

# 彩色图像缩放的四元数插值算法

苏本跃<sup>1)</sup> 盛敏<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(安庆师范学院计算机与信息学院, 安庆 246011) <sup>2)</sup>(安庆师范学院数学与计算科学学院, 安庆 246011)

**摘要** 将彩色图像像素点的 3 个颜色分量当作一个纯四元数来处理, 在充分考虑了图像 3 个颜色分量的内在相关性、图像本身的非线性机制的基础上, 构造了基于球面线性四元数插值方法和代数三角混合四元数插值样条方法的彩色图像插值算法。实验结果表明, 四元数方法用于彩色图像插值时, 所处理的图像清晰度和色彩亮度均较传统方法有较大改进, 边缘细节上也更丰富。

**关键词** 四元数 彩色图像插值 球面线性插值 代数三角混合样条插值

中图法分类号: TP391.6 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)12-2607-04

## Algorithm for Color Image Zooming Based on the Quaternion Interpolation

SU Ben-yue<sup>1)</sup>, SHENG Min<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>(School of Computer and Information, Anqing Teachers College, Anqing 246011)

<sup>2)</sup>(School of Mathematics and Computational Science, Anqing Teachers College, Anqing 246011)

**Abstract** This paper regards the three components of color image as a pure quaternion and presents the algorithms for color image zooming via spherical linear quaternion interpolation and algebraic trigonometric blending quaternion interpolation spline based on the research of the intrinsic correlation of color components and the nonlinear mechanism of image itself. Illustration shows that, using the new quaternion interpolation method, the clarity, brightness and more rich details on the edges of color image have greater improvements than the cases of traditional method by bicubic spline interpolation.

**Keywords** quaternion, color image interpolation, spherical linear interpolation, algebraic trigonometric blending spline interpolation

## 1 引言

自然界的彩色是一种感知现象, 而不是光线本身的物理特性。因此光中任意波长的光都对应于一种被感知的色彩, 是相关的。目前, 全彩色图像处理技术主要有两类: 一类是分别处理各分量图像, 然后合成为真彩图像; 另一类是直接对彩色像素进行处理。第 1 类处理方法没有考虑到彩色图像的三分量原本就是一个有机的整体, 相互之间具有较强的关

联性, 因此, 如果人为地将其分开处理势必会对图像本身的信息结构造成影响, 可能会导致处理后图像出现不应有的颜色。对于第 2 类处理方法, 最近一些研究将矢量分析引入彩色图像处理与分析, 比较充分地利用了图像的彩色信息。文献[1]将数字图像的每一个像素看作是平面域的关于 R, G, B 三原色的一个向量, 提出保持轮廓清晰的彩色图像放大有理插值方法。1996 年, Pei 考虑到一幅彩色图像每个像素都是由 R, G, B 3 种颜色按一定比例组合而成的, 所以彩色图像的每个像素都可以视为一个

基金项目: 国家自然科学基金项目(60773128); 教育部博士点基金项目(20070359014); 安徽省自然科学基金项目(KJ2009A123)

收稿日期: 2009-06-20; 改回日期: 2009-09-18

第一作者简介: 苏本跃(1971 ~ ), 男, 副教授, 硕士生导师。2007 年于合肥工业大学获计算机应用技术专业博士学位。研究方向为计算机图形学、数字图像处理、科学与工程计算。E-mail: bysu1219@yahoo.com.cn

纯四元数<sup>[2]</sup>。因此一幅彩色图像可以看作一个  $M \times N$  的纯四元数矩阵,基于此模型,近年来国内外有大量的研究将四元数及四元数矩阵作为一种重要的彩色图像处理工具<sup>[3-5]</sup>,但相关的工作主要是采用四元数矩阵的奇异值分解,并将之应用于彩色图像的边缘检测和图像去噪等领域。

本文将构造一类非线性四元数混合插值样条,并尝试用于彩色图像插值中,将 R, G, B 三色通道并行处理,可有效提高彩色图像插值效果。

## 2 四元数的相关知识

设  $Q$  是实数域  $\mathbf{R}$  上的 4 维空间,令  $e, i, j, k$  分别表示  $Q$  的 4 个正交基底,则  $Q$  中的任何一个四元数  $q$  均可表示为  $q = [s, v] = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ 。当标量部分  $s = 0$  时,  $q$  称为一个纯四元数。对  $Q$  中的两个四元数  $q_1 = [s_1, v_1]$ ,  $q_2 = [s_2, v_2]$ , 有

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = [s_1, v_1] + [s_2, v_2] = [s_1 + s_2, v_1 + v_2] \\ kq = k[s, v] = [ks, kv] \end{cases}$$

定义四元数  $q$  的范数为  $\|q\| = \sqrt{s^2 + v^2}$ , 若  $\|q\| = 1$ , 则称  $q$  为单位四元数。

$(Q, +)$  是一个加群。对  $Q$  的基底规定乘法如下:

$$ee = e, e^2 = 1, ei = ie = i, ej = je = j$$

$$ek = ke = k$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

其中,  $e$  为单位四元数。由基底的乘法得:

$$\begin{aligned} q_1q_2 &= (a_0 + a_1i + a_2j + a_3k)(b_0 + b_1i + b_2j + b_3k) \\ &= [s_1s_2 - v_1v_2, s_1v_2 + s_2v_1 + v_1 \times v_2] \end{aligned}$$

易验证,四元数乘法满足结合律、分配律,但不满足交换律。又  $(Q, \cdot)$  是一个半群,且有单位元  $e$ 。

四元数  $q$  的共轭为  $q^* = [s, -v]$ ,  $q$  的逆为  $q^{-1} = q^* / \|q\|^2$ 。当  $q$  为单位四元数时,若取  $\theta = 2\arccos s, n = \frac{v}{\|v\|}$ , 则  $q = \left[ \cos \frac{\theta}{2}, n \sin \frac{\theta}{2} \right]$ 。

对于单位四元数  $q = [\cos \theta, n \sin \theta] \in \mathbf{S}^3$  (4 维球), 其中  $n \in \mathbf{S}^2$ 。

$$\text{定义: } \exp(n\theta) = \begin{cases} [\cos \theta, n \sin \theta] & n\theta \neq (0, 0, 0) \\ e & n\theta = (0, 0, 0) \end{cases}$$

$$\log(\cos \theta, n \sin \theta) = n\theta, \theta \geq 0$$

$$q^t = \exp(t \log(q)), t \in [0, 1]$$

## 3 彩色图像插值算法

### 3.1 基于球面线性四元数的彩色图像插值算法

根据单位球面的四元数线性插值公式:

$$\begin{aligned} q &= \text{slerp}(q_1, q_2, t) \\ &= \frac{q_1 \sin((1-t)\theta) + q_2 \sin(t\theta)}{\sin \theta} \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $\text{dot}(q_1, q_2) = \cos \theta$ ,  $t$  为插值参数。

大家知道,彩色图像都是由 R, G, B 3 个分量组成,按照四元数的定义,可以为彩色图像建立如下模型:

$$f_q(x, y) = 0 + f_R(x, y)i + f_G(x, y)j + f_B(x, y)k \quad (2)$$

其中,  $f_R(x, y)$ ,  $f_G(x, y)$ ,  $f_B(x, y)$  分别表示彩色图像 R, G, B 3 个分量的元素,  $x, y$  代表像素在图像矩阵中的位置。由此,一幅大小为  $M \times N$  的彩色图像  $A$  就表示成了一个四元数矩阵的形式:

$$A = \begin{bmatrix} f_q(0,0) & f_q(0,1) & \cdots & f_q(0,N-1) \\ f_q(1,0) & f_q(1,1) & \cdots & f_q(1,N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_q(M-1,0) & f_q(M-1,1) & \cdots & f_q(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (3)$$

为了应用单位球面的四元数线性插值公式,需要对矩阵  $A$  中的元素进行归一化处理。对于归一化后的  $A$  中的元素,采用单位球面的四元数线性插值方法,先横向插值,再纵向插值,  $t$  为插值参数,对  $t$  进行重新采样便可得到缩放的新的彩色图像。这里,当  $\sin \theta$  等于零时,采用单位球面的四元数线性插值基函数的极限形式,即

$$q = \text{slerp}(q_1, q_2, t) = (1-t)q_1 + tq_2 \quad (4)$$

### 3.2 基于非线性代数三角四元数样条的彩色图像插值算法

将文献[6]中的代数三角混合样条进行改造,重新构造插值基函数  $\tilde{B}_{i,k}(t)$ , 定义如下:

$$\begin{cases} \tilde{B}_{1,3}(t) = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos(\pi t) - \frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) \\ \tilde{B}_{2,3}(t) = 1 - t + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) \\ \tilde{B}_{3,3}(t) = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} - \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos(\pi t) + \frac{1}{2\pi}\sin(\pi t) \end{cases} \quad (5)$$

给定  $n+1$  个四元数控制点  $\{q_i\}$ , 定义代数三角混合四元数插值样条曲线  $q(t)$  为

$$q_i(t) = q_{i-1} \prod_{j=1}^3 (q_{i+j-2}^{-1} q_{i+j})^{\tilde{B}_{j,3}(t)} \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - 3$$

显然,  $q_i(0) = q_i, q_i(1) = q_{i+1}, (i = 1, 2, \dots, n - 2)$ , 经简单计算易知, 代数三角混合四元数插值样条曲线  $q(t)$  可达到  $C^2$  连续。

由此可以看出, 新构造的单位  $\mathbf{R}^4$  球面上的代数三角混合四元数插值样条曲线  $q(t)$  无需求解方程组即可满足插值条件, 且具有在任意一参数  $t$  处的四元数可精确求得、计算量小等优点。

在彩色图像的四元数插值中, 将彩色分量  $R, G, B$  看作一个纯四元数, 采用类似三次多项式样条插值图像方法, 对于式(3)  $A$  中的元素, 针对每一个  $4 \times 4$  方块, 采用式(6)进行插值, 可采用先横向插值, 再纵向插值方法,  $t$  为插值参数, 然后对  $t$  进行重新采样便可得到缩放后的新的彩色图像。

### 4 实验结果

以一幅  $128 \times 128 \times 3 \times 24$  bits 的彩色图像 flower.jpg 为例, 如图 1 所示, 在图 2 ~ 图 4 中, 将源

图图像均以横纵向 4 倍放大。图 2 为利用双三次多项式样条插值方法对源图  $R, G, B$  3 个分量分别插值进行放大处理的结果图像。图 3 和图 4 为分别利用球面四元数线性插值方法和代数三角混合四元数插值样条方法对源图进行放大处理的结果图像。图 5 ~ 图 7 为分别用 Prewitt 算子对图 2 ~ 图 4 进行边缘检测(阈值取 0.02)后的效果图。

从图 2 ~ 图 4 中可以看出双三次插值在某些边缘处仍有锯齿状, 并且从整体效果来看, 一定程度上模糊了边缘和细节部分。而运用四元数球面线性插值方法和代数三角混合四元数插值样条方法放大后的图像的清晰度和亮度较好。从图 5 ~ 图 7 中可以看出运用本文方法的图像的边缘细节比利用双三次插值样条方法放大的图像的细节更完全和清晰。



图 1 源图像



图 2 双三次样条插值方法



图 3 球面四元数线性插值方法



图 4 代数三角混合四元数插值样条方法



图 5 用 Prewitt 算子对图 2 进行的边缘检测

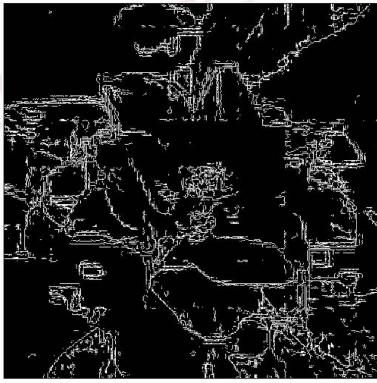


图 6 用 Prewitt 算子对图 3 进行的边缘检测



图 7 用 Prewitt 算子对图 4 进行的边缘检测

## 5 结 论

将彩色图像像素点的 3 个颜色分量当作一个纯四元数来处理,在充分考虑了图像 3 个颜色分量内在相关性及图像本身的非线性机制的基础上,运用了四元数球面线性插值方法和代数三角混合四元数插值样条方法分别对彩色图像进行插值处理。实验结果表明,四元数方法用于彩色图像插值时,所处理的图像清晰度和色彩亮度均较传统方法有较大改进,边缘细节上也更丰富,但是,对于代数三角混合四元数插值样条方法及其用于彩色图像处理时的算法复杂度及边缘处理等还有待进一步深入研究。

### 参考文献 (References)

1 Hu Min, Tan Jie-qing. Adaptive oscillatory rational interpolation for image

processing[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2006, **195**(1): 46-53.

2 Pei Soo-chang, Cheng Ching-min. A novel block truncation coding of color images by using quaternion-moment-preserving principle[J]. IEEE Transactions on Communications, 1997, **45**(5): 583-595.

3 Li Bao-qing. A color image edge detector based on quaternion representation[J]. Journal of Image and Graphics, 2003, **8**(7): 774-777. [李葆青. 基于四元数描述的彩色图像边缘检测器[J]. 中国图象图形学报, 2003, **8**(7): 774-777.]

4 Patrice Denis, Philippe Carre, Christine Fernandez-maloigne. Spatial and spectral quaternionic approaches for colour images[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, **107**(1): 74-87.

5 Shi Li-long, Funt Brian. Quaternion color texture segmentation[J]. Computer Vision and Image Understanding, 2007, **107**(1): 88-96.

6 Su Ben-yue, Tan Jie-qing. A family of quasi-cubic blended splines and applications[J]. Journal of Zhejiang University SCIENCE A, 2006, **7**(9): 1550-1560.