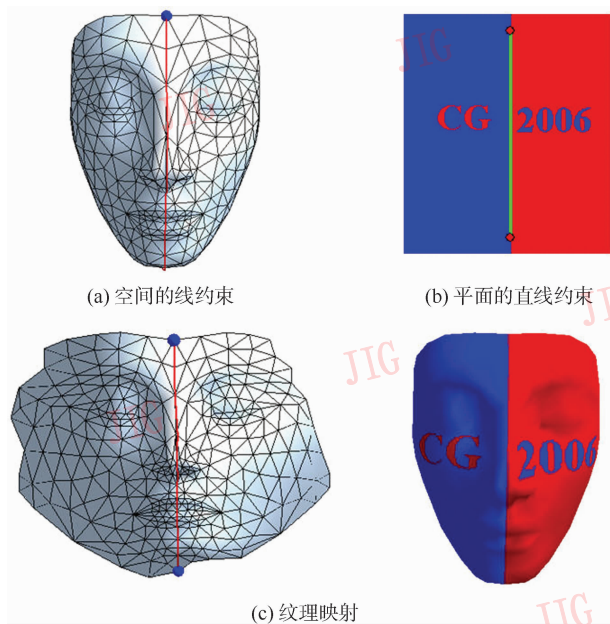


图 5 带直线约束的参数化及纹理映射

Fig. 5 Parameterization with line constraints and its texture mapping

4 结 论

基于平面参数化中保持角度和边长比例不变这一要求, 给出了一个简单的保相似的平面参数化方法。利用三角形相似所要求的内在的边角关系建立一个线性方程组, 将参数化映射问题转化为求解线性方程组的最小二乘解。该方法几何意义直观, 而且求解速度很快, 参数化的结果也比较理想, 非常适合于纹理贴图等应用。

但是, 本文的方法无法保证平面参数化结果的有效性, 即不会发生三角片的翻转。实验结果表明, 当作为约束条件的控制顶点数目选取适当, 其相对位置分布适当时, 参数化后的平面网格不会发生重叠, 在以后的工作中将会去改进这种参数化方法, 使

其更加完善和实用。

参考文献 (References)

- 1 Floater M S, Hormann K. Surface parameterization: a tutorial and survey [A]. Floater M S. Advances in Multiresolution for Geometric Modeling [C], Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2005: 157 ~ 186.
- 2 Alliez P, Cohen-Steiner D, Devillers O, *et al.* Anisotropic polygonal remeshing [J]. ACM Transactions on Graphics, 2003, **22** (3): 485 ~ 493.
- 3 Floater M S. Parameterization and smooth approximation of surface triangulations [J]. Computer Aided Geometric Design, 1997, **14** (3): 231 ~ 250.
- 4 Sheffer A, de Sturler E. Parameterization of faceted surfaces for meshing using angle-based flattening [J]. Engineering with Computers, 2001, **17** (3): 326 ~ 337.
- 5 Sheffer A, Lévy B, Mogilnitsky M, *et al.* ABF + + : fast and robust angle based flattening [J]. ACM Transactions on Graphics, 2005, **24** (2): 311 ~ 330.
- 6 Lévy B, Petitjean S, Ray N, *et al.* Least squares conformal maps for automatic texture atlas generation [J]. ACM Transactions on Graphics, 2002, **21** (3): 362 ~ 371.
- 7 Yoshizawa S, Belyaev A, Seidel H P. A fast and simple stretch-minimizing mesh parameterization [A]. In: Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Application [C], Genova, Italy, 2004: 200 ~ 208.
- 8 Karni Z, Gotsman C, Gortler S J. Free-Boundary linear parameterization of 3D meshes in the presence of constraints [A]. In: Proceedings of International Conference on Shape Modeling and Application [C], Massachusetts, Boston, USA, 2005: 266 ~ 275.
- 9 Floater M S. Mean value coordinates [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, **20** (1): 19 ~ 27.
- 10 Toledo S. Taucs: a library of sparse linear solvers [CB/OL]. <http://www.tau.ac.il/stoledo/taucs/>, 2003.