

基于 PM 模型的曲面去噪变分水平集方法

崔丽娜 潘振宽 魏伟波 石洁 耿秀秀

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

摘要 PM (peronamalik)模型是一种经典的非线性图像扩散模型,该模型能根据设定的阈值对图像光滑区域进行扩散,并能自适应地保持图像边缘。本文将曲面法向量与一般灰度图像的强度进行类比,将经典的图像扩散的 PM 模型转化为曲面几何噪声处理的自适应扩散变分模型,在使曲面光滑的同时,能够保持曲面边缘。曲面采用隐函数的零水平集表达,能量泛函中的数据项用初始水平集函数的 Heaviside 函数与演化后水平集函数的 Heaviside 函数差的平方表达,能量泛函中的光滑项基于几何曲率定义。此外,在能量泛函中增加了水平集函数为符号距离函数的惩罚项,避免了水平集函数需要不断重新初始化的问题。数值实验验证了所提出模型的曲面噪声去除及曲面边缘保持效果。

关键词 曲面扩散 PM 模型 曲面去噪 边缘保持

中图法分类号: TP391.41 **文献标志码:** A **文章编号:** 1006-8961(2010)03-361-06

A Variational Level Set Method for Surface Denoising Based on PM Model

CUILINA PAN Zhenkuan WEI W eib o SHI Jie GENG X iux iu

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract PM (peronamalik) is a classical nonlinear image diffusion model with adaptive properties of image smoothing and edge preserving. It is transformed to geometric surface smoothing edge preserving variational model using variational level set method based on the analogue of normal vector of surface and general image intensity in this paper. The energy functional includes three parts. The first part is a data term using the square of the difference between the Heaviside function of initial level set function and the one of the evolved level set function. The second part is a regularizing term based on geometric curvature and the third part is a penalty term enforcing the level set function to satisfy the property of signed distance functions. Numerical examples validate its abilities of surface smoothing and edge preserving.

Keywords surface diffusion, PM model, surface denoising, edges preservation.

0 引 言

3维几何曲面重建的基础数据包括计算机断层图像^[1]、多视角图像^[2-3]、点云^[4-5]等,由于基础数据的噪声等因素,重建后的曲面亦难免带有噪声,表现为曲面表面凹凸不平或存在不连续面片,致使曲面几何处理(曲面光顺等)成为计算机图形学、计算机

视觉研究必须面对的问题。

近年来,基于几何偏微分方程的曲面处理方法^[6-7]在几何建模与处理方面取得了很大成功,该类方法主要包括参数化模型方法和隐式模型方法。前者通常在离散的三角形或多边形网格曲面上求解偏微分方程,并涉及梯度及拉普拉斯算子等微分算子的复杂计算,且当演化曲面拓扑结构发生变化时,必须进行相应的处理并进行重新参数化。而以水平

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0601)

收稿日期: 2008-11-03 **改回日期:** 2009-02-05

第一作者简介: 崔丽娜(1983—),女,2009年6月于青岛大学获计算机应用技术专业硕士学位。主要研究方向为图像处理、虚拟现实技术。E-mail polarisch@163.com

集方法^[8]为代表的动态隐式方法,将动态演化曲面嵌套于定义在固定的卡氏网格中的高维函数-水平集函数中,从而可将一般曲面演化转化为水平集函数零等值面的演化,其演化方程可采用简单的差分格式进行离散,并能自动处理曲面拓扑结构的变化。Xu等人不仅采用参数化模型系统研究了多种曲面处理的几何偏微分方程,还采用水平集方法构建了基于曲面的 L^2 梯度流、 H^{-1} 梯度流、 H^{-2} 梯度流,并实例化为平均梯度流、Wilmore流、极小平均曲率变差流、曲面扩散流、Xuguo流等^[9]。

变分水平集方法已经广泛地应用到曲面处理的研究当中,该方法用水平集隐式地表达曲面,能够有效地处理复杂的拓扑结构变化或任意形状的曲面。变分水平集方法首先要建立能量模型,而后对能量模型求极小值得到偏微分方程(PDE),最后根据PDE更新演化曲面。曲面去噪模型大都是依据曲面曲率信息构建能量函数,利用总曲率的高阶项建立曲面均匀扩散模型^[7],构建二阶曲面扩散能量模型。该模型能够有效地去除曲面噪声却不能保持曲面边缘和曲面部分特征。文献[10]以经典的图像扩散的TV(total variation)模型为基础,建立了边缘保持的曲面几何扩散的变分水平集方法。本文将均匀扩散曲面去噪模型和PM(peronamalik)模型^[11]相结合,提出基于PM模型的曲面去噪模型。运用此模型既可去除曲面噪声又能够自适应地保持曲面边缘。

1 均匀扩散曲面去噪模型

曲面噪声去除的理论基础之一是最小化曲面所包含区域^[7],依据曲面平均曲率或主曲率的高阶项建立能量模型。而利用平均曲率(mean curvature)构建的能量模型使去噪后的曲面与原始曲面相比,曲面所围空间体积明显减小^[7]。曲面均匀扩散模型利用主曲率的高阶项建立能量模型,由曲面总曲率构建二阶能量模型

$$E = \int_S (k_1^2 + k_2^2) dS \quad (1)$$

式中, S 为曲面。最小化该能量模型,可使得曲面演化趋势为球状。式(1)中总曲率 $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ 可描述曲面的几何特征。

用水平集函数 ϕ 隐式表达曲面,整个空间被水平集 ϕ 分为两个部分:水平集内部满足 $\phi > 0$ 水平

集外部满足 $\phi < 0$ 满足 $\phi = 0$ 的点的集合 S 表达为

$$S = \{x(t) \mid \phi(x(t), t) = 0\} \quad (2)$$

这里,通常用符号距离函数表示水平集函数。由式(2)得曲面随时间 t 的演化方程为

$$\partial\phi/\partial t = -\nabla\phi \cdot \partial x/\partial t \quad (3)$$

式中,变量 $\nabla\phi$ 为水平集 ϕ 的梯度。由于 $\nabla\phi$ 沿着曲面法矢量方向,即 $\partial x/\partial t$ 只在曲面法矢量方向起作用,所以式(3)可以等效于

$$\partial\phi/\partial t = -\nabla\phi \cdot HN = -\|\nabla\phi\|H \quad (4)$$

式中, H 为曲面曲率, N 为曲面法矢量。能量模型在曲面上的积分等价于在曲面所包含空间内的积分,式(1)可写为

$$E = \int_U (k_1^2 + k_2^2) \|\nabla\phi\| dx \quad (5)$$

式中, U 是水平集 ϕ 所包含的空间区域。采用该模型能够去除曲面噪声但不能保持曲面边缘。

2 基于PM模型的曲面去噪方法

2.1 能量模型

将PM模型结合到曲面扩散模型中,提出了基于PM模型的曲面去噪模型,克服了曲面扩散模型的缺点,能够很好地保持曲面边界和特征。

$$E = \lambda \int_{\Omega} (H(\phi) - H(\varphi))^2 dx + \int_{\Omega} \psi(|k|) dx + \frac{1}{2} \mu (|\nabla\phi| - 1)^2 \quad (6)$$

式中, λ 、 μ 均为惩罚参数, φ 为要扩散的曲面水平集函数, ϕ 为演化曲面水平集函数,曲面曲率为 $k = \nabla \cdot \left| \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \right|$, H 函数为Heaviside函数, ψ 是曲率绝对值 $|k|$ 的函数。 $\lambda \int_{\Omega} (H(\phi) - H(\varphi))^2 dx$ 为数据项表示动态演化曲面与原始曲面的逼近程度; $\int_{\Omega} \psi(|k|) dx$ 为光滑项,表示曲面扩散程度; $\frac{1}{2} \mu (|\nabla\phi| - 1)^2 dx$ 为水平集函数为符号距离函数的惩罚项,此项可使得曲面 ϕ 始终保持水平集函数特性。

对PM模型,一般取

$$\psi(|k|) = \log \left[1 + \frac{|k|^2}{2\alpha^2} \right],$$

$$\psi'(|k|) = \frac{2k}{1 + \frac{|k|^2}{2\alpha^2}} = \frac{k}{2\alpha^2 + |k|^2}$$

或者

$$\phi(|k|) = \alpha^2 \left| 1 - e^{-\frac{|k|^2}{\alpha^2}} \right|, \phi'(|k|) = 2k e^{-\frac{|k|^2}{\alpha^2}}$$

其中, α 为控制参数。对于前者 ϕ 函数而言, α 取值越大曲面边缘保持程度越强, α 取值越小, 所得曲面边缘保持程度越弱, 对后者 ϕ 函数则相反。本文实验结果均取 ϕ 函数为前者。

2.2 演化方程及其差分格式

对能量模型求极小值可得曲面演化的演化方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = & \delta(\phi) \left| \nabla \cdot \left| \phi \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| - 2\lambda [H(\phi) - H(\varphi)] - \right. \\ & \left. \nabla \cdot \left| \frac{1}{|\nabla \phi|} \left[I - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} \right] \nabla (\phi' |\nabla \phi|) \right| \right| + \\ & \left| \Delta \phi - \nabla \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| \end{aligned} \quad (7)$$

式中, Δ 为拉普拉斯算子。 δ 为 Dirac 函数, 为计算方便有效, 在此后的计算过程中将 $\delta(\phi)$ 更换为 $|\nabla \phi|$ 。由此, 式 (7) 可写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = & |\nabla \phi| \left| \nabla \cdot \left| \phi \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| - 2\lambda [H(\phi) - H(\varphi)] - \right. \\ & \left. \nabla \cdot \left| \frac{1}{|\nabla \phi|} \left[I - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} \right] \nabla (\phi' |\nabla \phi|) \right| \right| + \\ & \left| \Delta \phi - \nabla \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| \end{aligned} \quad (8)$$

式 (8) 简写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = & |\nabla \phi| \left| \nabla \cdot \left| \phi \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| - \right. \\ & \left. \left| \frac{1}{|\nabla \phi|} \left[I - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} \right] \nabla (\phi' |\nabla \phi|) \right| \right| \\ & - |\nabla \phi| [2\lambda H(\phi) - H(\varphi)] + \\ & \left| \Delta \phi - \nabla \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right| = e_1 - e_2 + e_3 \end{aligned} \quad (9)$$

式中, e_1 为光滑项, e_2 为数据项, e_3 为惩罚项。

首先令

$$\bar{V} = \nabla \cdot \left| \phi \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} - \left| \frac{1}{|\nabla \phi|} \left[I - \frac{\nabla \phi \cdot \nabla \phi}{|\nabla \phi|^2} \right] \nabla (\phi' |\nabla \phi|) \right| \right|$$

则光滑项 $e_1 = |\nabla \phi| |\bar{V}|$ 用中心差分计算:

$$\begin{aligned} |\nabla \phi| = & \left| \left| \frac{\phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i-1, j, k)}}{2} \right|^2 + \right. \\ & \left. \left| \frac{\phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i, j-1, k)}}{2} \right|^2 + \right. \\ & \left. \left| \frac{\phi_{(i, j, k+1)} - \phi_{(i, j, k-1)}}{2} \right|^2 \right|^{1/2} \end{aligned} \quad (10)$$

\bar{V} 离散为达到差分平衡, 需计算半点处的各项差分 (只列出 $\left| i + \frac{1}{2}, j, k \right|$ 处的各项差分公式):

$$h_{\left| i + \frac{1}{2}, j, k \right|} = \frac{(k_{(i, j, k)} + k_{(i+1, j, k)})}{2} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi = & \left[\begin{array}{c} \frac{\phi_{(i+1, j, k)} - \phi_{(i, j, k)}}{2} \\ \left| \frac{\phi_{(i, j+1, k)} - \phi_{(i, j-1, k)}}{2} + \frac{\phi_{(i+1, j+1, k)} - \phi_{(i+1, j-1, k)}}{2} \right| \\ \frac{\phi_{(i, j, k+1)} - \phi_{(i, j, k-1)}}{2} + \frac{\phi_{(i+1, j, k+1)} - \phi_{(i+1, j, k-1)}}{2} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_z \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

$$|\nabla \phi| = \sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2} \quad (13)$$

令 $A = \phi' |\nabla \phi|$, 则其差分格式与式 (12) 类似。

再者令 $F(\phi) = H(\phi) - H(\varphi)$, 则数据项 $e_2 = 2\lambda |\nabla \phi| F(\phi)$, 则有数据项离散差分公式为

$$e_2 = 2\lambda [\max(F(\phi_{(i, j, k)}, 0) \nabla^+ + \min(F(\phi_{(i, j, k)}, 0) \nabla^-)] \quad (14)$$

其中, ∇^+ 为向前差分, ∇^- 为向后差分。

$$\begin{aligned} \nabla^+ = & (\max(D_{i, j, k}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{+x}, 0)^2 + \\ & \max(D_{i, j, k}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{+y}, 0)^2 + \\ & \max(D_{i, j, k}^{-z}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{+z}, 0)^2)^{1/2} \\ \nabla^- = & (\max(D_{i, j, k}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{-x}, 0)^2 + \\ & \max(D_{i, j, k}^{+y}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{-y}, 0)^2 + \\ & \max(D_{i, j, k}^{+z}, 0)^2 + \min(D_{i, j, k}^{-z}, 0)^2)^{1/2} \end{aligned}$$

式 (14) 的差分方式为迎风差分。

最后惩罚项 e_3 中,

$$\begin{aligned} \Delta \phi = & \phi_{(i+1, j, k)} + \phi_{(i-1, j, k)} + \phi_{(i, j+1, k)} + \phi_{(i, j-1, k)} + \\ & \phi_{(i, j, k+1)} + \phi_{(i, j, k-1)} - 6\phi_{(i, j, k)} \end{aligned} \quad (15)$$

3 结果及分析

本文的实验是在 PC 机 (Intel(R), CPU 2.33GHz 内存 2.00GB) 上实现的, 实验工具为 Matlab7.0。实验模型中所采用的数据项参数 $\lambda = 0.8$ 水平集惩罚项参数为 $\mu = 0.04$ 。差分格式选取 $\Delta t = 0.005$ $\Delta h = 1$, 迭代次数为 100 次。

3.1 两种模型的去噪效果比较

实验 1 的原始模型是基于切片重建后的立方体, 大小为 $106 \times 117 \times 70$ 如图 1(a) 所示。分别使用均匀扩散模型和本文所提模型 ($\alpha = 1$) 进行去噪, 实验结果分别如图 1(b) 和图 1(c) 所示。

由实验可以看出, 采用均匀扩散去噪模型, 能较较好地去除立方体表面的噪声, 但是立方体的边缘同

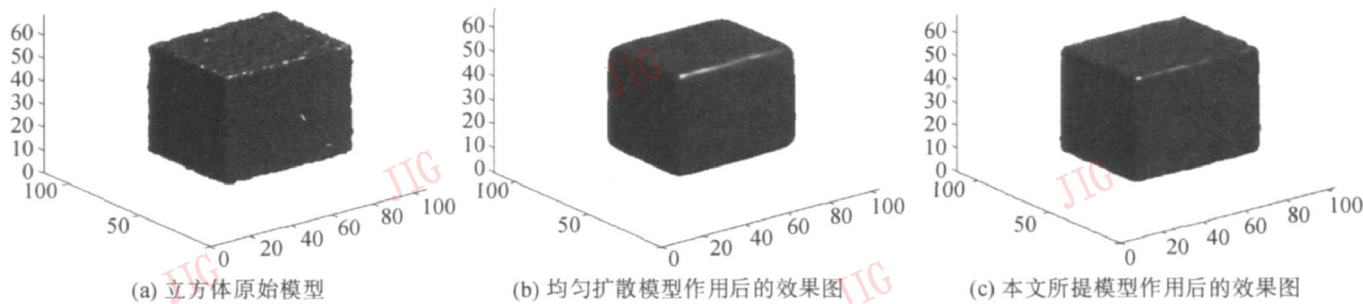


图 1 立方体原始模型和两种模型的去噪效果图

Fig. 1 Initial cube and comparison of two models in surface denoising

时也被模糊了;而采用本文模型,不仅能较好地去除立方体的表面噪声,还可以较好地保持其边缘特征。

3.2 不同参数下的本文模型的去噪效果比较

实验 2 的原始模型是基于切片重建后的积木模

型,大小为 $99 \times 99 \times 100$ 如图 2(a)所示。图 2(b)~图 2(d)分别为采用本文模型在 α 取 0.3, 2, 20 时的去噪效果。

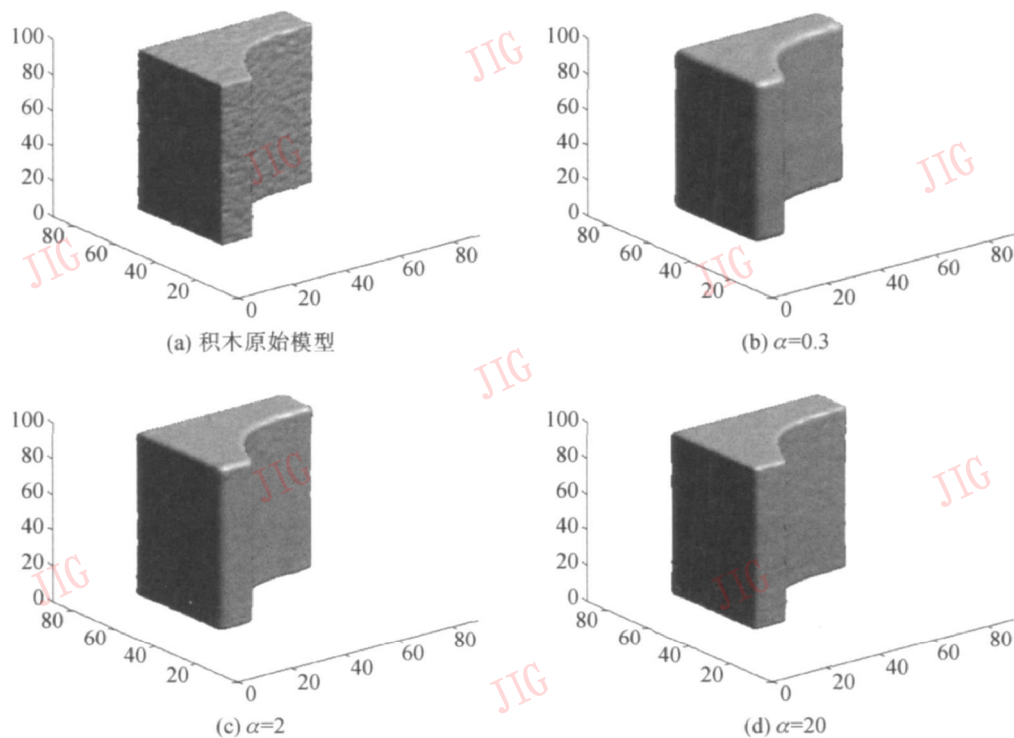


图 2 积木原始模型与去噪效果图

Fig. 2 Initial block and results of denoising

通过上述实验结果可以看出,取 $\alpha = 0.3$ 时,积木表面噪声可较好地去除,但是边缘模糊程度较强;取 $\alpha = 2$ 时,积木表面噪声可较好地去除,边缘特征也相对保持;取 $\alpha = 20$ 时,积木表面噪声可去除,边缘特征保持较好,但是噪声去除效果较第二种情况要弱。

实验 3 的原始模型是基于切片重建后的人体下颌骨模型,大小为 $111 \times 111 \times 99$ 如图 3(a)所示。图 3(b)~(e)分别为采用本文模型在 α 取 0.1, 0.5, 0.7, 1 时的去噪效果。

由上述实验结果可以看出,随着 α 取值增大,曲面噪声去除时边缘特征的保持性越来越强,但当 α 值增加到 1 时,曲面的噪声信息会被当做特征信息相对保持。通过比较可知,当 $\alpha = 0.7$ 时曲面去噪的效果最好。

4 结论

首先介绍了均匀扩散去噪模型,在分析其特点的

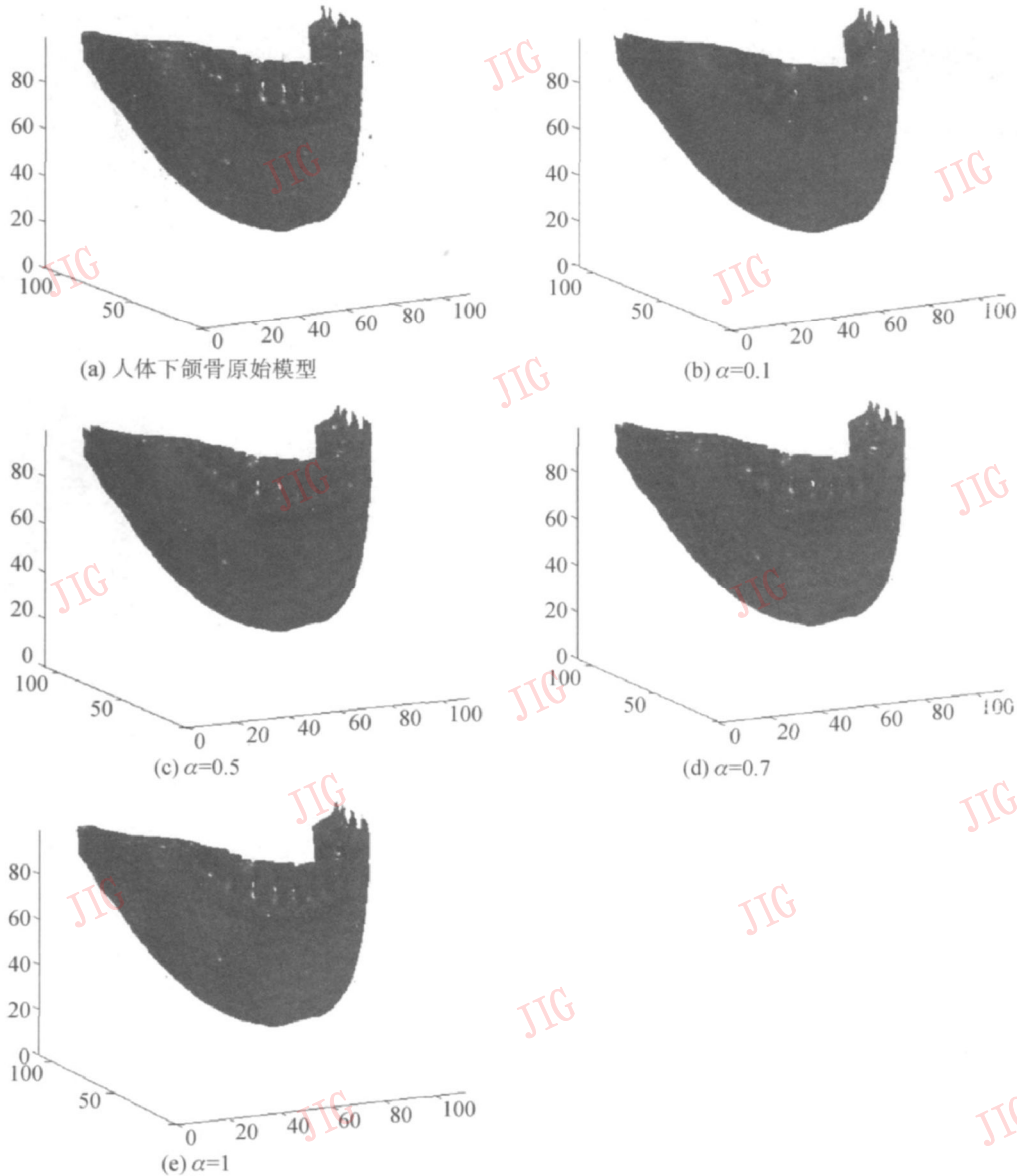


图 3 人体下颌骨原始模型与去噪效果图

Fig. 3 Initial human mandible and results of denoising

基础上, 结合 PM 模型, 提出了基于 PM 的曲面去噪模型。实验表明, 采用该模型可以在去除曲面噪声的同时较好地保持曲面边缘特征, 克服了均匀扩散去噪模型去噪时不能保持曲面边缘特征的缺点。

参考文献 (References)

- [1] Yang Jing, Duncan J S. 3D image segmentation of deformable objects with shape-appearance joint prior models [J]. Lecture Notes in Computer Science, 2003, 2878: 573-580.
- [2] Zhao H K, Osher S, Merriman B. Implicit and non-parametric shape reconstruction from unorganized points using variational level set method [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2000, 80 (3): 295-319.
- [3] Xu Guoliang, Zhang Qin, Liu Dan. Smooth surface reconstruction from noisy scattered data-variational level set methods [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19 (7): 840-848. [徐国良, 张琴, 刘丹. 带噪声散乱数据的光滑曲面重构-变分水平集方法 [J]. 计算机辅助设计与图形学报, 2007, 19(7): 840-848.]
- [4] Faugeras O, Keriven R. Variational principles, surface evolution, PDEs, level set methods and the stereo problem [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 336-344.
- [5] Jin H L, Cremers D, Wang D, et al. 3-D reconstruction of shaded objects from multiple images under unknown illumination [J]. International Journal of Computer Vision, 2008, 76(3): 245-256.
- [6] Polden A. Compact Surfaces of Least Total Curvature [D]. Germany University of Tübingen, 1997.
- [7] Tasdizen T, Whitaker R, Burchard P, et al. Geometric surface

- smoothing via an isotropic diffusion of normals [C] //Proceedings of IEEE Visualization. Boston, MA, USA: IEEE Computer Society 2002 125-132.
- [8] Osher S, Fedkiw R. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces[M]. New York, NY, USA: Springer Press 2002.
- [9] Xu Guoliang, Zhang Q in. A general framework for surface modeling using geometric partial differential equations [J]. Computer Aided Geometric Design, 2008, 25(3): 181-202.
- [10] Elsey M, Esedoglu S. Analogue of the Total Variation Denoising Model in the Context of Geometry Processing CAM-Report 07-31 [R]. Berkeley USA: University of California 2007.
- [11] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using an isotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 1990, 12(7): 629-639.
- [12] Whitaker R T. A levelset approach to 3D reconstruction from range data [J]. International Journal of Computer Vision, 1998, 29(3): 203-231.
- [13] Clarenz U, Dieckald U, Rumpf M. Anisotropic geometric diffusion in surface processing [C] //Proceedings of IEEE Visualization. Washington DC, USA: IEEE Computer Society 2000 397-405.