

# 一种基于 $L^1$ 的图像自适应分解变分方法

刘 鸣 潘振宽

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

**摘 要** 变分方法可以将图像分解为同类部分  $u$  和振荡部分  $v$ , 但传统的图像分解方法会导致分解结果的对比度发生改变, 并产生阶梯效应。为了更好地进行图像分解和去噪, 提出了一种基于  $L^1$  的可根据图像局部信息自适应的图像分解变分方法。该方法首先使用  $L^1$  范数作为分解模型中的逼近项, 以便使分解结果能保持原始图像边缘和保持对比度不变; 然后通过引入图像局部特征的自适应函数来削减同类部分  $u$  的阶梯效应。实验证明, 新方法比传统方法能更好地应用于图像分解和图像的噪声去除。

**关键词** 图像分解 变分法 局部自适应

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)06-1075-07

## $L^1$ Based Local Adaptive Image Decomposition Variational Method

LIU Ming, PAN Zhen-kuan

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

**Abstract** Image can be decomposed into homogenous components  $u$  and oscillatory components  $v$  by using variational methods. However the solution of traditional variational methods has contrast loss and staircasing effect. Now we propose a local adaptive variational decomposition method based on  $L^1$ . Using  $L^1$ -norm as the fidelity term, we can get the solution which preserves the edges of original images and the contrast invariant. At the same time, the adaptive function which we induced here can reduce the staircasing effect on homogenous component  $u$ . Numerical results are presented, showing that the new method works better on several various types of images for image decomposition and denoising than traditional methods.

**Keywords** image decomposition, variational method, local adaptive

## 1 引 言

图像分解是图像处理研究的一个重要领域, 因为通过对图像进行分解, 可以提取出图像中人们感兴趣的信息, 而良好的图像分解技术不仅可以将图像的噪声部分剔除, 同时可分离出图像中重要的几何特征, 从而为图像处理的后续工作(如图像修复、图像恢复、图像去噪、纹理识别等)奠定良好的基础。在图像处理领域中, 变分偏微分方程(PDE)方法在近几年成为人们研究的热点。其基本模型是, 对于一幅给定的图像  $f$ , 可以视为由同类(homogeneous)

部分  $u$  和纹理部分构成的振荡(oscillatory)部分  $v$  组成, 即  $f = u + v$ 。在这一模型中,  $u$  是对原始图像的几何描述,  $v$  包含了图像的噪声和纹理。

传统的图像分解的变分方法, 即 ROF(Rudin-Osher-Fatemi)分解模型<sup>[1]</sup>, 就是从有界变分(bounded variation, BV)空间  $BV$  中求解有界变分函数集  $u$ 。这一方法不仅可以求得分段光滑的区域  $u$ , 同时可很好地保持原始图像的边缘。但是由于  $BV$  具有保持不连续性的性质, 而包含自然纹理和噪声的图像是不能完全在  $BV$  中进行重建的<sup>[2]</sup>。针对这一问题, Meyer 提出了一种图像分解模型——TV-G<sup>[3]</sup>模型, 该模型可以同时得到图像中的同类对

收稿日期: 2007-12-18; 改回日期: 2008-02-22

第一作者简介: 刘 鸣(1980~), 男, 青岛大学信息工程学院计算机应用技术专业研究生。主要研究方向为图像分解的变分方法。

E-mail: thanklium@yahoo.com.cn

象部分  $u$  与包含纹理和噪声的部分  $v$ 。Vese 与 Osher 给出了 TV-G 模型中  $v$  的范数的计算方法<sup>[4]</sup>。上述用于图像分解的变分模型也存在着以下明显不足:(1)在处理图像连续变化区域时,会产生阶梯效应(staircasing);(2)在图像恢复的过程中改变了图像的强度差,从而造成图像的对比度减少;(3)在进行全变分(TV)规整化时,若将图像的梯度的  $L^1$  范数转化为良态问题的约束条件,使得泛函最小化问题转化为调和最小化问题,则会在一定程度上模糊边缘,从而造成图像的几何特征丢失。

本文针对上述的图像分解模型存在的问题,在 Meyer 模型的基础上,提出了一种可以根据图像局部信息对变分模型中的规整项进行自适应调整的图像分解模型。该模型继承了基于  $L^2$  的图像分解模型能保持边缘不变的优点,用  $L^1$  范数代替原模型中的逼近项—— $L^2$  范数,以便图像分解后的结果与原始图像的对比度保持不变。同时在此基础上引入自适应函数,使图像分解后能够得到强度连续变化的同类区域  $u$ ,从而消除梯度效应。本文列举的实验结果证明了上述结论。

## 2 基于 $L^2$ 的图像分解变分方法

对于给定的图像  $f: \Omega \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\Omega$  为有界开集,可分解为  $f = u + v$ ,  $u$  是图像的同类部分(也有文献中称其为几何(geometrical)部分或卡通(cartoon)部分),其刻画了图像的同质区域; $v$  是包含纹理特征的振荡部分(也称为纹理(texture)部分)。1992年, Rudin、Osher 和 Fatemi 等人提出了以下经典的能量泛函模型(ROF 模型)<sup>[1]</sup>:

$$\inf_{I = u + v, u \in BV \times L^2(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (1)$$

其中有界变分空间定义为  $BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} |Du| < \infty \right\}$ 。式(1)中的第1项为规整项,其定义为  $\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u(x) \operatorname{div}(\xi(x)) \mid \xi \in C_c^1(\Omega; \mathbf{R}^2), \|\xi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}$ ,第2项为逼近项,在保证被恢复的图像与原图像的一致性的同时,用  $L^2$  空间范数对图像的振荡部分进行了描述, $\lambda$  为 Lagrange 乘子。该模型最大的优点在于,其可在去除噪声的同时,保持图像的边缘,但也存在缺陷。虽然函数的

振荡部分  $v \in L^2$ ,但使用  $L^2$  范数对  $v$  的能量极小值进行近似并不是最好的方法。例如,当图像  $f \in BV$  且无噪声时,无论怎样调整参数  $\lambda$ ,该模型都无法得到正确解  $u = f, v = 0$ 。针对这一问题, Meyer 修改了 ROF 模型的逼近项范数<sup>[3]</sup>,即用函数空间  $G$  的范数代替了原模型中  $L^2$  范数, $v$  的范数表示为

$$\|v\|_G = \inf \left\{ \|\xi\|_{L^\infty} \mid \xi \in L^\infty, |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} \right\}$$

其中,空间  $G$  为 Banach 空间,其定义为

$$G(\mathbf{R}^2) = \{f = \operatorname{div} \xi \mid \xi \in L^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)\}$$

Vese 与 Osher 等人对 Meyer 分解模型中  $v$  的范数难以计算的问题提出了解决的方法<sup>[4]</sup>。他们将函数集  $v$  进一步分解为  $\xi_1$  和  $\xi_2$  两部分,分别表示在水平方向和垂直方向上的振荡,并提出了 VO(Vese and Osher)分解模型

$$\inf_{(u, \xi) \in BV \times L^p} \left\{ \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|f - (u + \operatorname{div} \xi)\|_{L^2}^2 + \mu \|\xi\|_{L^p} \right\} \quad (2)$$

其中,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ,  $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ ,  $\mu > 0$ ,  $\lambda > 0$ ,  $p > 1$ ,  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  为有界开集。式(2)中的第1项仍为  $L^1$  规整项,第2项为逼近项,可用  $L^2$  空间范数表达,第3项为 Meyer 模型中  $v$  的范数,显然,当  $p \rightarrow \infty$  时,  $\|\xi\|_{L^p} \rightarrow \|v\|_G$ 。Meyer 模型的主要思路就是用弱范数替代 ROF 模型中的逼近项的  $L^2$  范数,以便能够更好地将图像中的振荡部分分离出来。按照这一思路, Osher 等人提出了基于  $H^{-1}$  范数的图像分解模型<sup>[5]</sup>。以上模型都是可以通过变分法得到相应的 Euler-Lagrange 方程,并且方程解的存在性和唯一性都可以从理论上证明<sup>[1,6]</sup>。

利用上述模型进行图像分解,既能够得到稳态解,且经过恢复的图像的边缘位置不变。但是由于它们统一使用  $L^2$  范数作为能量泛函的逼近项,因此存在以下明显的缺点:(1)TV 模型规整化后,得到的结果改变了原图像的对比度。Strong 和 Chan 等人经过对 ROF 模型的分析,证明了  $L^2$  规整化会导致同类部分  $u$  图像强度发生改变<sup>[7]</sup>,其大小反比于图像局部特征尺度并正比于规整化算子  $\alpha \left( \alpha = \frac{1}{\lambda} \right)$ ;(2)几何特征发生改变。对于有界变分函数  $u \in BV(\Omega)$ ,其全变分可以用水平集函数表示为  $\int_{\Omega} |\nabla u| = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{|u=\gamma|} ds d\gamma$ ,其中  $\int_{|f=\gamma|} ds$  为水平集  $\{x \in \mathbf{R}^2 \mid u(x) = \gamma\}$  的周长,当进行 TV 规整化

时,函数的全变分会随着水平集中相应的等值线周长长的减少而减少,从而导致水平集的几何形态发生改变,其典型的例子是,当原始图像是矩形时,经处理得到的同类部分  $u$  的 4 个直角被错误地圆滑了<sup>[3]</sup>; (3) 阶梯效应。Strong 和 Chan 等人分析得出以下结论:用基于  $L^2$  的分解模型对连续变化的图像区域进行 TV 规整化,所得到的  $u$  是分段常值图像,即会出现阶梯效应<sup>[7]</sup>,这样会导致  $u$  中出现色块边界。

### 3 基于 $L^1$ 的自适应图像分解变分方法

Chan 和 Esedoglu 于 2004 年提出了一种基于  $L^1$  的图像分解模型——TV- $L^1$ <sup>[8]</sup> 模型:

$$\inf_{I=u+v, u \in BV \times L^1(\Omega)} \int_{\Omega} |Du| + \lambda \|v\|_{L^1(\Omega)}^2 \quad (3)$$

该模型用  $L^1$  范数代替了 ROF 模型中的数据逼近项的  $L^2$  范数。TV- $L^1$  模型可以在保持图像的几何特征(如边缘、角等)的同时,还可解决图像处理结果对比度丢失的问题:对于原始图像  $f$ ,若  $u$  为式(3)的解,则对于常数  $c$ ,  $cu$  即为  $cf$  的解。

对于分解结果中同类部分  $u$  出现阶梯效应的问题,Esedoglu 和 Osher 在 ROF 模型中引入了异性扩散<sup>[9]</sup>的概念。它的关键思想是对特定边界上的各个方向采取不同程度的扩散。在梯度较大的地方(如边界),采用较小程度的扩散,而在梯度较小的地方(平滑区域或边界的切线方向)则采用较大程度的扩散。利用这一思想,就可以既抑制图像分解后产生的阶梯效应,又能同时保持原图像的边缘。

按照以上思路,本文构造了如下一种基于  $L^1$  的自适应图像分解模型:

$$\inf_{f=u+v, u \in BV \cap L^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{q(|\nabla u|)} |\nabla u|^{q(|\nabla u|)} + \lambda \|f - u - \operatorname{div} \xi\|_{L^1(\Omega)} + \mu \int_{\Omega} \frac{1}{p(|\nabla u|)} |\xi|^{p(|\nabla u|)} \right\} \quad (4)$$

其中,函数  $q(s) = 1 + \exp(-s^2)$ , 是图像局部梯度模的函数,其满足  $\lim_{s \rightarrow 0} q(s) = 2, \lim_{s \rightarrow \infty} q(s) = 1$ 。能量泛函(式(4))中的第 1 项依然是规整项,但与原模型不同的是,该项可以随着梯度模值的大小发生改变。能量泛函的第 2 项是  $L^1$  逼近项,它用于使恢复图像在

保持图像的对比度不变的同时,与原图像尽量保持一致,即  $f \approx u + v = u + \operatorname{div} \xi, \xi = (\xi_1, \xi_2)$ 。泛函的第 3 项是使用范数来描述振荡部分  $v$  的能量,该项会随着函数  $p(s)$  的改变而变化。由于同类部分  $u$  所在的空间与振荡部分  $v$  所属空间是对偶空间<sup>[10-12]</sup>,因此当  $p$  与  $q$  为共轭时,即  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,即可根据  $p$  得到相应的  $q$ 。

使用变分法对式(4)进行求解,可得到以下满足 Neumann 边界条件的 Euler-Lagrange 方程:

$$\begin{cases} u = f - \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\lambda} (\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}) \\ \operatorname{div} (|\nabla u|^{q-2} \nabla u) \\ \mu \xi_1 (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^{p-2} = \lambda \partial x \left( \frac{u - f + \partial_x \xi_1 + \partial_x \xi_2}{\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}} \right) \\ \mu \xi_2 (\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2})^{p-2} = \lambda \partial y \left( \frac{u - f + \partial_x \xi_1 + \partial_x \xi_2}{\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}} \right) \end{cases} \quad (5)$$

由式(5)可知,在图像的边缘、噪声和纹理区域,局部梯度模的值非常大,此时  $q \approx 1, p \rightarrow \infty$ ,则式(5)退化为

$$u = f + \frac{1}{\lambda} (\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$$

即 Chan 和 Esedoglu 等人提出的模型——TV- $L^1$ <sup>[8]</sup> 模型。用该模型对图像进行规整化,不仅可以很好地保持图像中几何特征,并可保持图像的对比度不变。与上述情况对应,当处理对象的梯度模的值趋近于 0,即处于图像中的齐次区域时,  $q \approx 2, p \approx 2$ ,则式(5)变为

$$\begin{cases} u = f - \operatorname{div} \xi + \frac{1}{\lambda} (\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}) \operatorname{div} (\nabla u) \\ \mu \xi_1 = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u - f + \operatorname{div} \xi}{\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}} \right) \\ \mu \xi_2 = \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{u - f + \operatorname{div} \xi}{\sqrt{(f - u - \operatorname{div} \xi)^2 + \sigma}} \right) \end{cases} \quad (6)$$

此时,模型在图像的同类部分区域进行扩散,并对图像进行平滑。Osher、Sole 和 Vese 等人证明了当  $u \in L^1(\Omega)$ , 并且  $v$  属于  $u$  的对偶空间  $H^{-1}$  时,其对应的能量分解模型可取得很好的效果<sup>[5]</sup>,尤其是对卡通部分进行的平滑处理更为出色。由于式(6)符合上述条件,因此可获得减少阶梯效应的效果。

在原始模型(式(2))中,第 3 项用于控制纹理部

分的尺度。在新模型(式(4))中,对纹理尺度的控制可通过系数  $p$  完成。在图像的高振荡区域,  $\frac{1}{p} \rightarrow 0$ , 即振荡项  $\xi$  可描述更细致的纹理信息。同时,由于  $p$  与  $q$  的共轭性也保证了系数  $p$  不为 0, 因此可达到提取纹理信息的目的。

最后,模型(式(4))满足 TV 方法对图像进行处理的前提约束条件为  $\int_{\Omega} \mathbf{u} dx = \int_{\Omega} \mathbf{f} dx$ 。因此有  $\int_{\Omega} \mathbf{v} dx \approx 0$ , 此式为对振荡项基本特征的描述。

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \left( f_{i,j} - \frac{\xi_{1,i+1,j}^{(n)} - \xi_{1,i-1,j}^{(n)}}{2h} - \frac{\xi_{2,i,j+1}^{(n)} - \xi_{2,i,j-1}^{(n)}}{2h} + \frac{u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)}}{\lambda h^2} |f_{i,j} - u_{i,j}^{(n)} - \operatorname{div} \xi_{i,j}^{(n)}|_{\sigma} \right) / \left( 1 + \frac{4 |f_{i,j} - u_{i,j}^{(n)}|_{\sigma}}{\lambda h^2} \right)$$

$$\xi_{1,i,j}^{(n+1)} = \left( \frac{\lambda}{\mu |f_{i,j} - u_{i,j}^{(n)} - \operatorname{div} \xi_{i,j}^{(n)}|_{\sigma} + \frac{2\lambda}{h^2}} \right) \times \left( \frac{u_{i+1,j}^{(n)} - u_{i-1,j}^{(n)}}{2h} - \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2h} + \frac{\xi_{1,i+1,j}^{(n)} + \xi_{1,i-1,j}^{(n)}}{h^2} + \frac{1}{2h^2} (2\xi_{2,i,j}^{(n)} + \xi_{2,i-1,j-1}^{(n)} + \xi_{2,i+1,j+1}^{(n)} - \xi_{2,i,j-1}^{(n)} - \xi_{2,i-1,j}^{(n)} - \xi_{2,i,j+1}^{(n)}) \right)$$

$$\xi_{2,i,j}^{(n+1)} = \left( \frac{\lambda}{\mu |f_{i,j} - u_{i,j}^{(n)} - \operatorname{div} \xi_{i,j}^{(n)}|_{\sigma} + \frac{2\lambda}{h^2}} \right) \times \left( \frac{u_{i,j+1}^{(n)} - u_{i,j-1}^{(n)}}{2h} - \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2h} + \frac{\xi_{1,i,j+1}^{(n)} + \xi_{1,i,j-1}^{(n)}}{h^2} + \frac{1}{2h^2} (2\xi_{1,i,j}^{(n)} + \xi_{1,i-1,j-1}^{(n)} + \xi_{1,i+1,j+1}^{(n)} - \xi_{1,i,j-1}^{(n)} - \xi_{1,i-1,j}^{(n)} - \xi_{1,i,j+1}^{(n)}) \right)$$

$$|f_{i,j} - u_{i,j}|_{\sigma} = \sqrt{(f_{i,j} - u_{i,j})^2 + \sigma}$$

式中,由于  $|\nabla \mathbf{u}|$  会在分母出现,因此为避免分母为 0, 可通过引入一个极小的正参数  $\varepsilon$  来使得  $\operatorname{div}(|\nabla \mathbf{u}|^{q(1\nabla \mathbf{u})-2} \nabla \mathbf{u}) \approx \operatorname{div}(\sqrt{|\nabla \mathbf{u}|^2 + \varepsilon^2}^{q(1\nabla \mathbf{u})-2} \nabla \mathbf{u})$ 。

在初始化时,可选择  $\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{f}, \xi_1^{(0)} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\mathbf{f}_x}{|\nabla \mathbf{f}|}, \xi_2^{(0)} = -\frac{1}{2\lambda} \frac{\mathbf{f}_y}{|\nabla \mathbf{f}|}$ , 同时,式(4)满足 Neumann 边界条件的约束。

式(4)中,需要确定的参数为  $\lambda$  和  $\mu$ , 其中尺度参数  $\lambda$  用于控制原始图像  $\mathbf{f}$  与分解后图像  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  的逼近程度。 $\lambda$  的值越小,能量泛函对图像进行规整化的作用越大。参数  $\mu$  用于控制在  $\mathbf{v}$  中所保持的振荡特征的细致程度,随着  $\mu$  的减小,  $\mathbf{v}$  中所包含的纹理就越细致。从理论上来说,  $\lambda$  与  $\mu$  的取值可以通过计算与其对应项的范数得到<sup>[13]</sup>。但是在实际应用时,往往由于无法计算待处理图像中同类区域和振荡区域的范数,因此只能根据具体的情况,对  $\lambda$  与  $\mu$  值进行估计。通常  $\lambda$  与  $\mu$  的取值范围选取在区间  $(0, 1]$ 。而在新模型中,由于函数  $p$  的作用,可使得  $\mu$  的作用减小,因此可以更好地根据图像的局

## 4 数值化方法与参数

本文采用差分方法对式(5)进行数值离散,同时对图像进行等间隔采样,设采样步长为  $h$ , 并设图像在采样点上的像素值为  $f(i, j)$ 。进行差分时,在图像的梯度模值大的区域,  $q \approx 1$ , 采用的模型为 TV- $L^1$  模型,其差分格式可参考文献[8], 在这里不再赘述。当处于图像中的齐次区域时,  $q \approx 2$ , 则对式(5)采用半隐式的迭代方法进行数值差分,可得

部信息分解出图像的纹理信息,同时也可保证得到式(4)的最优解。

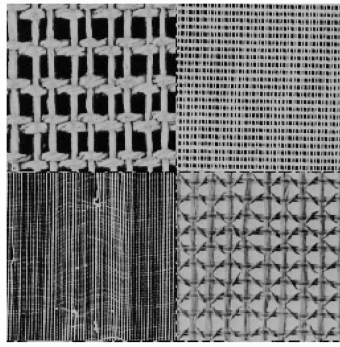
## 5 实验结果与分析

为验证本文提出的自适应分解模型的效果,分别使用 ROF 模型(式(1))、VO 模型(式(2))和自适应分解模型(式(4))对 3 幅原始图像(图 1)进行了图像分解,尺度参数分别取  $\lambda = 0.01, \mu = 0.01$ 。实验环境用软件 Matlab 7.0, 计算机硬件配置为 PIV 1.8 G、256 M 内存。使用 ROF 模型和 VO 模型进行分解的迭代次数为 50 次,使用本文提出的新模型进行图像分解的迭代次数为 15 次。

从图 2、图 3 和图 4 中可以看出,使用 ROF 和 VO 模型进行图像分解时,阶梯效应可使分解得到的同类部分  $\mathbf{u}$  是分段光滑的图像。而使用新模型(式(4))对图像进行分解,则其得到的同类部分  $\mathbf{u}$  是连续光滑的,阶梯效应明显减少。对于振荡部分  $\mathbf{v}$ , 用新模型分解得到的结果更加细致,尤其是用新模型分解得到的  $\mathbf{v}$  中包含了原图像清晰的边缘信



(a) 无噪声图像



(b) 无噪声布纹图像



(c) 含高斯噪声图像( $\sigma^2=0.01, SNR=4.039$  dB)

图 1 原始图像

Fig. 1 Original images



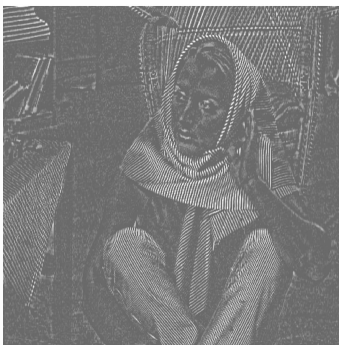
(a) ROF模型得到的  $u$



(b) VO模型得到的  $u$



(c) 新模型得到的  $u$



(d) ROF模型得到的  $v$



(e) VO模型得到的  $v$



(f) 新模型得到的  $v$

图 2 使用不同模型分别对图 1(a) 进行图像分解的结果

Fig. 2 Using three models to decompose image Fig. 1 (a) respectively

息,这将有助于进行纹理识别、图像恢复等一系列后续处理工作。图 4 是对含有噪声的图像(图 1(c)),其信噪比(SNR)值为 4.039 dB,SNR 定义为  $SNR = 10 \log \frac{V(u)}{V(f)}$ ,其中  $V(u)$  为原始图像的方差, $V(f)$  为相应图像噪声的方差)进行分解处理的结果。对噪声图像进行图像分解,其振荡部分  $v$  包含了噪声部

分,因此分解的过程也是去除噪声的过程。从图 4 可见,由于阶梯效应,致使用 ROF 和 VO 模型分解得到的同类部分  $u$  是非常明显的块状图像,尤其是背景部分。用新模型进行图像分解得到的同类部分  $u$  是保持了边缘并且连续光滑的图像,这更符合原始的无噪声图像。而用新模型进行图像分解得到的包含噪声和纹理的振荡部分  $v$ ,则含有可被接受的

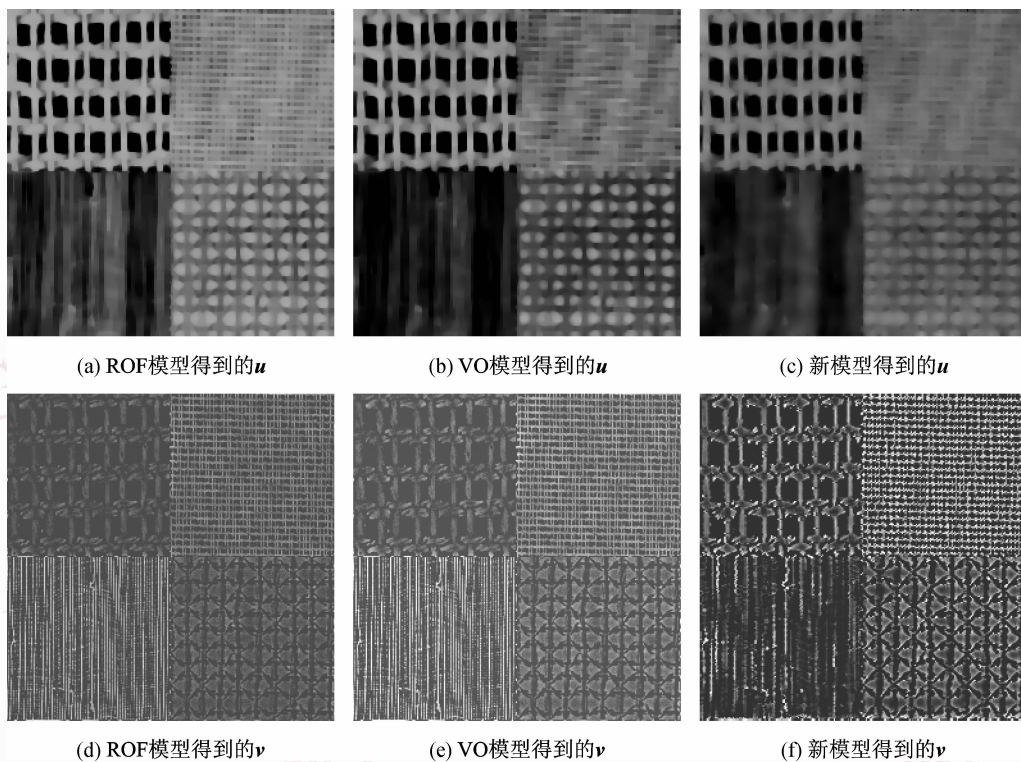


图 3 使用不同模型分别对图 1(b) 进行图像分解的结果  
 Fig. 3 Using three models to decompose image Fig. 1(b) respectively

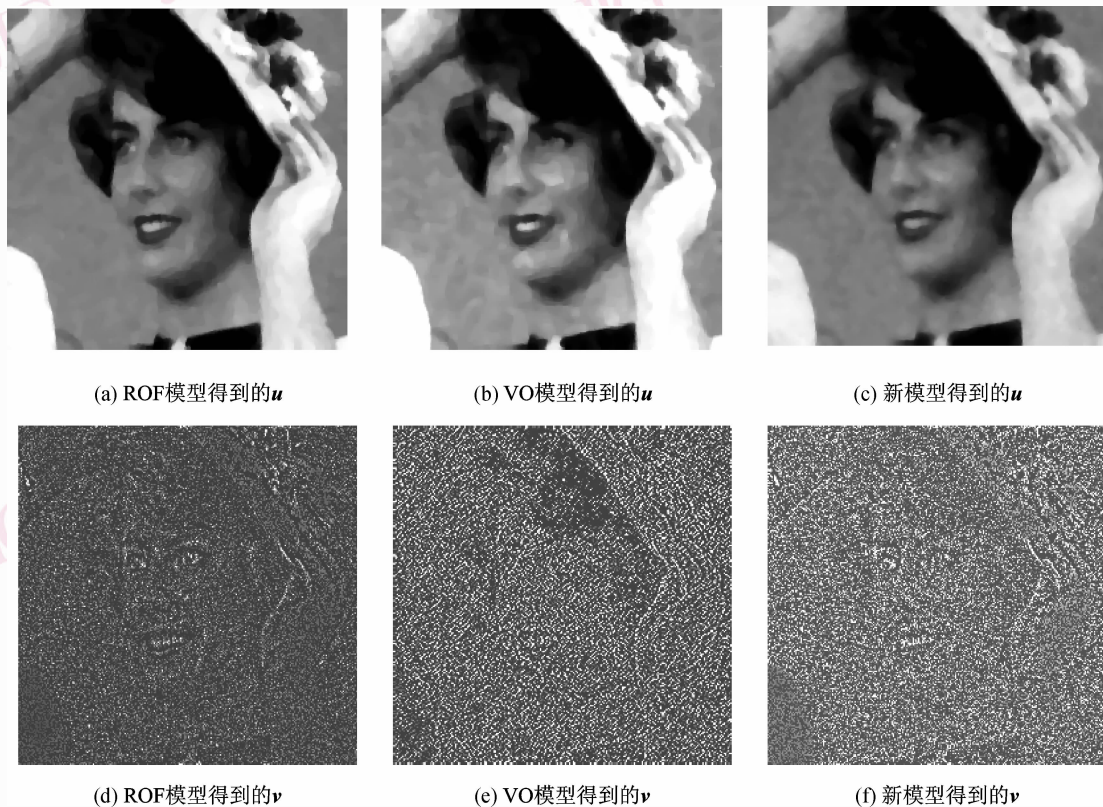


图 4 使用不同模型分别对图 1(c) 进行图像分解的结果  
 Fig. 4 Using three models to decompose image Fig. 1(c) respectively

结构信息,这有助于对噪声和纹理进行进一步分解的后续处理工作。表1使用信噪比对3个模型的去噪结果进行了评价。由表1可见,在取得几乎相同的去噪效果的前提下,新模型进行分解运算的迭代次数明显少于传统的方法。因此,与ROF和VO模型相比,在参数一致的前提下,新模型只需较少的迭代次数就可完成图像的分解工作,这说明新模型(式(4))具有更高的运算效率。

表1 运算效率比较

Tab.1 Efficiency comparison

分解方法	迭代次数	信噪比(dB)
ROF模型	50	3.982
VO模型	40	3.873
本文新模型	15	3.945

## 6 结 论

本文提出了一种基于  $L^1$  并可根据图像局部信息进行图像分解的自适应模型,并通过变分方法得到相应的PDE来进行求解。新方法可以将图像分解成同类部分  $u$  和振荡部分  $v$ 。得到的同类部分  $u$  既保持了原图像的边缘,又削减了阶梯效应。同时提取了图像的纹理部分。本文还给出了泛函模型的数值离散计算方法。实验表明,新方法不仅可以很好地应用于图像分解以及图像的噪声去除,并且与传统方法相比,具有更高的运算效率。

### 参考文献 (References)

1 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. *Physica D*, 1992, **60**:259-268.

2 Gousseau Y, Morel J-M. Are natural images of bounded variation[J]. *SIAM Journal on Mathematics*, 2001, **33**(3):634-648.

3 Meyer Y. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations*[M]. Providence, Rhode Island, USA: American Mathematical Society, 2002.

4 Vese L, Osher S. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing[J]. *Journal of Scientific Computing*, 2003, **19**(11):553-572.

5 Osher S, Sole A, Vese L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $H^{-1}$  norm[J]. *Multiscale Model and Simulation*, 2003, **1**(3):349-370.

6 Aubert G, Aujol J F. Modeling very oscillating signals. Application to image processing[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2005, **51**(2):163-182.

7 Strong D, Chan T F. Edge-preserving and scale-dependent properties of total variation regularization [J]. *Inverse Problem*, 2003, **19**:165-187.

8 Chan T, Esedoglu S. Aspects of total variation regularized  $L^1$  function approximation[J]. *SIAM Journal on Mathematics*, 2005, **65**(5):1817-1837.

9 Osher S, Esedoglu S. Decomposition of images by the anisotropic Rudin-Osher-Fatemi model [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 2004, **57**:1609-1626.

10 Blomgren P, Chan T F, Mulet P, et al. Variational PDE models and methods for image processing[J]. In: 18th Biennial Conference on Numerical Analysis[C], Dundee, Scotland, 1999, June 29-July 2.

11 Chambolle A, Lions P L. Image recovery via total variation minimization and related problems[J]. *Numerical Mathematics*, 1997, **76**(2):167-188.

12 Chen Y, Levine S, Rao M. Variable exponent, linear growth functionals in image restoration[J]. *SIAM Journal on Mathematics*, 2004, **66**(4):1383-1406.

13 Le T M, Vese L. Image decomposition using total variation and div (BMO) [J]. *Multiscale Model and Simulation*, 2005, **4**(2):390-423.