

一种基于矢量伸缩函数的参数曲面 插值变形方法

周正华

(中国计量学院理学院, 杭州 310018)

摘要 为了对参数曲面进行精确变形,可通过构造特殊矢量伸缩函数来实现参数曲面的插值变形。变形时,先在曲面选取变形辅助点,并利用这些辅助点构造矢量伸缩函数;然后基于矢量叠加原理用此伸缩矢量函数去作用曲面,使曲面发生变形且变形后通过给定的插值点。插值变形结果表明,此方法不仅能够精确控制变形范围,而且在变形与未变形部分之间具有 C^2 连续性。

关键词 参数曲面 插值变形 伸缩矢量函数

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)11-2328-05

A Method of Interpolation Deformation Based on Vector Extension Function for Parametric Surface

ZHOU Zheng-hua

(School of Science, China Jiliang University, Hangzhou 310018)

Abstract In order to realize the accurate deformation of the parametric surface, a special vector extension function was established to realize the interpolation deformation for parametric surface, in the course of the deformation. First, some deformation auxiliary data on the surface is chosen to construct the extension vector function, which is used to make the surface deform based on vector addition and ensures the deformed surface passing through the given position data. The deformation results show that the method can not only control the deformation region accurately but also make the deformation domain and the undistortion domain of the surface connect to C^2 continuity.

Keywords parametric surface, interpolation deformation, vector extension function

1 引言

曲面变形就是曲面所在的空间自身到自身的一个映射, Barr 在 1984 年首先提出整体与局部的变形方法^[1], 虽然该方法及其推广^[2]能够进行常规变形, 但很难产生任意形状, 1986 年, Sederberg 等人提出的自由变形 (FFD) 方法^[3]克服了上述缺点。此方法及其推广^[4]曾被广泛用于几何造型、计算机动画, 但该方法不易进行变形控制, 变形难以准确地达

到预期结果。继承 FFD 思想的其他变形方法有: 1994 年 Lazarus 等人给出的轴变形 (AXDF) 方法^[5]; 1996 年 Feng 等人给出的基于曲面控制的自由变形方法^[6], 这些方法均不同程度地改进了 FFD 方法, 并增加了变形控制的灵活性。应用中常见的变形方法^[6]本质上是 Barr 或 Sederberg 方法的特殊应用或推广。本文基于空间矢量叠加原理, 提出了一种新的参数曲面插值变形方法, 它无需借助于如 FFD 方法中的平行六面体格子或 AXDF 方法中的轴变形等辅助工具; 无需像 Barr 提出的方法一样, 先进行微

收稿日期: 2007-12-10; 改回日期: 2008-09-23

第一作者简介: 周正华 (1977 ~), 男, 讲师。2005 年获西北工业大学理学院硕士学位。主要研究方向为信息与图像处理。

E-mail: zzhzjw2003@163.com

分后积分,而是利用具有特殊性质的伸缩矢量函数作用于待变形曲面,该方法在很大程度上增加了变形的控制精度和灵活性,不但对任何形式的参数曲面均适用,而且具体操作简单易行。

2 基于矢量叠加的参数曲面的变形

设 $\mathbf{r}(u, v) = \{x(u, v), y(u, v), z(u, v)\}$ 为一 $C^r(r \geq 2)$ 类参数曲面,其中参数化区域 $\Omega = \{(u, v) \mid a \leq u \leq b, c \leq v \leq d\}$,由于空间的点与从原点到该点的向量一一对应,为此本文的空间点都用向量表示,不妨设 $\mathbf{p}_{i,j}(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ 是给定的待插值的 mn 个拓扑阵列位置点,则曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 上的待变形区域为 $\Omega_0 = \{(u, v) \mid u_0 \leq u \leq u_{n+1}, v_0 \leq v \leq v_{m+1}\}$;经过变形后,再插值这些点 $\mathbf{p}_{i,j}(i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m)$ 。插值时,首先在曲面 $\mathbf{r}(u, v)(u_0 \leq u \leq u_{n+1}; v_0 \leq v \leq v_{m+1})$ 上选取 mn 个辅助点 $\mathbf{r}_{i,j} = (x(u_i, v_j), y(u_i, v_j))(i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m)$,其对应的参数为 $u_i(i = 1, \dots, n), v_j(j = 1, \dots, m)$;然后基于曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 上的这些拓扑阵列数据点,构造一个定义在 Ω 上的矢量伸缩函数 $\mathbf{h}(u, v)$,并将变形后的曲面定义为 $\mathbf{R}(u, v) = \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{h}(u, v)$ 。为了保证变形后的曲面与原来的未变形曲面部分实现 C^2 光滑性连接及实现变形的交互控制性,要求构造的矢量伸缩函数 $\mathbf{h}(u, v)$ 需满足下列条件:

(1) 局部支撑条件

$$\mathbf{h}(u, v) = 0, \frac{\partial^j \mathbf{h}(u, v)}{\partial u^j} = 0, \frac{\partial^j \mathbf{h}(u, v)}{\partial v^j} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{h}(u, v)}{\partial v \partial u} = 0, j = 1, 2, \forall (u, v) \in \Omega \setminus \Omega_0$$

(2) 插值条件

$$\mathbf{h}(u_i, v_j) = \mathbf{p}_{i,j}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$$

变形后的曲面定义为

$$\mathbf{R}(u, v) = \begin{cases} \mathbf{r}(u, v) & (u, v) \in \Omega \setminus \Omega_0 \\ \mathbf{r}(u, v) + \mathbf{h}(u, v) & (u, v) \in \Omega_0 \end{cases}$$

2.1 构造矢量伸缩函数 $\mathbf{h}(u, v)$

为了使得矢量伸缩函数 $\mathbf{h}(u, v)$ 满足条件(1)

和(2),令 $\mathbf{h}(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (\mathbf{p}_{i,j} - \mathbf{r}_{i,j}) L_i(u) L_j(v)$,

设 $\mathbf{r}_{i-1,j}, \mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{r}_{i+1,j}$ 是曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 上沿 u 方向 3 个相邻点, $(i = 2, \dots, n + 1; j = 1, \dots, m)$,则 $L_i(u)$ 和 $L_j(v)$ 分别构造如下:

$$L_i(u) = \begin{cases} t^3 \left[\left(2 + \frac{2h_{i-1}}{h_i} \right) (1-t) + t \right], \\ t = \frac{u - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}, u \in [u_{i-1}, u_i] \\ (1-t)^3 \left[(1-t) + \left(2 + \frac{2h_i}{h_{i-1}} \right) t \right], \\ t = \frac{u - u_i}{u_{i+1} - u_i}, u \in [u_i, u_{i+1}] \\ 0 & u \notin [u_{i-1}, u_{i+1}] \end{cases}$$

易见, $L_i(u)$ 在 $[u_{i-1}, u_{i+1}]$ 上是 C^2 连续的,且

$$L_i(u_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

设 $\mathbf{r}_{i,j-1}, \mathbf{r}_{i,j}, \mathbf{r}_{i,j+1}$ 是曲面 $\mathbf{r}(u, v)$ 上沿 v 方向 3 个相邻点 $(i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, m - 1)$,

$$L_j(v) = \begin{cases} t^3 \left[(1-t) \left(\frac{2I_{j-1}}{I_j} + 2 \right) + t \right], \\ t = \frac{v - v_{j-1}}{v_j - v_{j-1}}, v \in [v_{j-1}, v_j] \\ (1-t)^3 \left[(1-t) + \left(2 + \frac{2I_j}{I_{j-1}} \right) t \right], \\ t = \frac{v - v_j}{v_{j+1} - v_j}, v \in [v_j, v_{j+1}] \\ 0 & v \notin [v_{j-1}, v_{j+1}] \end{cases}$$

易见, $L_j(v)$ 在 $[v_{j-1}, v_{j+1}]$ 上是 C^2 连续的,其在

$$v_k \text{ 处的值 } L_j(v_k) = \delta_{j,k} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j \end{cases}$$

2.2 基函数 $L_i(u)$ 的形状

当 $u \in [u_{i-1}, u_i]$ 时,记 $h_{i-1} = u_i - u_{i-1}$,则 $h_i = u_{i+1} - u_i$,令 $t = \frac{u - u_{i-1}}{u_i - u_{i-1}}$,则可将基函数 $L_i(u)$ 写成以下向量形式:

因为

$$\begin{aligned} x &= t = t \cdot \sum_{i=0}^3 B_0^3(t) = 0 \cdot (1-t)^4 + \frac{1}{4} \cdot 4(1-t)^3 t + \\ &\frac{2}{4} \cdot 6(1-t)^2 t^2 + \frac{3}{4} \cdot 4(1-t)t + \frac{4}{4} t^4 \\ y &= L_i(u) = 0 \cdot (1-t)^4 + 0 \cdot 4(1-t)^3 t + 0 \cdot 6(1-t)^2 t^2 + \\ &\frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i} \right) \cdot (1-t)t^3 + 1 \cdot t^4 \end{aligned}$$

所以基函数 $L_i(u)$ 的向量形式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{b}_0 B_0^4(t) + \mathbf{b}_1 B_1^4(t) + \mathbf{b}_2 B_2^4(t) + \mathbf{b}_3 B_3^4(t) +$$

$$b_4 B_4^4(t), \text{ 其中 } b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_{i-1}}{h_i}\right) \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B_i^n(t) \text{ 为 } n \text{ 次伯恩斯坦基}$$

函数, 即 $B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}$

同理, 当 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 时, 令 $t = \frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}$, 则可将基

$$\text{函数 } L_i(u) \text{ 写成以下向量形式: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b_0 B_0^4(t) + b_1 B_1^4(t) + b_2 B_2^4(t) + b_3 B_3^4(t) + b_4 B_4^4(t), \text{ 其中}$$

$$b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{h_i}{h_{i-1}}\right) \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

因此, 基函数 $L_i(u)$ 可以看成是分段 4 次 Bézier 曲线, 它的图形如下:

- (1) 当 $h_i > h_{i-1}$ 时, 则 $L_i(u)$ 的图形为图 1;
- (2) 当 $h_i = h_{i-1}$ 时, 则 $L_i(u)$ 的图形为图 2;
- (3) 当 $h_i < h_{i-1}$ 时, 则 $L_i(u)$ 的图形为图 3。

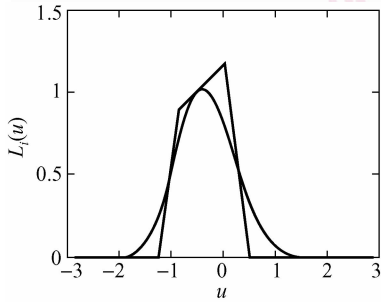


图 1 $h_i > h_{i-1}$ 时的基函数 $L_i(u)$

Fig. 1 $h_i > h_{i-1}$, basis function $L_i(u)$

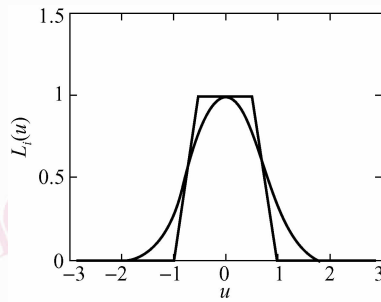


图 2 $h_i = h_{i-1}$ 时的基函数 $L_i(u)$

Fig. 2 $h_i = h_{i-1}$, basis function $L_i(u)$

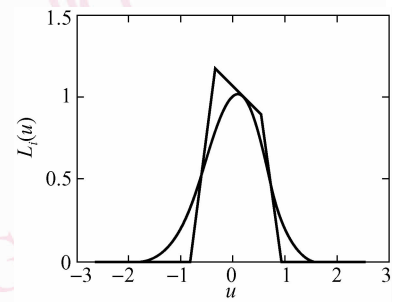


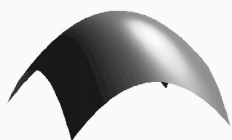
图 3 $h_i < h_{i-1}$ 时的基函数 $L_i(u)$

Fig. 3 $h_i < h_{i-1}$, basis function $L_i(u)$

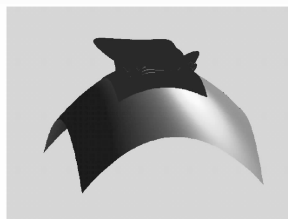
3 参数曲面插值变形图例

本文对下面 3 个曲面: $S_1: \begin{cases} x = \cos(u) \sin(v) \\ y = \sin(u) \sin(v) \\ z = \cos(v) \end{cases}$

(其参数区域为 $\Omega_1 = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$),



(a) 变形前的曲面 S_1



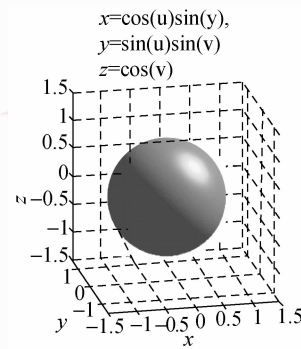
(b) 变形后的曲面 S_1

图 4 变形前后的曲面 S_1

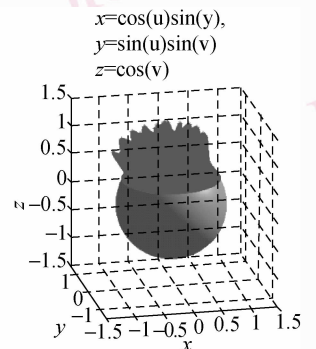
Fig. 4 The surface S_1 deformed before and after

抛物面 $S_2: z = \frac{1}{8}(-x^2 - y^2 + 2) + 2$,

$S_3: z = 0.75e^{-\frac{1}{4}[(x-3)^2 + (y-3)^2]} + 0.75e^{-\frac{x}{49} - \frac{y}{100}} + 0.5e^{-\frac{1}{4}[(x-8)^2 + (y-4)^2]} - 0.2e^{-[(x-5)^2 + (y-8)^2]}$ 采用本文的方法进行插值变形, 变形前后的曲面 S_1, S_2, S_3 如图 4 ~ 图 6 所示。



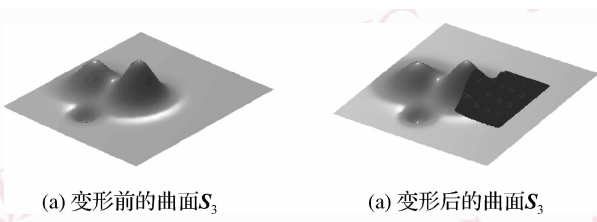
(a) 变形前的曲面 S_2



(b) 变形后的曲面 S_2

图 5 变形前后的曲面 S_2

Fig. 5 The surface S_2 deformed before and after



(a) 变形前的曲面 S_3 (a) 变形后的曲面 S_3

图 6 变形前后的曲面 S_3

Fig. 6 The surface S_3 deformed before and after

曲面 S_1 的变形区域是 $\Omega = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \frac{\pi}{3}\}$, 曲面上选取的 16 个辅助位置点的向量形式如下:

- $r_{1,1} = (0.064\ 2, 0.197\ 7, 0.978\ 1)$
- $r_{1,2} = (0.125\ 7, 0.386\ 8, 0.913\ 5)$
- $r_{1,3} = (0.181\ 6, 0.559\ 0, 0.809\ 0)$
- $r_{1,4} = (0.229\ 6, 0.706\ 8, 0.669\ 1)$
- $r_{2,1} = (0.168\ 2, 0.122\ 2, 0.978\ 1)$
- $r_{2,2} = (0.329\ 1, 0.239\ 1, 0.913\ 5)$
- $r_{2,3} = (0.475\ 5, 0.345\ 5, 0.809\ 0)$
- $r_{2,4} = (0.601\ 2, 0.436\ 8, 0.669\ 1)$
- $r_{3,1} = (-0.168\ 2, -0.122\ 2, 0.978\ 1)$
- $r_{3,2} = (0.329\ 1, -0.239\ 1, 0.913\ 5)$
- $r_{3,3} = (-0.475\ 5, -0.345\ 5, 0.809\ 0)$
- $r_{3,4} = (-0.601\ 2, -0.436\ 8, 0.669\ 1)$
- $r_{4,1} = (0.064\ 2, -0.197\ 7, 0.978\ 1)$
- $r_{4,2} = (0.125\ 7, -0.386\ 8, 0.913\ 5)$
- $r_{4,3} = (0.181\ 6, -0.559\ 0, 0.809\ 0)$
- $r_{4,4} = (0.229\ 6, -0.706\ 8, 0.669\ 1)$

变形后的曲面 S_1 通过的插值点的向量形式如下:

- $p_{1,1} = (0.089\ 9, 0.276\ 8, 1.369\ 4)$
- $p_{1,2} = (0.176\ 0, 0.541\ 6, 1.279\ 0)$
- $p_{1,3} = (0.254\ 3, 0.782\ 6, 1.132\ 6)$
- $p_{1,4} = (0.321\ 5, 0.989\ 5, 0.936\ 8)$
- $p_{2,1} = (0.235\ 5, 0.171\ 1, 1.369\ 4)$
- $p_{2,2} = (0.460\ 7, 0.334\ 7, 1.279\ 0)$
- $p_{2,3} = (0.665\ 7, 0.483\ 7, 1.132\ 6)$
- $p_{2,4} = (0.841\ 7, 0.611\ 5, 0.936\ 8)$
- $p_{3,1} = (0.235\ 5, -0.171\ 1, 1.369\ 4)$
- $p_{3,2} = (-0.460\ 7, -0.334\ 7, 1.279\ 0)$
- $p_{3,3} = (-0.665\ 7, -0.483\ 7, 1.132\ 6)$
- $p_{3,4} = (-0.841\ 7, -0.611\ 5, 0.936\ 8)$
- $p_{4,1} = (0.089\ 9, -0.276\ 8, 1.369\ 4)$

$p_{4,2} = (0.176\ 0, -0.541\ 6, 1.279\ 0)$
 $p_{4,3} = (0.254\ 3, -0.782\ 6, 1.132\ 6)$
 $p_{4,4} = (0.321\ 5, -0.989\ 5, 0.936\ 8)$
 抛物面 S_2 的变形区域是 $\Omega = \{(u, v) \mid -2.2 \leq u \leq 2.2, -2.2 \leq v \leq 2.2\}$: 曲面上选取的辅助点的向量形式如下:

- $r_{1,1} = (-2, -0.4, 1.412)$
- $r_{1,2} = (-2, 1.2, 1.390\ 6)$
- $r_{1,3} = (-2, 2.8, 1.37)$
- $r_{1,4} = (-2, 4.4, 1.347\ 3)$
- $r_{2,1} = (-1, -0.4, 1.384\ 7)$
- $r_{2,2} = (-1, 1.2, 1.372\ 4)$
- $r_{2,3} = (-1, 2.8, 1.364\ 3)$
- $r_{2,4} = (-1, 4.4, 1.333\ 7)$
- $r_{3,1} = (0, -0.4, 1.363\ 3)$
- $r_{3,2} = (0, 1.2, 1.397\ 2)$
- $r_{3,3} = (0, 2.8, 1.453\ 6)$
- $r_{3,4} = (0, 4.4, 1.379\ 1)$
- $r_{4,1} = (1, -0.4, 1.355\ 6)$
- $r_{4,2} = (1, 1.2, 1.527\ 9)$
- $r_{4,3} = (1, 2.8, 1.777\ 9)$
- $r_{4,4} = (1, 4.4, 1.57)$

变形后的曲面 S_2 通过的插值点的向量形式如下:

- $p_{1,1} = (-2.44, -0.488, 1.722\ 7)$
- $p_{1,2} = (-2.42, 1.452, 1.682\ 7)$
- $p_{1,3} = (-2.44, 3.416, 1.671\ 4)$
- $p_{1,4} = (-2.34, 5.148, 1.576\ 3)$
- $p_{2,1} = (-1.2, -0.48, 1.661\ 7)$
- $p_{2,2} = (-1.22, 1.464, 1.674\ 3)$
- $p_{2,3} = (-1.23, 3.444, 1.678\ 1)$
- $p_{2,4} = (-1.24, 5.456, 1.653\ 8)$
- $p_{3,1} = (0, -0.5, 1.704\ 1)$
- $p_{3,2} = (0, 1.476, 1.718\ 6)$
- $p_{3,3} = (0, 3.388, 1.758\ 9)$
- $p_{3,4} = (0, 5.412, 1.696\ 2)$
- $p_{4,1} = (1.22, -0.488, 1.653\ 9)$
- $p_{4,2} = (1.15, 1.38, 1.757\ 1)$
- $p_{4,3} = (1.23, 3.444, 2.186\ 8)$
- $p_{4,4} = (1.24, 5.456, 1.946\ 9)$

曲面 S_3 的变形区域是: $\Omega = \{(u, v) \mid -3 \leq u \leq 2, -2 \leq v \leq 6\}$, 曲面上选取的辅助点的向量形式如下:

$$\mathbf{r}_{1,1} = (-2, -0.4, 1.4120)$$

$$\mathbf{r}_{1,2} = (-2, 1.2, 1.3906)$$

$$\mathbf{r}_{1,3} = (-2, 2.8, 1.37)$$

$$\mathbf{r}_{1,4} = (-2, 4.4, 1.3473)$$

$$\mathbf{r}_{2,1} = (-1, -0.4, 1.3847)$$

$$\mathbf{r}_{2,2} = (-1, 1.2, 1.3724)$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = (-1, 2.8, 1.3643)$$

$$\mathbf{r}_{2,4} = (-1, 4.4, 1.3337)$$

$$\mathbf{r}_{3,1} = (0, -0.4, 1.3633)$$

$$\mathbf{r}_{3,2} = (0, 1.2, 1.3972)$$

$$\mathbf{r}_{3,3} = (0, 2.8, 1.4536)$$

$$\mathbf{r}_{3,4} = (0, 4.4, 1.3791)$$

$$\mathbf{r}_{4,1} = (1, -0.4, 1.3556)$$

$$\mathbf{r}_{4,2} = (1, 1.2, 1.5279)$$

$$\mathbf{r}_{4,3} = (1, 2.8, 1.7779)$$

$$\mathbf{r}_{4,4} = (1, 4.4, 1.57)$$

变形后的曲面 S_3 通过的插值点的向量形式如下:

$$\mathbf{p}_{1,1} = (-2.44, -0.488, 1.7227)$$

$$\mathbf{p}_{1,2} = (-2.42, 1.452, 1.6827)$$

$$\mathbf{p}_{1,3} = (-2.44, 3.416, 1.6714)$$

$$\mathbf{p}_{1,4} = (-2.34, 5.148, 1.5763)$$

$$\mathbf{p}_{2,1} = (-1.2, -0.48, 1.6617)$$

$$\mathbf{p}_{2,2} = (-1.22, 1.464, 1.6743)$$

$$\mathbf{p}_{2,3} = (-1.23, 3.444, 1.6781)$$

$$\mathbf{p}_{2,4} = (-1.24, 5.456, 1.6538)$$

$$\mathbf{p}_{3,1} = (0, -0.5, 1.7041)$$

$$\mathbf{p}_{3,2} = (0, 1.476, 1.7186)$$

$$\mathbf{p}_{3,3} = (0, 3.388, 1.7589)$$

$$\mathbf{p}_{3,4} = (0, 5.412, 1.6962)$$

$$\mathbf{p}_{4,1} = (1.22, -0.488, 1.6539)$$

$$\mathbf{p}_{4,2} = (1.15, 1.38, 1.7571)$$

$$\mathbf{p}_{4,3} = (1.23, 3.444, 2.1868)$$

$$\mathbf{p}_{4,4} = (1.24, 5.456, 1.9469)$$

4 结 论

本文提出了一种对参数曲面进行插值变形的方 法,为了使曲面的待变形部分在变形后通过给定的 点,首先,应在待变形曲面上通过选取一些辅助点, 并结合插值点来得到变形的主方向,然后基于这些 点对应的参数值构造一个具有局部支撑性、二阶光 滑性的基函数,用变形主方向矢量和此基函数的张 量积来构造伸缩矢量函数,最后基于空间矢量叠加 原理来实现参数曲面的变形,结果表明,不但使变形 后的曲面能通过给定的点,而且能够精确控制变形 区域,以保证非变形区域不受干扰,并能较好地保证 变形区域与非变形区域实现 C^2 光滑连接。

致 谢 本文得到西北工业大学叶正麟老师的 悉心指导,在此表示衷心的感谢!

参考文献 (References)

- 1 Barr A H. Global & local doformations of solid primitives[J]. Computer Graphics, 1984, **18**(3):21-30.
- 2 Ugur GÜDÜKBAY, Bülent UZGÜ. Free-form solid modeling using deformation[J]. Computer & Graphics, 1990, **14**(4):491-500.
- 3 Sederberg T W, Parry R. Free-form deformation of solid geometric models[J]. Computer Graphics, 1986, **20**(4):151-160.
- 4 Coquillart S. Extension free-form deformation: A sculpting tool for 3D geometric modeling [J]. Computer Graphics, 1990, **24**(4): 187-196.
- 5 Lazarus F, Coquillart S, Jancene P. An intuitive technique [J]. Computer Aided Design, 1994, **26**(8):607-613.
- 6 Feng J Q, Ma L Z, Peng Q S. New free-form deformation through the control of parametric surfaces [J]. Computer & Graphics, 1996, **20**(4):531-539.