

分数傅里叶全息图的算法研究及显示

曹玉茹¹⁾ 韦穗²⁾

¹⁾(上海对外贸易学院教育技术部,上海 201620) ²⁾(智能计算与信号处理教育部重点实验室,安徽大学,合肥 230039)

摘要 为了快速获取更好的全息图显示效果,在研究了分数傅里叶变换与非涅耳衍射光场的紧密联系的基础上,首先给出了一种分数傅里叶变换的快速数值算法,并将分数傅里叶变换应用到计算全息图中提出了一种用于计算全息图的分数傅里叶变换方法;然后分析了用这种记录全息的方法得到的全息图优越于传统的傅里叶变换获得的全息图,同时给出了计算机的模拟实验结果;最后利用拆卸的投影装置搭建出了以空间光调制器——DMD(数字微镜装置)为核心的全息显示光学系统,并在该系统下获得了用分数傅里叶变换计算得到的全息图的全息显示结果。

关键词 全息显示 分数傅里叶变换 数字微反射镜器件

中图法分类号:TP391.41 文献标识码:A 文章编号:1006-8961(2009)08-1569-09

Computing Method and System Implement on Fractional Fourier Holograms

CAO Yu-ru¹⁾, WEI Sui²⁾

¹⁾(The Department of Education Technique, Shanghai Institute of Foreign Trade, Shanghai 201620)

²⁾(The Key Laboratory of Intelligent Computing and Signal Processing, Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039)

Abstract The relation of Fresnel diffraction and fractional Fourier transform are analyzed, a fast simulated algorithm of fractional Fourier transform based on FFT is proposed. By making use of fractional Fourier transform as the center tool, the new computing methods of holograms are obtained and the computer simulation holographic generation and digital reconstruction are realized. By introducing the spatial light modulators DMD, a holography imaging system to complement the holography display is set up.

Keywords holography display, fractional Fourier transform, digital micromirror device (DMD)

1 引言

分数傅里叶变换(FRT)是一个较新的概念。Pierre 最先把菲涅耳衍射与分数傅里叶变换联系起来,并利用波前相因子判别法给出了二者在物理过程和光场分布状态上的等效性^[1]。随后研究者们发现,分数傅里叶变换对分数阶变化的连续性对应着光的传播由原始光场经过菲涅耳衍射区一直到无

穷远处夫琅和费衍射区的全过程^[2-3],因此,用分数傅里叶变换来描述衍射的全过程是很理想的。

由于菲涅耳衍射积分可以看作是输入复振幅分布与二次位相因子乘积的傅里叶变换,因此在合适的采样条件下,可以用快速傅里叶变换来对衍射进行数值计算。但是文献[4]证明了在整个菲涅耳衍射光场中,通过统一的采样频率来离散衍射积分是不成立的,用上面的方法直接估算菲涅耳衍射积分只适用于菲涅耳中、远场的条纹强度计算^[5],而当

基金项目:国家自然科学基金项目(60473120);上海高校优青专项基金项目(06SYQ15)

收稿日期:2007-06-18;改回日期:2008-05-28

第一作者简介:曹玉茹(1978~),女,副教授。2000年获安徽大学计算机应用技术专业博士学位。研究方向为全息显示的算法及实现。

E-mail: caoyuru2003@yahoo.com.cn

衍射距离较小时,则由于二次相位因子的震动非常剧烈,因此仍用远场时的采样频率就会导致估计不准确。为了不增加计算复杂度,此时可以利用角谱^[5]的方法来计算,这样就导致了整个衍射光场的计算方法不统一,而分数傅里叶变换的数值计算则解决了这个问题。关于分数傅里叶变换的数值计算已有广泛的研究^[5-7],本文在这样的研究背景下,针对光波衍射的实际情况,提出了一种基于快速傅里叶变换的分数傅里叶变换数值计算方法,而分数傅里叶变换全息图^[8]则是在分数傅里叶变换域上用全息的方法记录下的物光波的分数傅里叶变换分布。这种全息图的记录和再现方式的数字式实现是目前全息术发展的一个重要方向。

由于数字微反射镜器件(DMD)作为一种可编程控制的信息输入和实时显示器件,无论是输入函数和全息图函数,还是再现像函数,都可以通过DMD对读出激光束的空间进行调制来实时地显示出来,因此可以将DMD器件看作是一种可以进行逐像素独立编程控制的透明片,DMD的应用改变了通过计算机控制的绘图仪和照相缩放来制作计算全息图(CGH)的传统方法。

目前这方面的研究也有很多,例如南开大学现代光学研究所和中国科学院广州电子研究所都研制出了基于DMD的体视全息显示系统。在此研究的基础上,通过利用拆卸的投影装置搭建出了以空间光调制器——DMD为核心的全息显示光学系统,并获得了分数傅里叶变换计算的全息图在该系统下的全息显示效果,同时用计算机模拟了全息图和数字再现的结果。

2 分数傅里叶全息图的数值算法与计算机模拟

2.1 分数傅里叶变换的快速数值算法

在叙述分数傅里叶全息图的数值算法之前,首先给出了分数傅里叶变换的定义。为叙述简单起见,本文以1维为例进行讨论,设输入信号为 $f(x)$,则其 p 阶分数傅里叶变换定义为^[9]

$$f_p(x_p) = C_p \times \exp\left(j\pi \frac{x_p^2}{\tan\varphi}\right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \times \exp\left(-j\pi \frac{x^2}{\tan\varphi}\right) \times \exp\left(-2j\pi \frac{xx_p}{\sin\varphi}\right) dx \quad (1)$$

其中常数

$$C_p = \frac{\exp\{-j[\pi \operatorname{sgn}(\sin\varphi)/4 - \varphi/2]\}}{\sqrt{|\sin\varphi|}}$$

$p(0 < |p| < 2)$ 为分数阶, $\varphi = p \cdot \frac{\pi}{2}$ 。特别当 $p = 0$ 和1时,其光场的分布分别与原信号和原信号的傅里叶变换的频谱面重合,即傅里叶变换是分数傅里叶变换的一个特例。

对应于这种纯数学的描述,Lohnman提出了用任意分数级次傅里叶变换光学实现的单透镜模式和双透镜模式^[3],进而把分数傅里叶变换理解为透镜的相位转换与菲涅耳衍射的组合。实际上由于II型结构只有一次菲涅耳衍射,因此应用更广泛。

当透镜焦距 f 和衍射距离 z 满足下面的条件,即 $f = f_1 \cdot \tan(\varphi/2)$; $z = f_1 \cdot \sin(\varphi)$ 时,图1中的记录装置将等价于完成 p 阶分数傅里叶变换,其中 $\varphi = p \cdot \frac{\pi}{2}$, f_1 为变换系统的标准焦距(一个任意的固定长度)。

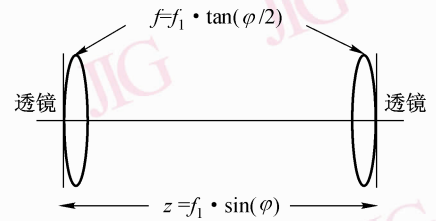


图1 分数傅里叶变换实现装置(罗曼II型)

Fig. 1 Optical setup for performing a fractional Fourier transform

根据Lohnman II型装置,即可在输出面得到 p 阶分数傅里叶变换的另外一种表示形式:

$$f_p(x_p) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_0) \times \exp\left(-j\pi \frac{x_0^2}{\lambda f}\right) \times \exp\left(j\pi \frac{x_0^2 + x_p^2 - 2x_0x_p}{\lambda z}\right) \times \exp\left(-j\pi \frac{x_p^2}{\lambda f}\right) dx_0 \quad (2)$$

在实际的计算中,如果直接通过快速傅里叶变换来计算上式,那么仍然会出现引言中提到的因衍射距离不同而造成算法不统一的问题,为此本文提出了一种新的数值计算方法。

在上面的两种等价表达式中,笔者注意到 $z = f_1 \cdot \sin(\varphi)$,当衍射距离 z 较小时,就可以通过菲涅耳衍射近距离数值算法(也就是本节开始提出的角谱方法)来计算衍射部分。于是整个分数傅里叶变

换的计算可以分为以下几个步骤:

- (1) 第 1 个透镜的相位变换作用;
- (2) 自由空间的菲涅耳衍射(角谱的方法);
- (3) 第 2 个透镜的相位变换作用。

通过离散化处理得到的算法框图如图 2 所示。

图 2 中, m, \hat{m}, \hat{m} , 分别表示物平面、傅里叶平面和分数傅里叶平面的离散序号, N 为采样数。

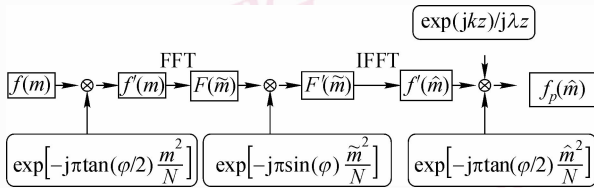


图 2 分数傅里叶快速算法框图

Fig. 2 Algorithm diagram for fractional Fourier transform

$$\Delta x \cdot \Delta x_p = \lambda f_1 N \quad (3)$$

根据图 2 中提出的算法原理可知,在这种新算法中,物平面和分数傅里叶平面的采样间距 Δx 和 Δx_p 是相等的,且满足

$$\Delta x = \Delta x_p = \sqrt{\lambda f_1 / N} \quad (4)$$

另外,在推导中笔者发现,这种新算法的计算结果相比较于原来的定义(式(2))的计算结果在相差一个常相位因子的情况下才能等价,但这并不影响实验结果。由于这种双透镜成像模式的引入,从而避免了无透镜模式推导中分数傅里叶变换出现的缩放问题。

借助于这种分数傅里叶变换的快速算法,就可以对整个菲涅耳衍射场进行数值描述,具体流程如图 3 所示。

虽然本文中算法以 1 维为例,但结果很容易扩展到 2 维可分离变量情况。而且在 2 维情况下,相比于直接计算,这种新算法的计算复杂度由 $O(N^3)$ 下降为 $O(N^2 \log N)$ 。由于分数傅里叶变换可通过分数阶的连续变换来一致地描述整个菲涅耳衍射光场,从而为菲涅耳光场的数值计算找到了统一的方法。

2.2 分数傅里叶变换全息图的产生及其计算机模拟重现

分数傅里叶变换全息图是物体的任意分数阶傅里叶频谱与平面参考光波在其公共区域内进行相位比较的结果,由于在分数傅里叶变换域上用全息的方法可记录下物光波的分数傅里叶变换分布,因此分数傅里叶全息图是目前全息术发展的又一个重要

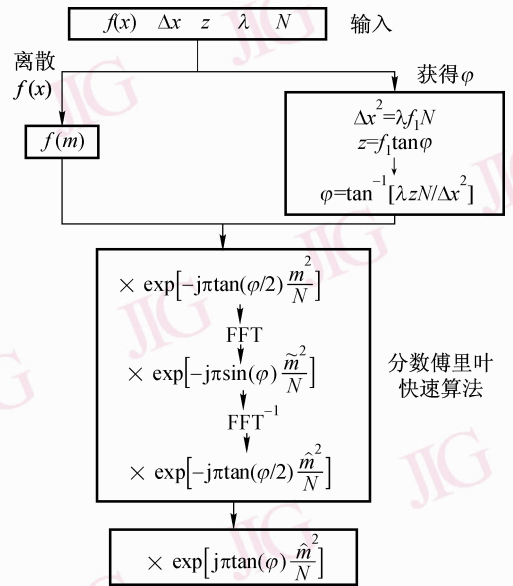


图 3 分数傅里叶快速算法计算菲涅耳衍射流程图

Fig. 3 Flow chart for calculating Fresnel diffraction

方向。

本节将通过记录空间不同位置物体的对应阶分数傅里叶变换全息图来得到物体的分数傅里叶变换全息图,并用计算机来模拟全息图和再现的结果。基于前面提出的分数傅里叶变换快速算法,本文采取双透镜装置来记录分数傅里叶变换全息图。图 4 给出了分数傅里叶变换全息图的记录和重现光路。

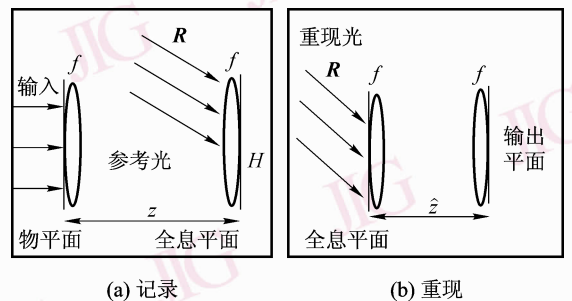


图 4 分数傅里叶全息图记录和重现示意图

Fig. 4 Sketch map for FRT hologram recording and reconstruction

假设物平面的函数是初始相位为零的平面强度图像 $f(x_0, y_0)$, 则可以用上面提出的快速算法来计算物光波经过 p 阶分数傅里叶变换后在全息面上的分布 $f_p(x_p, y_p)$, 其中分数阶 p 决定了 z 的长度; 参考光波 R 是由方向角为 θ 的单位振幅的平行光经透镜的相位转换后到达全息面上记录的总光强分布

$$\begin{aligned}
 I(x_p, y_p) &= |f_p(x_p, y_p) + \mathbf{R}|^2 \\
 &= |f_p(x_p, y_p)|^2 + \\
 &\quad |\mathbf{R}|^2 + f_p^*(x_p, y_p) \times \\
 &\quad \mathbf{R} + f_p(x_p, y_p) \times \mathbf{R}^* \quad (5)
 \end{aligned}$$

上式的前两项分别表示原始物光波和参考光波在分数傅里叶变换域上的功率谱(零级衍射像),第3项包含物光波的共轭信息,第4项包含完整的物光波信息。

由文献[10]的分析可知,通过拉普拉斯变换就基本消除了零级衍射像,而且对原像和共轭像的影响很小,即

$$\tilde{I}(x_p, y_p) \approx f_p^*(x_p, y_p) \times \mathbf{R} + f_p(x_p, y_p) \times \mathbf{R}^* \quad (6)$$

然后即可将经过变换后的全息图置于重现装置的输入面,并用原参考光照射全息图来得到再现光场,即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R} \times [f_p^*(x_p, y_p) \times \mathbf{R} + f_p(x_p, y_p) \times \mathbf{R}^*] \\
 = f_p^* \times \mathbf{R}^2 + f_p \times |\mathbf{R}|^2 \quad (7)
 \end{aligned}$$

最后将再现光场进行与原变换 p 阶相匹配的 p_1 阶分数傅里叶变换,其中 p_1 阶对应衍射距离 \hat{z} 。

根据分数傅里叶变换的周期性,当 p_1 满足 $p + p_1 = 4$ 时,则在输出面上将可获得与原物等大且正立的像。

其实对于这种双透镜模式记录的全息图,也可以直接通过菲涅耳衍射来再现,即先用参考光直接照射分数傅里叶全息图来再现出物体的 p 阶分数傅里叶变换,再经过一个距离为 d 的菲涅耳衍射,即可得到物体的再现像。而再现像的大小和衍射距离 d 则由透镜成像公式来决定。

设 h 是物体的大小, \bar{h} 是像的大小, d 为再现像离全息图的距离,则有

$$\bar{h} = \frac{h}{\cos(p\pi/2)} \quad (8)$$

$$d = f \sin(p\pi/2) \tan(p\pi/2) \quad (9)$$

由于再现像的大小、位置和分数傅里叶变换阶数密切相关,因而可以通过改变记录系统的分数阶来灵活地控制再现像的空间尺度,这是普通菲涅耳全息图难以实现的,而且在后面研究的光电显示系统中,为了简化光学再现的光路,笔者更倾向于使用这种再现方式。

接下来,将用计算机模拟实验来验证上面的算

法理论。假设记录物体为 2 维的数字图像,模拟记录所用的参数为:记录系统的透镜焦距 $f = 150 \text{ mm}$,入射波长 $\lambda = 632.8 \text{ nm}$,参考光波的方向角取 $\theta = \frac{\pi}{8}$,则可运用 Matlab 语言来模拟全息记录和重现过程,图 5 为字母图像的原图、阶数为 0.75 的分数傅里叶变换全息图以及直方图均衡前后的模拟图像。

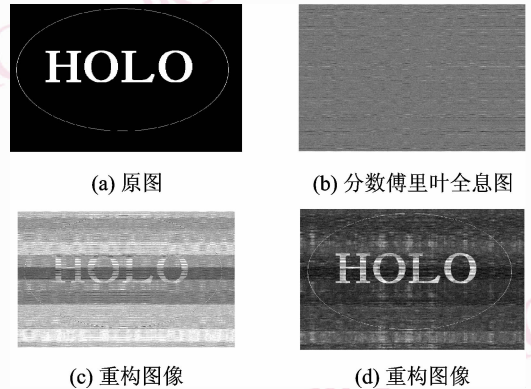


图 5 字母图像的分数傅里叶全息图直方图处理前后的模拟重构图

Fig. 5 Simulating reconstruction for FRT hologram by histogram equalization

图 6 给出了小汽车原图在引入随机相位前后的分数傅里叶模拟重构图像,分数阶取 0.75。

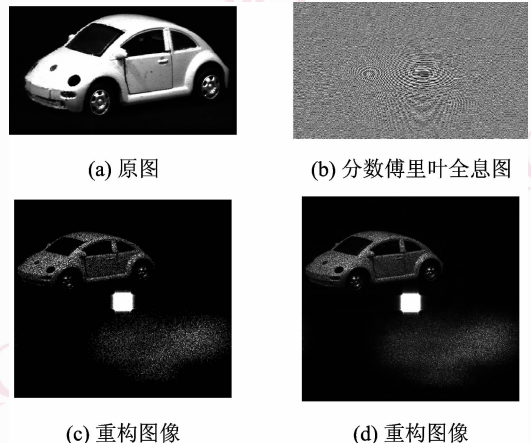


图 6 分别为引入随机相位前后小汽车的分数傅里叶模拟重构图像

Fig. 6 Simulating reconstruction for FRT hologram by random phase

根据物面到记录平面的距离不同,将各自物面的不同阶分数傅里叶变换叠加到记录平面上,再加

入参考光就可以生成合成分数傅里叶变换全息图。可将两个(或多个)原始图像的信息分别经不同阶的分数傅里叶变换后记录在同一张全息图上,而在数字重现中,只要所取的阶数与相应的记录阶数相匹配,就能重现出相应的物面信息。

图 7 给出了小鸭子和小汽车两幅图像的合成全息图及其在不同平面上的模拟重构图像,小鸭子和小汽车的分数阶分别为 0.35, 0.75。

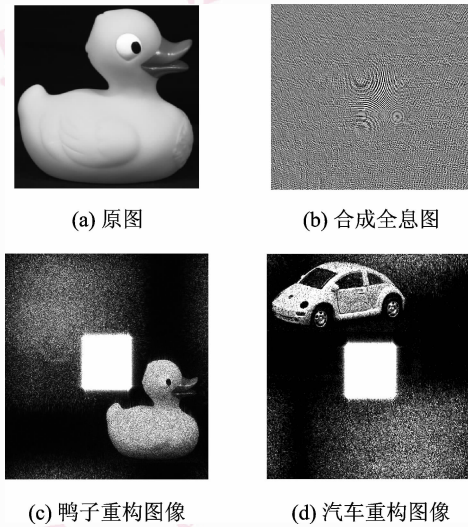


图 7 合成分数傅里叶全息图的模拟重现
Fig. 7 Simulating reconstruction for composing FRT hologram

实验结果表明,只有当重现系统的阶数与记录系统的阶数相匹配时,才能观察到原图的清晰像,而其他图像信息都成为背景噪声。

分数傅里叶变换全息图由于引入了分数阶这一自由度,因而成为傅里叶光学的发展和延拓,这一方面可用一种新的观点去审视光的传播、成像、信息处理等问题,并提供一种新的工具去处理这些问题;另一方面,就全息数据记录来讲,用分数傅里叶变换来记录全息数据比传统的傅里叶变换会取得更好的效果。

2.3 分数傅里叶变换记录全息图的优越性

由于全息记录介质一般都具有有限的线性动态范围,且这个动态范围将会影响对全息图的记录能力,比如,一个很强的信号进入谱平面,其频谱分布可能溢出记录介质,进而丢失信息,因此人们希望频谱的分布更加均匀化。由于傅里叶变换的位移不变性质,致使传统的傅里叶变换全息图的光能都集中在谱平面的原点附近,而分数傅里叶变换则会产生均匀的频谱分布。

为简单考虑,还是以 1 维情况为例进行讨论。图 8 装置表明了分数傅里叶变换记录全息数据的原理。

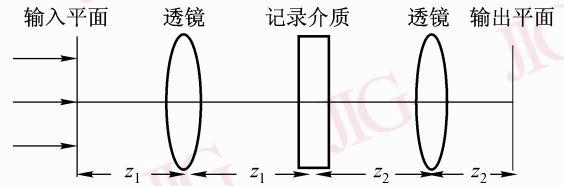


图 8 分数傅里叶变换记录全息数据示意图
Fig. 8 Sketch map for holographic data recording

图中有两次分数傅里叶变换,令变换阶数分别为 α 和 $2 - \alpha$,则相应的角度分别为

$$\varphi_1 = \alpha \times \pi/2; \varphi_2 = (1 - \alpha) \times \pi/2$$

其对应的菲涅耳衍射距离分别为

$$z_1 = f(1 - \cos\varphi_1); z_2 = f(1 - \cos\varphi_2)$$

其中, f 是两个透镜的焦距, λ 是入射光波的波长。

事实上,若在图 1 的记录装置中,令 $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$,则可得到 $z_1 = z_2 = f$,这样两个分数傅里叶变换就变成传统的傅里叶变换。下面首先讨论传统的傅里叶变换如何记录全息数据。

令 $u_i(\mathbf{x}_i)$ 是离散信号的输入函数,其具体可表示为

$$u_i(\mathbf{x}_i) = \sum_m \rho_m \text{rect}\left[\frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_m}{\delta}\right] \quad (10)$$

其中, ρ_m 为第 m 个像素点的取值, \mathbf{x}_m 表示第 m 个像素点的位置,矩形函数 $\text{rect}()$ 定义为

$$\text{rect}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{x}| < 1/2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

传统的傅里叶变换中,在第 1 个透镜的后焦面上得到的输入函数的谱分布为

$$u_s(\mathbf{x}_s) = \frac{1}{\lambda f} \sum_m \rho_m \delta \text{sinc}\left[\delta \frac{\mathbf{x}_s}{\lambda f}\right] \exp\left[-\frac{j2\pi\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_m}{\lambda f}\right] \quad (11)$$

这个频谱分布被记录在介质中,第 2 个透镜后焦面上将得到原函数的重现结果,即

$$u_o(\mathbf{x}_o) = \sum_m \rho_m G(\mathbf{x}_o - \mathbf{x}_m)$$

其中,函数 $G()$ 被定义为

$$G(\boldsymbol{\xi}) = 2\delta \int_0^\beta \text{sinc}(\delta\mathbf{x}) \cos(2\pi\boldsymbol{\xi}\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

其中 $\beta = D/(2\lambda f)$, 而 D 则是记录介质的尺寸, 然后就可以通过数值方法计算 $G(\xi)$ 。

经过 α 阶的分数傅里叶变换后的谱分布 $u_s(\mathbf{x}_s)$ (下角 S 代表 spectrum) 为

$$u_s(\mathbf{x}_s) = C_\varphi \sum_m \rho_m \int_{x_m-\delta/2}^{x_m+\delta/2} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda f_\alpha} \left(\frac{\mathbf{x}_s^2 + \mathbf{x}_i^2}{\tan\varphi} - \frac{2\mathbf{x}_s \cdot \mathbf{x}_i}{\sin\varphi}\right)\right] d\mathbf{x}_i \quad (12)$$

其中, $\varphi = \pi/2 \times \alpha, f_\alpha = f \sin\varphi$ 。常数 C_φ 记为 $C_\varphi = \sqrt{(1 - j\cot\varphi)/\lambda f_\alpha}$ 。将上面记录的频谱再经过 $2 - \alpha$ 阶分数傅里叶变换, 则得到的再现结果为

$$u_o(\mathbf{x}_o) = \sum_m \rho_m K(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_m)$$

其中函数 $K(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_m)$ (\mathbf{x}_o 下角 O 代表 output) 被定义为

$$K(\mathbf{x}_o, \mathbf{x}_m) = C_\varphi^2 D \sum_m \rho_m \int_{x_m-\delta/2}^{x_m+\delta/2} \exp\left[\frac{j\pi}{\lambda f_\alpha} \left(\frac{\mathbf{x}_i^2 - \mathbf{x}_o^2}{\tan\varphi}\right)\right] \cdot \text{sinc}\left[\frac{D(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_o)}{\lambda f \sin\varphi}\right] d\mathbf{x}_i$$

若将函数 $f(\mathbf{x}_o)$ 的分数傅里叶变换记为 $f_\alpha(\mathbf{x}_\alpha)$, 则根据分数傅里叶变换的定义式可知, $f(\mathbf{x}_o - \xi)$ 的分数傅里叶变换为

$$\exp[j\pi \xi^2 \sin\varphi \cos\varphi] \exp[-j2\pi \mathbf{x}_\alpha \xi \sin\varphi] f_\alpha(\mathbf{x}_\alpha - \xi \cos\varphi) \quad (13)$$

上式表明, 若原函数的平移向量为 ξ , 则相应的分数傅里叶变换谱平移为 $\xi \cos\varphi$ 。而根据傅里叶变换的平移不变性可知, 平移后函数的傅里叶变换谱不变。

由上面的分析知道, 由于原输入函数由离散的像素构成, 因此整个频谱分布等于所有像素频谱分布的和。按照传统的傅里叶变换考虑, 由于每个像

素有相同的谱分布(都是 sinc 函数, 且最大值在原点处), 因此整个谱分布应该是所有 sinc 函数在谱平面的叠加, 且最大值在原点处叠加。而在分数傅里叶变换中没有确定的最大值存在, 这是由于分数傅里叶变换的平移性质, 使得每个像素的频谱分布随像素位置的变化而变化, 因此最大值不会叠加, 从而使得谱分布均匀化。通常可用频谱的最大值来表征频谱分布的均匀性, 图 9 是分数傅里叶变换的阶数与频谱最大值之间的关系曲线。

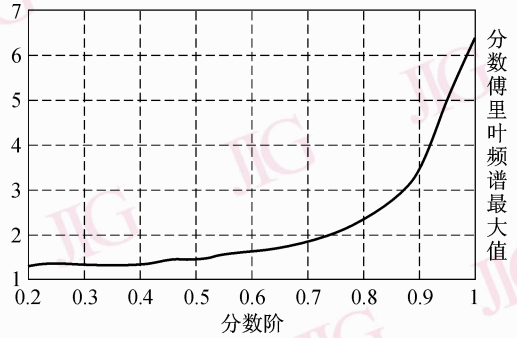
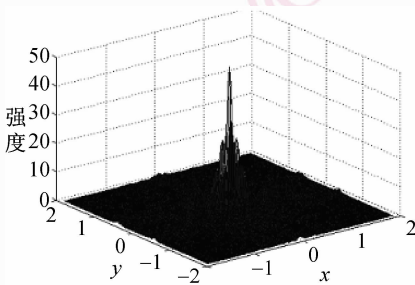


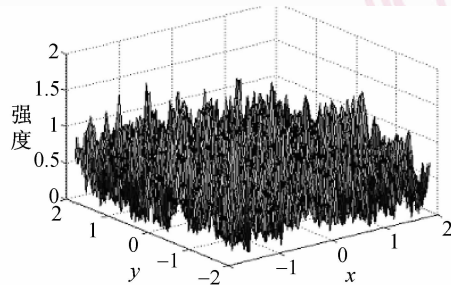
图 9 分数傅里叶变换阶数与分数傅里叶谱最大值间关系曲线

Fig. 9 Relation between max frequency and fractional order

本例中输入的图像大小为 128×128 pixels, 像素宽度为 $0.03 \times 0.03 \text{ mm}^2$, 记录介质的尺寸(也即全息图的尺寸)为 $3 \times 3 \text{ mm}^2$ 。当阶数为 1 时(即传统的傅里叶变换), 最大值非常大, 并且最大值随着阶数的变大而变大。图 10 分别给出了输入图像在传统的傅里叶变换和分数傅里叶变换(分数阶取 0.55)下的频谱分布。



(a) 传统傅里叶变换频谱分布



(b) 分数傅里叶变换频谱分布

图 10 不同傅里叶变换频谱分布

Fig. 10 Spectrum distribution for different Fourier transform

与传统的傅里叶变换相比较, 分数傅里叶变换

在位移上的性质使得离散信号的频谱分布更加均

匀,但是另一方面也必须注意,如果过分的均匀化,则又会使因输入信息的高频成分超出带宽(由记录介质的有限尺寸决定)而无法记录,从而导致重现错误。

根据上面的公式可知,一方面由于随着每个像素离开中心点距离的增加,将会加剧这种错误的产生;另一方面由于随着分数阶的降低,这种错误也会加剧,因此要使得所有离散像素的频谱分布不超过全息图的带宽,则必须满足 $D_i \cos \varphi < D$, 其中 D_i 为输入信息(比如一幅图像)的尺寸。由此得到的对分数傅里叶变换的分数阶的要求为 $\alpha > \frac{2}{\pi} \cos^{-1} \frac{D}{D_i}$ 。

例如,当 D_i 为 3.84 cm, D 为 3 cm 时,分数傅里叶变换的分数阶必须大于 0.429 2, 如果记录时分数阶低于此值,则会造成重构时的错误。

通过分析分数傅里叶变换公式可知,分数傅里叶变换就是乘以一个二次相位因子后再进行傅里叶变换,其较之传统的傅里叶变换而言,分数傅里叶变换核中有一个较大的缩放因子。对于 α 阶的分数傅里叶变换而言,这个缩放因子为 $\nu_\alpha = \frac{x}{\lambda f_\alpha \sin \varphi}$, 而传统的傅里叶变换的缩放因子为 $\nu_1 = \frac{x}{\lambda f_1}$, 显然有

$$\nu_\alpha = \frac{x}{\lambda f_\alpha \sin \varphi} = \frac{x}{\lambda f_1 \sin^2 \varphi} > \frac{x}{\lambda f_1} = \nu_1 \quad (14)$$

这就是说,分数傅里叶变换的带宽大于传统的傅里叶变换的带宽,且比例为 $\nu_\alpha / \nu_1 = 1 / \sin^2 \varphi$, 例如当分数傅里叶变换的阶数为 0.5 时,分数傅里叶变换的带宽就是傅里叶变换带宽的两倍。

总的来讲,人们既希望全息图的带宽大些(分数阶尽量小),又不希望频谱分布过分均匀,使得高频成分溢出记录介质而丢失信息(因为记录介质的尺寸是有限的)。而这些因素都和分数变换阶有关,且直接影响到全息图的重现效果,为了选取最佳的分数阶,本文将给重现效果定义为

$$E = \frac{1}{M} \frac{1}{N} \sum_{m,n} |\rho_{m,n} - |u_0(x_{m,n})||^2 \quad (15)$$

M 、 N 是输入图像的像素点个数,如果 E 趋向于 0, 则说明重构的效果好。下面仍然取上面的例子进行讨论,输入的图像大小为 128×128 pixels, 像素宽度为 $0.03 \times 0.03 \text{ mm}^2$, 记录介质的尺寸(也即全息图的尺寸)为 $3 \times 3 \text{ mm}^2$, 则得到的本例的重现效果和分数阶数之间的曲线关系如图 11 所示。实验表

明,在上面的假设条件下,当分数阶数取 0.57 时,重构效果最好。

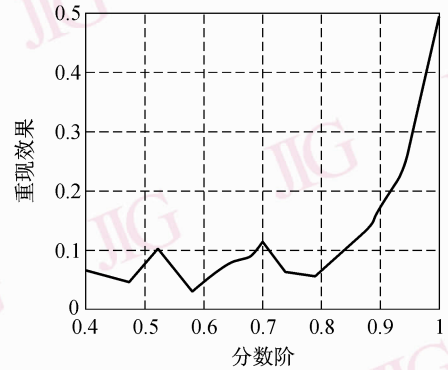


图 11 重现效果 E 与分数阶间的关系曲线

Fig. 11 Relation between reconstruction and fractional order

3 分数傅里叶全息图的系统实现

众所周知,合成体视全息图虽然在客观上也可取得 3 维显示的效果,它既是立体的,而且也包含有一定的视差信息,但其与一般意义的全息图是有区别的,它实际上是由一系列体视对组成的体视图,其不像全息图那样,同时记录了一个 3 维物体的振幅和相位,而是直接得到原物的 3 维重构像。为了实现真正意义上的 3 维显示,笔者对其进行了专门的研究。

3.1 以空间光调制器 DMD 为核心的光学重现装置

在已经得到一个全息投影系统以后,再通过计算 3 维场景中物体的全息图,并将生成的 2 维全息图转换到 DMD 中,同时用相干光照射,就会得到原来的 3 维物体像。光学重现装置如图 12 所示。

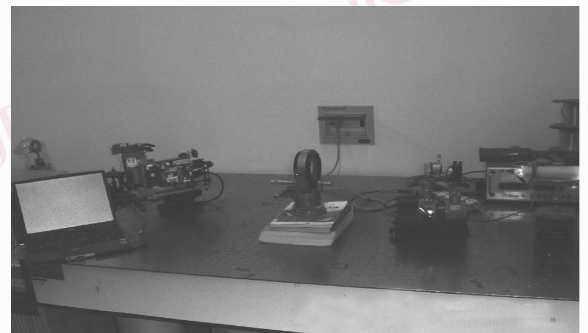


图 12 DMD 成像系统的实际光路

Fig. 12 Experimental set-up of DMD

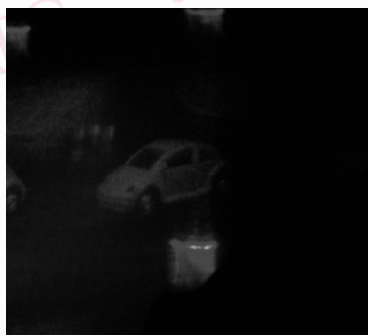
在该系统中,计算机先将存储的计算全息图通

过连接电路输入 DMD 中,然后由氦氖激光器发出激光经过一系列光学透镜装置后产生的相干平面光波照射到 DMD 上,在 DMD 反射和衍射的共同作用下,通过会聚透镜组即可接收到 3 维重构实像。

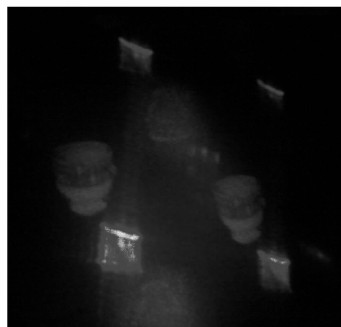
3.2 分数傅里叶全息图的光学重现结果

利用上面的光学装置和分数傅里叶变换来计

算全息图,即可分别得到分数傅里叶全息图的光学重现结果。图 13 分别为第 3 节中小汽车和茶杯的光学重构结果。图 14 为小汽车和小鸭子两幅图像的合成全息图在不同平面上的光学重构图像。



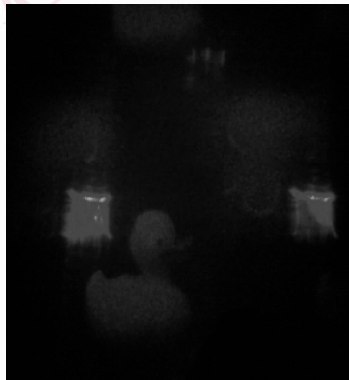
(a) DMD 光学重构的小汽车图像



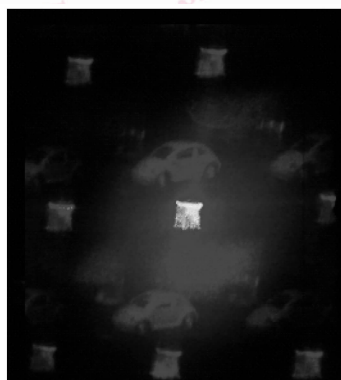
(b) DMD 重构的茶杯图像

图 13 DMD 光学重构图像

Fig. 13 Reconstruction by DMD



(a) DMD 光学重构的鸭子图像



(b) DMD 重构的汽车图像

图 14 不同平面上两幅图像的合成全息图在不同平面上得到的重构图像

Fig. 14 Reconstruction of different plane by DMD

上面获取的图像都是用数码相机拍摄的重构图像(截取其中的部分图像)。由于受 DMD 器件的周期性几何结构的影响,在最后重构的图像中由于获得的是 DMD 周期结构的 2 维频谱和小汽车图像的乘积像,因此将可观察到多极衍射的小汽车重构像。

4 结 论

本文中利用分数傅里叶变换与菲涅耳衍射光场的紧密联系,给出了分数傅里叶变换的快速数值算法,同时将分数傅里叶变换应用到计算全息图中来得到分数傅里叶变换计算全息图,并分析了分数傅

里叶记录全息图的优越性。本文初步搭建出以空间光调制器 DMD 为核心的光学重构全息图装置,并获得了分数傅里叶变换计算全息图在该系统下的全息显示效果,从而为真 3 维显示的研究提出了一个新的研究方向。

参考文献 (References)

- 1 Pierre Pellat-finet. Fresnel diffraction and the fractional-order Fourier transform [J]. *Optics Letters*,1994,**19**(18):236-243.
- 2 Namis V. The fractional order Fourier transform and its application in quantum mechanics [J]. *Institute Mathematics Application*, 1980, **25**(13):324-325.
- 3 Lohmann A W. Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform [J]. *Optical Society American*, 1993, **10**(12):2181-2186.
- 4 Mas D, Garcia J, Ferreira C, *et al.* Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation [J]. *Optical Communication*, 1999, **233**(164):233-245.
- 5 Feng Di, Yan Ying-bai, Jin Guo-fan. A fast algorithm for calculation the fractional Fourier transform diffraction integral [J]. *Acta Photonica Sinica*, 2003, **32**(7):885-888. [冯迪,严瑛白,金国藩.求解分数傅里叶变换衍射积分的一种快速算法[J]. *光子学报*, 2003,**32**(7):885-888.]
- 6 Ping Xian-jun. A novel fast algorithm for fractional Fourier transform [J]. *Acta Electronica sinica*, 2001, **29**(3):406-408. [平先军.一种新的分数阶傅里叶变换快速算法[J]. *电子学报*,2001,**29**(3):406-408.]
- 7 Zhao Yu, Cai Ping. Digital computation of fractional Fourier transform [J]. *Harbin Engineering University*, 2002, **23**(6):1-3. [赵羽,蔡平.分数阶傅里叶变换的数值计算[J]. *哈尔滨工程大学学报*,2002,**23**(6):1-3.]
- 8 Xie Shi-wei, Gao Feng, Zeng Yang-su. Computer-generated hologram of fractional Fourier transform [J]. *Chinese Laser*, 2003, **30**(5):431-434. [谢世伟,高峰,曾阳素.分数傅里叶变换计算全息图[J]. *中国激光*,2003,**30**(5):431-434.]
- 9 Ozaktas H M, Mendlovic D. Fractional Fourier optics [J]. *Optical Society American*, 1995, **12**(4):543-554.
- 10 Liu Cheng. Digital holography free of zero-order diffraction and conjugate images [J]. *Acta Optica Sinica*, 2002, **22**(4):428-431. [刘诚.无直透光和共轭像的数字全息[J]. *光学学报*,2002,**22**(4):428-431.]