

一种 PDE 图像分解去噪模型及算法

宋锦萍¹⁾ 陈花竹²⁾ 台雪成¹⁾

¹⁾(河南大学应用数学所数学与信息科学学院,开封 475004) ²⁾(河南大学软件学院,郑州 450008)

摘要 通过分析 ROF(Rudin, Osher and Fatemi)模型和 LLT(Lysaker, Lundervold and Tai)模型在处理噪声图像时存在的缺陷,以及纹理部分和噪声部分之间的差异,将图像分解思想和 ROF 模型与 LLT 模型相结合,提出了一种新的分解去噪模型:DD(decomposition and denoising)模型。该模型在处理噪声图像时,将噪声图像分解为结构、纹理和噪声 3 部分,从而达到既去噪又能分解的目的。进一步通过仿真试验,验证了 DD 模型和算法的合理性及有效性。

关键词 图像分解 图像去噪 结构 纹理 噪声

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)08-1547-06

A Decomposition and Denoising Model and Algorithm Based on PDE

SONG Jin-ping¹⁾, CHEN Hua-zhu²⁾, TAI Xue-cheng¹⁾

¹⁾(Institute of Applied Mathematics, College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475004)

²⁾(Software College, Henan University, Zhengzhou 450008)

Abstract Through analysis shortcoming of the ROF(Rudin, Osher and Fatemi) model and LLT(Lysaker, Lundervold and Tai) model in denoising processing, and the difference between texture and noise, combining decomposition model, TV-norm and fourth-order PDE, the article proposes the DD(decomposition and denoising) model. When processing noise image, the new model decompose an noisy image into three parts, structure, texture and noise, and thus achieves denoising and decomposition. Further through the experiments, we testify rationality and validity of the DD model and the algorithm.

Keywords image decomposition, image denoising, structure, texture, noise

1 引言

去噪是图像恢复中最经典的问题,图像分解是最近提出的问题。在设计图像处理模型时,人们最为关注的就是协调好恢复图像特征和抑制噪声之间的关系。而在图像中最显著的特征莫过于边缘和纹理,因此,大量的研究就致力于设计既能去噪又能保持边缘和小尺度图像特征的模型。

目前,基于 PDE 的变分模型已被成功地应用于图像处理的工作中,如:Rudin 等人提出最小化全变

差(TV)范数模型(简称 ROF 模型)^[1],文献[2]~文献[4]中提出了修改 TV-norm 平滑项的方法。由于以上模型中生成的去噪图像有块状效应,为了解决此问题,文献[5]~文献[8],提出了一些基于高阶导数的模型,如:Lysaker 等人提出了基于四阶 PDE 的 LLT 模型^[8],但这些模型都对图像的光滑性要求较高。

ROF 模型是一类经典的变分去噪算法,该算法在图像的 TV-norm 平滑项和保真项之间找到一种平衡态,即能量泛函的极小值

$$\min_{u \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy + \lambda \int_{\Omega} |f - u|^2 dx dy \right\} \quad (1)$$

基金项目: 国家自然科学基金委员会与中国工程物理研究院联合基金项目(10576013);河南省自然科学基金项目(0611053200)

收稿日期: 2007-06-25; **改回日期:** 2008-05-07

第一作者简介: 宋锦萍(1963~),女,教授,硕士生导师。1990 于中国科学技术大学获应用数学专业硕士学位。研究方向为图像处理、微分方程数值解。在国内外学术期刊发表论文 20 多篇。E-mail: songjp@henu.edu.cn

它在有界变差空间有解且唯一^[1,5,9-10]。尽管该模型能够解决保持边缘和抑制噪声这一对矛盾,但是当 λ 很小时,像纹理这样的图像小细节特征就会被毁坏。

针对这种不足, Meyer^[11] 通过与有界变差空间(简称 BV 空间)在一定意义上的对偶空间,对纹理等细小特征建模,提出了重要的基于 TV 极小化框架下的振荡函数建模理论,即图像分解模型。设给定一幅图像 $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, 将其分解成两部分 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, 其中 \mathbf{u} 是由齐次区域和突出边界形成的图像,即 f 的结构部分, \mathbf{v} 为 f 的纹理或噪声部分。Meyer 建立了 TV-G 图像分解模型。但是,由于 Meyer 的理论模型没有直接可求解的偏微分方程与之对应, Vese, Osher^[12] 用 $\text{div}(L^p)$ -norm 近似 G-norm, 首先提出了 Vese-Osher 模型。另外, Osher, Sole, Vese 在 2003 年,还提出了一种逼近该理论模型的方法^[13],即基于 TV 极小化和 H^{-1} 范数的图像恢复模型,即 TV- H^{-1} 模型。

TV-G 模型、Vese-Osher 模型和 TV- H^{-1} 模型在图像去噪过程中就是把噪声图像 \mathbf{u}_0 分解为目标部分(结构部分) \mathbf{u} 和噪声部分 $\boldsymbol{\eta}$, 即 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} + \boldsymbol{\eta}$ 。因此可以用图像分解模型来处理噪声图像,将噪声部分 $\boldsymbol{\eta}$ 从图像 \mathbf{u}_0 中分离出来,得到没有噪声的 \mathbf{u} 。而噪声部分和纹理部分都是由某些小尺度的细节多次重复形成的,从而这些模型在去除噪声的同时,往往也去除了一些图像的纹理部分,导致所得到的目标图像效果不是很好,尤其图像的轮廓不够清晰。而 LLT 模型,对函数的光滑性又要求太高。因此,希望根据噪声和纹理的不同,对二者加以区别,保留纹理部分去除噪声部分,为此,本文将图像分解思想与 LLT 相结合得到了一种新的去噪算法,达到了好的去噪效果。

2 相关工作

2.1 ROF 模型

近来 Meyer 解释 ROF 模型可看为图像分解模型,其中 \mathbf{u} 由 TV-norm 来构造, \mathbf{v} (纹理或噪声)由 L^2 范数构造,模型如下所示:

$$\min_{\mathbf{u} \in BV(\Omega), \mathbf{f} = \mathbf{u} + \mathbf{v}} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| \, dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx dy \right\} \quad (2)$$

该模型对带有噪声的纹理图像处理时噪声和纹理都

由 $\int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 \, dx dy$ 来刻画,这样去除噪声的同时,往往也去除了一些图像的纹理部分。

2.2 LLT 模型

由于 ROF 模型在去噪时易产生块状效应,于是提出了 4 阶 PDE 去噪模型。4 阶 PDE 去噪模型用到 4 阶导数,对函数光滑性要求比较高。这里介绍由 Lysaker 等人提出 4 阶 LLT 模型^[8], LLT 最小化方法从 f 中提取 u

$$\min \int_{\Omega} (|u_{xx}| + |u_{yy}|) \, dx dy \quad (3)$$

其中, $\int_{\Omega} (\mathbf{u} - f)^2 \, dx dy \approx \sigma^2$, σ 为噪声方差。

2.3 纹理部分和噪声部分的特点分析

图像中的结构部分主要包含图像的齐次区域和尖锐边界,而纹理部分包含一些小尺度的重复细节。对于纹理部分,虽然灰度值变化频率很大,但大小变化不大,其抖动比噪声还低,因此其灰度值可以近似认为是连续的。而噪声部分尽管也是由某些小尺度的细节形成,但噪声部分的灰度一般是要服从一定的分布。

3 DD 模型

由 2.3 分析可知,纹理部分的灰度值抖动比噪声的灰度值抖动低,而结构部分包含图像的齐次区域和尖锐边界。在 ROF 模型、TV-G 模型、Vese-Osher 模型和 TV- H^{-1} 模型中对图像进行分解时,结构部分 \mathbf{u} 都在 BV (有界变差)空间中构造,在此仍沿用 $\mathbf{u} \in BV(\Omega)$, 而纹理部分 \mathbf{v} 在此用一个较光滑的函数来刻画,设 $\nabla \mathbf{v} \in BV(\Omega)_2$, 将 f 分解成 $\mathbf{u} + \mathbf{v} + \boldsymbol{\eta}$, 而噪声 $\boldsymbol{\eta} = f - (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ 。为此,得到如下 DD 模型:

$$\min \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}| + \alpha (|\mathbf{v}_{xx}| + |\mathbf{v}_{yy}|)) \, dx dy \quad (4)$$

$$\text{s. t.} \quad \|\mathbf{u} + \mathbf{v} - f\|^2 = \sigma^2$$

假设噪声方差可近似为

$$\sigma^2 \approx \|f - (\mathbf{u} + \mathbf{v})\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} (f - (\mathbf{u} + \mathbf{v}))^2 \, dx dy \quad (5)$$

参数 α 控制 $\int_{\Omega} (|\mathbf{v}_{xx}| + |\mathbf{v}_{yy}|) \, dx dy$, 即纹理部分对图像 f 所做的贡献, α 越大 \mathbf{v} 包含的信息越多,否则 \mathbf{u} 包含的信息就多。这样,通过 DD 模型可以得到 3 部分结构 \mathbf{u} 、纹理 \mathbf{v} 、噪声 $\boldsymbol{\eta}$, 将纹理和噪声有效地分开,而且可以得到去噪图像 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 。

4 基于 DD 模型的分解去噪算法

应用 Lagrangian 不定乘子法推导式 (4) 的 Euler-Lagrange 方程。设 Lagrange 方程为

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda) = \int_{\Omega} (|\nabla \mathbf{u}| + \alpha(|\mathbf{v}_{xx}| + |\mathbf{v}_{yy}|)) dx dy + \frac{\lambda}{2} (\|\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}\|^2 - \sigma^2) \quad (6)$$

关于式(6)分别对 $\lambda, \mathbf{u}, \mathbf{v}$ 求 Gâteaux 导数,并令 $\frac{\partial L}{\partial \lambda} =$

$$0, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \cdot V = 0, \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot V = 0, \forall V.$$

对 λ 有

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f})^2 dx dy - \frac{1}{2} \sigma^2 = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (7)$$

对 \mathbf{u} 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} \cdot V &= \int_{\Omega} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \nabla V \right) dx dy + \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) V dx dy \\ &= - \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) V dx dy + \int_{\partial \Omega} \frac{1}{|\nabla \mathbf{u}|} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} V ds + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) V dx dy \end{aligned}$$

由此可推得, \mathbf{u} 满足下列非线性方程,其中 \mathbf{n} 是边界 $\partial \Omega$ 的外法向量,

$$- \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) + \lambda (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \quad (9)$$

对 \mathbf{v} 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} \cdot V &= \alpha \int_{\Omega} \left(\frac{\mathbf{v}_{xx}}{|\mathbf{v}_{xx}|} V_{xx} + \frac{\mathbf{v}_{yy}}{|\mathbf{v}_{yy}|} V_{yy} \right) dx dy + \\ &\quad \lambda \int_{\Omega} (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) V dx dy \end{aligned}$$

在上式中对前两项运用两次分部积分,可得 \mathbf{v} 满足下列非线性方程:

$$\alpha \left(\left(\frac{\mathbf{v}_{xx}}{|\mathbf{v}_{xx}|} \right)_{xx} + \left(\frac{\mathbf{v}_{yy}}{|\mathbf{v}_{yy}|} \right)_{yy} \right) + \lambda (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (10)$$

且在边界上

$$\left(\frac{\mathbf{v}_{xx}}{|\mathbf{v}_{xx}|} \right)_{n_1} + \left(\frac{\mathbf{v}_{yy}}{|\mathbf{v}_{yy}|} \right)_{n_2} = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \quad (11)$$

$$\left(\frac{\mathbf{v}_{xx}}{|\mathbf{v}_{xx}|} \right)_x + \left(\frac{\mathbf{v}_{yy}}{|\mathbf{v}_{yy}|} \right)_y = 0 \quad \text{on } \partial \Omega \quad (12)$$

其中, $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ 是边界 $\partial \Omega$ 的外法向量。式(11)、

式(12)当且仅当 Ω 是方形区域 $[a, b] \times [c, d]$ 时成立。

式(7) ~ 式(12)即为变分问题式(4)满足的 Euler-Lagrange 方程。

\mathbf{u} 的最小值和 \mathbf{v} 的最小值可通过求解非线性扩散方程:

$$\mathbf{u}_t = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) - \lambda (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{u}_0) \quad (13)$$

$$\mathbf{v}_t = -\alpha \left(\left(\frac{\mathbf{v}_{xx}}{|\mathbf{v}_{xx}|} \right)_{xx} + \left(\frac{\mathbf{v}_{yy}}{|\mathbf{v}_{yy}|} \right)_{yy} \right) - \lambda (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) \quad (14)$$

的稳态解得到。

式(8)两端同乘 $\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}$, 然后在 Ω 上积分,利用式(7)和分部积分公式可得到

$$\lambda = - \frac{1}{\sigma^2} \int_{\Omega} \frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \nabla (\mathbf{u} + \mathbf{v} - \mathbf{f}) dx dy \quad (15)$$

5 算法的离散化过程

利用有限差分法将式(13) ~ 式(15)离散化, Δx 和 Δy 分别表示网格点 x 和 y 方向网格步长, Δt 表示时间步长。 $x = i\Delta x, i = 0, 1, \dots, M, y = j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N$ 。在图像处理问题中,一般设 $\Delta x = 1, \Delta y = 1, M \times N$ 代表图像紧支集的大小。用 \mathbf{u}^n 和 \mathbf{v}^n 代表图像 $u(x, y, n\Delta t)$ 和 $v(x, y, n\Delta t)$ 的近似,具体离散化格式由表 1 给出。

表 1 离散化表格

Tab. 1 The formulation of discreteness

$\mathbf{u}_{i,j}^0$	初始图像
$D_x^{\pm}(\mathbf{u}_{i,j})$	$\pm [\mathbf{u}_{i\pm 1,j} - \mathbf{u}_{i,j}] / \Delta x$
$D_y^{\pm}(\mathbf{u}_{i,j})$	$\pm [\mathbf{u}_{i,j\pm 1} - \mathbf{u}_{i,j}] / \Delta y$
$D_{xx}(\mathbf{u}_{i,j})$	$[D_x^+(\mathbf{u}_{i,j}) - D_x^+(\mathbf{u}_{i-1,j})] / \Delta x$
$D_{yy}(\mathbf{u}_{i,j})$	$[D_y^+(\mathbf{u}_{i,j}) - D_y^+(\mathbf{u}_{i,j-1})] / \Delta y$

式(13) ~ 式(15)的具体离散化公式为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{u}_{i,j}^n + \\ \Delta t_1 &\left[D_x^+ \left(\frac{D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n}{\left[(D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n)^2 + (m(D_y^- \mathbf{u}_{i,j}^n, D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n))^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) + \right. \\ &\left. D_y^- \left(\frac{D_y^+ \mathbf{u}_{i,j}^n}{\left[(D_y^+ \mathbf{u}_{i,j}^n)^2 + (m(D_x^- \mathbf{u}_{i,j}^n, D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n))^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \right) \right] - \\ \Delta t_1 \lambda^{n+1} &(\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{v}_{i,j}^n - \mathbf{f}_{i,j}) \quad (16) \\ \mathbf{v}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{v}_{i,j}^n - \Delta t_2 \alpha \left[D_{xx} \left(\frac{D_{xx} \mathbf{v}_{i,j}^n}{|D_{xx} \mathbf{v}_{i,j}^n|} \right) + D_{yy} \left(\frac{D_{yy} \mathbf{v}_{i,j}^n}{|D_{yy} \mathbf{v}_{i,j}^n|} \right) \right] - \end{aligned}$$

$$\Delta t_2 \lambda^{n+1} (\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{v}_{i,j}^n - \mathbf{f}_{i,j}) \quad (17)$$

$$\lambda^{n+1} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i,j} \left[\left(\frac{D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n}{[(D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n)^2 + (m(D_y^- \mathbf{u}_{i,j}^n, D_y^+ \mathbf{u}_{i,j}^n))^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \times \right. \\ \left. D_x^+ (\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{v}_{i,j}^n - \mathbf{f}_{i,j}^n) + \left(\frac{D_y^+ \mathbf{u}_{i,j}^n}{[(D_y^+ \mathbf{u}_{i,j}^n)^2 + (m(D_x^- \mathbf{u}_{i,j}^n, D_x^+ \mathbf{u}_{i,j}^n))^2]^{\frac{1}{2}}} \right) \times \right. \\ \left. D_y^+ (\mathbf{u}_{i,j}^n + \mathbf{v}_{i,j}^n - \mathbf{f}_{i,j}^n) \right] \quad (18)$$

在式 (16) ~ 式 (18) 中, 用到了 $m(a, b) = \frac{\text{sgn}(a) + \text{sgn}(b)}{2} \min(|a|, |b|)$ 。

设初始值 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{f}, \mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$, 分别令 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。由式(16) ~ 式(18), 迭代可得到 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f} - (\mathbf{u} + \mathbf{v})$ 。具体迭代算法如下:

(1) 在式(16)、式(17)中, 令 $n = 0$, 取初始值 $\mathbf{u}^0 = \mathbf{f}, \mathbf{v}^0 = \mathbf{0}$;

(2) 将 $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0$ 代入式(18), 可求得 λ^1 ;

(3) 将 $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \lambda^1$ 代入式(16), 可求得 \mathbf{u}^1 ;

(4) 将 $\mathbf{u}^0, \mathbf{v}^0, \lambda^1$ 代入式(17), 可求得 \mathbf{v}^1 ;

(5) 若 $\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^1$ 是其稳态解, $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{f} - (\mathbf{u}^1 + \mathbf{v}^1)$ 即为所求。否则, $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^1, \mathbf{v}^0 = \mathbf{v}^1, n = n + 1$, 继续进行步骤 2 ~ 步骤 4, 直至得到其稳态解, 停止迭代。

6 仿真实验和算法分析

针对在原始图像中加入方差为 $\sigma = 0.08$ 和 $\sigma = 0.2$ 高斯噪声的图像, 进行仿真实验, 分别利用 ROF 模型、LLT 模型、DD 模型对其去噪, 并给出实验结果及比较。

首先, 选取原始图像, 并加入不同方差的噪声 (图 1)。图 2、图 3 分别为 3 种模型对图 1(b) 和图 1(c) 的处理结果。

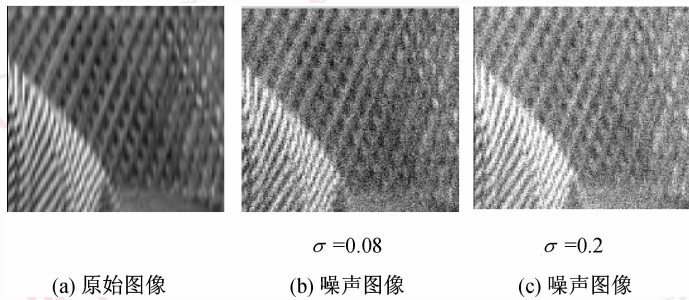


图 1 原始图像和加噪图像
Fig. 1 Original image and noise images

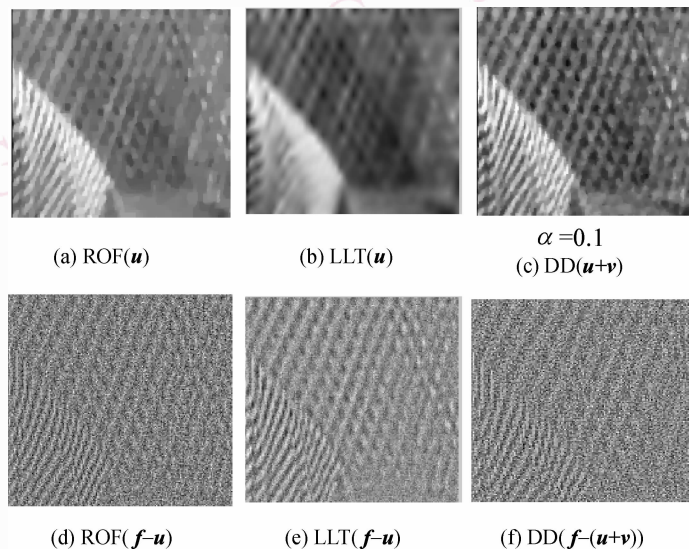


图 2 对方差为 $\sigma = 0.08$ 的噪声图像实验结果
Fig. 2 The results from experimentation on noisy image that the variance is 0.08

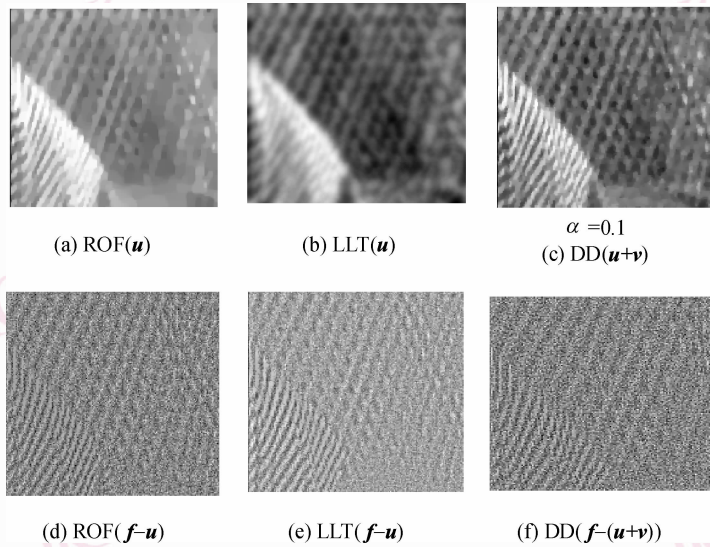


图 3 对方差为 $\sigma = 0.2$ 的噪声图像实验结果

Fig. 3 The results from experimentation on noisy image that the variance is 0.2

在图 2 中,ROF 模型的时间步长为 $\Delta t = 0.02$, LLT 的时间步长为 $\Delta t = 0.1$,DD 模型的时间步长为 $\Delta t_1 = 0.02, \Delta t_2 = 0.1$;在图 2 中 ROF 模型的时间步长为 $\Delta t = 0.03$,LLT 的时间步长为 $\Delta t = 0.09$,DD 模型的时间步长为 $\Delta t_1 = 0.03, \Delta t_2 = 0.09$ 。

由图 2(a) ~ (c)、图 3(a) ~ (c) 可以看到由 ROF 模型和 LLT 模型的去噪后的图像不清晰,在去噪的过程中大量的纹理信息丢失,而 DD 新模型去噪效果得到了很大的改善,保持了图像原有的信息,这是由于 ROF 模型和 LLT 模型在去除噪声的同时也去除了大量的纹理信息,见图 2(d)、(e),图 3(d)、(e),而 DD 新模型能将纹理和噪声有效的分开,在去除的噪声中仅含有较少的纹理,见图 2(f)和图 3(f),因此 DD 模型具有好的去噪效果。

其次,为了进一步说明 DD 模型的有效性,使用均方误差 MSE 和信噪比 SNR 两个概念,针对图 2 和图 3 的图像进行比较,结果如表 2 所示。MSE 和 SNR 分别定义为

$$MSE = \frac{1}{M \times N} \int_{\Omega} (f - u)^2 dx dy$$

$$SNR = 10 \log \left(\frac{\int_{\Omega} (f - \bar{f})^2 dx dy}{\int_{\Omega} (n - \bar{n})^2 dx dy} \right)$$

其中, f 为观察到的图像, u 是没有噪声的原始图

像, $n = f - u, \log = \log_{10}, \bar{f} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx dy, \bar{n} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} n dx dy$ 。均方误差越小、信噪比越大说明去噪效果越好。

表 2 原始图像和各模型得到的图像的 MSE,SNR
Tab.2 MSE, SNR for the orginial image and image gained from every model

	图 2		图 3	
	MSE	SNR	MSE	SNR
噪声图像	1 061.5	4.946 4	3 163.7	4.774 7
ROF	628.874 7	6.450 3	2 742.2	6.133 4
LLT	652.802 2	6.912 1	2 782.5	6.604 5
DD	579.729 0	8.123 8	2 713.8	7.359 0

最后,为了说明本文模型,不仅能够去噪,而且在去噪的过程中还能够将图像分解成 3 部分:结构 u 、纹理 v 、噪声 η ,将纹理和噪声有效的分开,仍对图 1(b)、图 1(c),给出分解图,如图 4 所示,其中图 4(a)结构(u) + 纹理(v)即图 2(c),噪声(η)即图 2(f),图 4(b)结构(u) + 纹理(v)即图 3(c),噪声(η)即图 3(f)。

由图 4 可以看到 DD 模型把纹理和噪声有效地分离,这也就是 DD 模型较另外两个模型去噪效果好的原因所在。

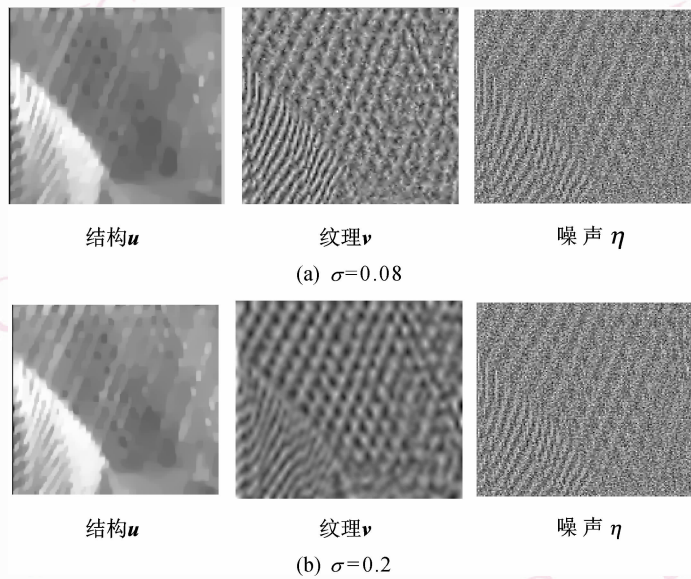


图 4 用 DD 模型得到的结构、纹理和噪声

Fig. 4 The results of cartoon, texture and noise by DD model

7 结 论

针对图像分解模型应用于图像去噪时,不加区别地均由震荡函数来刻画噪声部分和纹理部分,而在去除噪声的同时往往也去除了图像纹理的问题,提出的 DD 模型有效地解决了上述模型存在的缺陷,并根据噪声和纹理的不同之处,对二者加以区别,将图像分解为结构部分、纹理部分和噪声部分,从而达到了好的分解去噪效果以及为进一步的图像处理提供了便利。

参考文献 (References)

- 1 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm [J]. *Physica D*, 1992, **60**(2): 259-268.
- 2 Alexander M E, Baumgartner R, Summers A R, *et al.* A wavelet-based method for improving signal-to-noise ratio and contrast in MR images [J]. *Magnetic Resonance Imaging*, 2000, **18**(2): 169-180.
- 3 Catte F, Lions P L, Morel J M, *et al.* Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion [J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1992, **29**(1): 182-193.
- 4 Chambolle A. Image segmentation by variational methods: Mumford and Shah functional and the discrete approximations [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1995, **55**(3): 827-863.
- 5 Chambolle A, Lions P. Image recovery via total variation minimization and related problems [J]. *Numerische Mathematik*, 1997, **76**(2): 167-188.
- 6 Chan T, Marquina A, Mulet P. High-order total variation-based image restoration [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2000, **22**(2): 503-516.
- 7 You Y L, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2000, **9**(10): 1723-1730.
- 8 Lysaker M, Lundervold A, Tal X C. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2003, **12**(12): 1579-1590.
- 9 Acar R, Vogel C R. Analysis of bounded variation penalty methods for ill-posed problem [J]. *Inverse Problem*, 1994, **10**(6): 1217-1229.
- 10 Vese L. A Study in the BV space of a denoising-deblurring variational problem [J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2001, **44**(2): 131-161.
- 11 Meyer Y. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations* [M]. Boston, MA, USA: American Mathematical Society, 2001: 30-42.
- 12 Vese L A, Osher S J. Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing [J]. *Journal of Scientific Computing*, 2003, **19**(11): 553-572.
- 13 Osher S, Sole A, Vese L. Image decomposition and restoration using total variation minimization and the H^{-1} norm [J]. *SIAM Multiscale Modeling and Simulation*, 2003, **1**(3): 349-370.