

基于四阶偏微分方程的盲图像恢复模型

马少贤 江成顺

(信息工程大学信息工程学院, 郑州 450002)

摘要 由于全变分 (total variation, TV) 正则化方法能够很好地保持边界, 因而在图像去噪和恢复中得到广泛的应用, 但其一个显著的缺点就是会在恢复出来的图像中产生阶梯效应。针对此问题给出了一种基于四阶偏微分方程 (PDE) 的盲图像恢复模型, 该模型在 Chan 和 Wong 的全变分模型的基础上, 用四阶范数来代替 TV 范数, 构造了一种新的能量泛函, 消除了全变分正则化方法所产生的阶梯效应。实验结果表明, 该模型能取得较好的图像恢复效果。

关键词 图像盲恢复 全变分正则化 四阶偏微分方程 阶梯效应

中图分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)01-0026-05

A New Method for Image Blind Restoration Based on Fourth-order PDE

MA Shao-xian JIANG Chen-shun

(Institute of Information Engineering, Information Engineering University, Zhengzhou 450002)

Abstract Many of the current methods for image denoising and restoration utilize total variation (TV) regularization to preserve its beneficial edge properties. However a particular caveat of TV regularization is the staircasing phenomenon in recovered images. A new blind restoration model based on a fourth-order partial differential equation (PDE) is proposed for image restoration, which improved the Chan and Wong's TV model. The new method is to introduce fourth-order norm into the energy function instead of TV norm, to overcome the staircasing in reconstructions from TV regularization. The result of experiment shows that this restoration model is more visible.

Keywords image blind restoration, TV regularization, fourth-order PDE, staircasing phenomenon

0 引言

由于在图像成像、复制、传输过程中, 不可避免地要造成图像的降质, 但在许多应用领域, 却需要清晰高质量的图像, 因此必须对降质图像进行恢复处理, 图像恢复就是从观测到的降质图像来重建原始图像, 它是图像处理、模式识别等的基础, 在天文学、遥感成像、医学成像等领域有着广泛的应用。

线性图像退化过程^[1]的一般模型为

$$I(\mathbf{x}) = Au(\mathbf{x}) + n(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

$$Au(\mathbf{x}) = \int_D h(\mathbf{x}, \mathbf{s})u(\mathbf{x} - \mathbf{s})d\mathbf{s}$$

其中, u 和 I 分别为原始图像和观测图像, $\Omega \subseteq \mathbf{R}^N$ 是图像支集, A 为模糊算子, D 为模糊算子支集, h 为点源扩散函数 (point spread function, PSF), n 为噪声。

关于原始图像和点源扩散函数的图像盲恢复是一个不定问题。近年来, 关于图像的盲恢复算法获得了较广泛的研究, 已提出了一些算法^[1-6]。这些算法大体分为以下两类: 一类是先辨识点源扩散

基金项目: 国家自然科学基金项目 (10571024)

收稿日期: 2008-05-19 改回日期: 2008-10-22

第一作者简介: 马少贤 (1984—), 男, 硕士研究生。主要研究方向为数值分析及优化计算、偏微分方程图像处理。E-mail: mashaox-

iar@gmail.com

函数, 然后采用经典的图像恢复算法进行恢复; 另一类是同时估计点源扩散函数和原始图像。目前成功的算法是以 Kundur 等人提出的利用非负和有限支撑约束的递归滤波盲图像恢复算法 (NAS-RIF)^[3] 以及 Rudin、Chen 等人提出的全变分 (TV) 正则化盲图像恢复算法^[5-7]。而 NAS-RIF 算法由于需预先知道图像的支持域, 且算法对噪声敏感等原因, 致使应用受到限制。全变分正则化盲图像恢复算法较为成功, 但由于该算法采用的是二阶偏微分方程 (PDE) 模型, 因此在恢复图像的同时, 会产生阶梯效应。而四阶 PDE 模型在去除噪声和保持边界的同时, 还能避免产生阶梯效应, 在图像去噪和恢复中获得了广泛的应用^[8-10]。本文将四阶 PDE 模型引入到图像的盲恢复中, 提出了一个新的能量泛函, 实验结果对比表明, 该模型具有较好的图形恢复性能。

1 图像盲恢复模型

由于随机噪声的存在, 因此图像盲恢复是一个不适定问题。通常可以通过引入正则化项来克服病态。其中全变分图像盲恢复是最成功的方法之一, 它能有效地复原图像中的边缘变化等不连续区域。

在未知点源扩散函数 h 和对原图像 u 无任何先验知识的条件下, You 和 Kaveh 在文献 [4] 中提出了用如下联合最小化模型来正则化 u 和 h :

$$m \min_{u, h} J(u, h) = m \min_{u, h} \frac{1}{2} \|Au - I\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \|u\|_{H^1}^2 + \beta \|h\|_{H^1}^2 \quad (1)$$

其中, $\alpha, \beta > 0$ 为正则化参数, Ω 为图像的某区域。

Chan 和 Wong 等人在改进 You-Kaveh 模型的基础上, 提出了如下正则化模型^[5] :

$$m \min_{u, h} J(u, h) = m \min_{u, h} \frac{1}{2} \|Au - I\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha \int_{\Omega} |\nabla u| dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla h| dx \quad (2)$$

该模型引入了 TV 函数, 很好地解决了图像区域不连续的问题, 但由于 TV 函数采用的是二阶 PDE 模型, 因此容易在平坦区域产生阶梯效应, 即在图像处理, 某些区域内灰度非常接近或相同, 若区域内的灰度相同, 则表示在该区域任意一点, 其灰度值的梯度为零, 即说明图像将向分块同灰度图像过渡, 致使图像看上去就像是由各个不同亮度的区域组成。

为了克服由 TV 正则化所产生的阶梯现象, 不

少学者提出相应的解决方法^[8-11], 其中一种有效的方法就是采用高阶范数来度量图像。文献 [8] 提出了如下的能量泛函:

$$E(u) = \iint |\nabla^2 u| d\Omega \quad (3)$$

其 Euler-Lagrange 方程为

$$\nabla^4 | \nabla^2 u | \nabla^2 u = 0 \quad (4)$$

此能量泛函对应下面的四阶偏微分方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla^2 [c(\nabla^2 u) \nabla^2 u] \quad (5)$$

其中, $c(s) = \frac{f'(s)}{s}$, $f(s)$ 为非负增函数, 且 $f'(s) > 0$ 。

本文分别采用 TV 模型和四阶 PDE 模型对 1 维信号进行恢复, 恢复结果如图 1 所示。由图 1 可明显看出, 四阶模型很好地克服了阶梯效应。

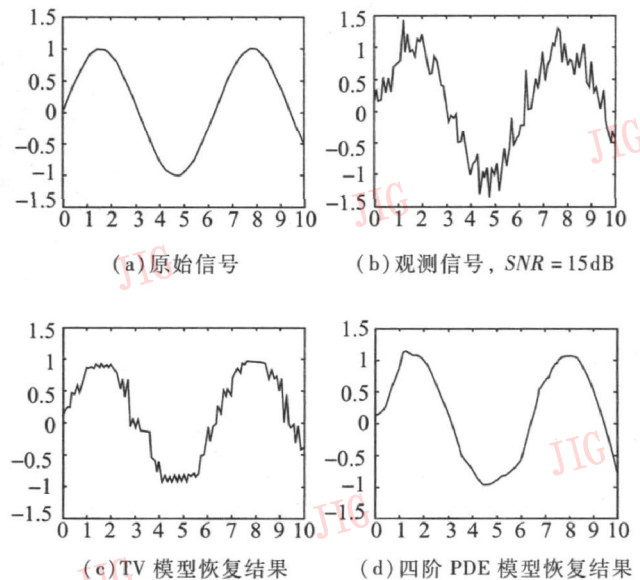


图 1 1 维信号恢复效果对比

Fig 1 Restoration effect of 1-D signal

由于满足平面方程的图像, 其强度函数的 Laplace 算子为零, 并满足式 (4), 因此一个平面图像是式 (4) 的一个不动点。由此可以看出, 平面图像是式 (5) 的全局最小解, 说明如下:

由于 $f(|\nabla^2 u|)$ 是非负的, 所以能量泛函 $E(u)$ 满足: $E(u) > 0$ 且 $f(|\nabla^2 u|)$ 是 $|\nabla^2 u|$ 的增函数, 所以它的全局最小值点在 $|\nabla^2 u| = 0$ 处。相应地, $E(u)$ 的全局最小点为

$$|\nabla^2 u| \equiv 0 \quad x \in \Omega \quad (6)$$

一个平面图像显然满足式 (6), 因此点 x 是能量泛函的全局最小值点。

如果 $f(\cdot)$ 是凸函数, 即满足对任意的 $s \geq 0$ 有

$f''(s) \geq 0$ 则平面图像是 $E(u)$ 的全局唯一最小解, 因为在此条件下能量泛函 $E(u)$ 也是凸函数。所以式 (5) 的演化是一个越来越平滑的过程, 直至变成平面图像。

若 $f(\cdot)$ 不是凸函数, 即满足 $s \geq 0$ 并使得 $f''(s) < 0$ 则能量泛函 $E(u)$ 可能不是凸函数。这样就可能存在别的局部或全局最小解, 可以证明分段平面图像就是一个极小解^[8]。

采用四阶偏微分方程, 其最大的优点是它是用分片平面图像来近似边界, 从而消除了二阶非线性扩散所造成的阶梯效应。

2 基于四阶 PDE 的图像盲恢复模型

因此, 本文通过引入四阶 PDE 模型来构造如下的能量函数:

$$J(u, h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Au - I|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla^2 u| dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla h| dx \tag{7}$$

定理 1 若用式 (7) 分别对 u 和 h 进行变分, 则能量极大或极小时的 Euler-Lagrange 方程分别为

$$\alpha \nabla^2 \left| \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right| - A^* (Au - I) = 0 \tag{8}$$

$$\beta \nabla \left| \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right| - B^* (Bh - I) = 0 \tag{9}$$

其中, $Bh = \int_{\Omega} u(s)h(x-s) ds$, A^* 和 B^* 分别是 A 和 B 的伴随算子。

证明: 用 $\delta_u J$ 表示 J 关于函数 u 的变分, $\delta_h J$ 表示 J 关于函数 h 的变分。

$$\begin{aligned} \delta_u J &= \delta \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |Au - I|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} |\nabla^2 u| dx + \beta \int_{\Omega} |\nabla h| dx \right] \\ &= \int_{\Omega} \delta_u (h^* u) (h^* u - I) dx + \alpha \int_{\Omega} \delta_u (|\nabla^2 u|) dx \\ &= - \int_{\Omega} h^* (-x)^* (h^* u - I) dx + \alpha \int_{\Omega} \nabla^2 \left| \frac{\Delta u}{|\Delta u|} \right| dx \\ &= \int_{\Omega} -A^* (Au - I) + \alpha \nabla^2 \cdot \left| \frac{\Delta u}{|\Delta u|} \right| dx \end{aligned}$$

当能量极大或极小时, 因 $\delta_u J = 0$ 故其对应的 Euler-Lagrange 方程为

$$\alpha \nabla^2 \left| \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right| - A^* (Au - I) = 0$$

同样可得到以下与 h 变分对应的 Euler-Lagrange 方程:

$$\beta \nabla \left| \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right| - B^* (Bh - I) = 0$$

定理证毕。

上述定理给出的是与式 (7) 对应的 Euler-Lagrange 方程组, 这事实上是一个稳态方程组。通过梯度下降流法, 可将其转化为相应的非线性反映扩散方程, 即

$$u_t = \alpha \nabla^2 \left| \frac{\Delta u}{|\Delta u|} \right| - A^* (Au - I) \tag{10}$$

$$h_t = \beta \nabla \left| \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right| - B^* (Bh - I) \tag{11}$$

最终得到如下的非线性反映扩散方程组:

$$\begin{cases} u_t = \alpha \nabla^2 \left| \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right| - A^* (Au - I) \\ h_t = \beta \nabla \left| \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right| - B^* (Bh - I) \\ \left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}^+} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial n} \right|_{\partial \Omega \times \mathbb{R}^+} = 0 \end{cases} \tag{12}$$

初始值 $u(x, 0) = u_0(x)$ 满足周期性条件。

3 数值格式

这里采用交替迭代法进行求解。为了避免式 (10)、式 (11) 中 $1/|\nabla^2 u|$ 及 $1/|\nabla h|$ 的奇异性, 需增加一个小的正参数 ϵ 将 $1/|\nabla^2 u|$ 转化为 $1/\sqrt{|\nabla^2 u|^2 + \epsilon}$ 将 $1/|\nabla h|$ 转化为 $1/\sqrt{|\nabla h|^2 + \epsilon}$ 。

对式 (10)、式 (11) 进行离散化处理, 设时间步长为 Δt 空间步长为 $k = 1$ 则时间和空间坐标划分如下:

$$\begin{aligned} t &= n \Delta t \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ x &= ik \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \\ y &= jk \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

其中, $M \times N$ 是指图像大小。

对式 (10) 中的 $\nabla^2 \left| \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \right|$ 项, 首先离散 Δu 即

$$\nabla^2 u_{i,j}^{(n)} = \frac{u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} - 4u_{i,j}^{(n)}}{k^2} \tag{13}$$

边界条件为

$$\begin{aligned} u_{-1,j}^{(n)} &= u_{0,j}^{(n)}, \quad u_{M+1,j}^{(n)} = u_{M,j}^{(n)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \\ u_{i,-1}^{(n)} &= u_{i,0}^{(n)}, \quad u_{i,N+1}^{(n)} = u_{i,N}^{(n)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

然后计算下面的函数:

$$g(\nabla^2 u) = \frac{\nabla^2 u}{|\nabla^2 u|} \tag{14}$$

$$g_{i,j}^n = g(\nabla^2 u_{i,j}^{(n)}) \tag{15}$$

最后, 离散 Δg

$$\Delta g_{ij}^{(n)} = \frac{g_{i+1,j}^{(n)} + g_{i-1,j}^{(n)} + g_{i,j+1}^{(n)} + g_{i,j-1}^{(n)} + 4g_{ij}^{(n)}}{k^2} \quad (16)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} g_{-1,j}^{(n)} &= g_{0,j}^{(n)}, g_{M+1,j}^{(n)} = g_{M,j}^{(n)} \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \\ g_{i,-1}^{(n)} &= g_{i,0}^{(n)}, g_{i,N+1}^{(n)} = g_{i,N}^{(n)} \quad i = 0, 1, 2, \dots, M \end{aligned}$$

对于式 (10) 中的 $A^* (Au - I)$ 项, 由于 $A^* (Au - I) = \hat{h}^* (h^* u - I)$, 因此可采用快速傅里叶变换方法求解。

则式 (10) 的最终离散格式为

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \phi(u^{(n)}) \quad (17)$$

其中, $\phi(u) = \alpha \Delta g - \hat{h}^* (h^* u - I)$ 。

对式 (11) 前半部分采用中心差分格式离散, 后半项 $B^* (Bh - I) = \hat{u}^* (u^* h - I)$ 依然采用快速傅里叶变换。可得

$$h^{(n+1)} = h^{(n)} + \Delta t \varphi(h^{(n)}) \quad (18)$$

其中, $\varphi(h) = \beta \nabla \left| \frac{\nabla h}{|\nabla h|} \right| - \hat{u}^* (u^* h - I)$ 。

整个算法步骤如下:

- (1) 初始化 $u^{(0)} = I, h^{(0)} = \delta(x, y), n = 0$
- (2) 用式 (18) 求解 $h^{(n+1)}$, 并用下式进行约束,

$$h^{(n+1)}(x, y) = \begin{cases} h^{(n+1)}(x, y) & h^{(n+1)}(x, y) > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h(x, y) = \frac{1}{2} [h(x, y) + h(-x, -y)]$$

$$h^{(n+1)}(x, y) = \frac{h^{(n+1)}(x, y)}{\int_{\Omega} h^{(n+1)}(x, y) dx dy}$$

- (3) 用式 (17) 求解 $u^{(n+1)}$, 并用下式进行约束:

$$u^{(n+1)}(x, y) = \begin{cases} u^{(n+1)}(x, y) & u^{(n+1)}(x, y) > 0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

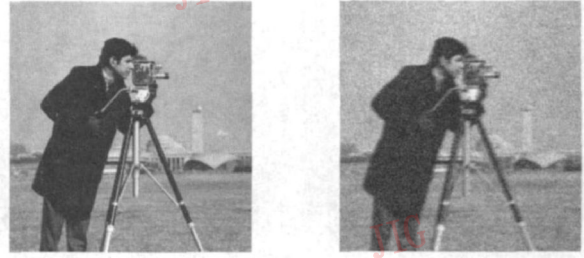
判断是否满足终止条件: 是, 则停止; 否则令 $n = n + 1$ 转到第 2 步。

4 实验结果分析

为验证本文算法的有效性, 采用几幅图像进行了仿真实验。程序采用 Matlab 编写, 实验是在 Pentium 4 CPU 3.00GHz, 512MB 内存, Matlab 7.0 环境下运行。有关参数参照文献 [5] 的方法进行选择, $\alpha = 2 \times 10^{-6}$, $\beta = 1.5 \times 10^{-5}$, 实验的终止条件为迭代次数 $n = 30$ 。初始图像估计 $u_0 = I$, 初始点传播函数 $h_0 = \delta(x, y)$ 。

第 1 幅是采用 Camera 图像进行模拟的恢复效

果, 图像大小为 256×256 。图 2(a)、图 2(b) 分别为 Camera 原始图像和模糊图像, 其中模糊图像是通过原始图像进行运动模糊后, 再叠加一定水平的高斯白噪声得到, 峰值信噪比 (PSNR) 为 19.11dB。图 3 是分别采用 Chan-Wong 模型 (简称 C-W 模型) 和本文算法的恢复效果。



(a) 原始图像 (b) 模糊图像

图 2 Camera 原始图像和模糊图像

Fig. 2 Original Camera image and noise image

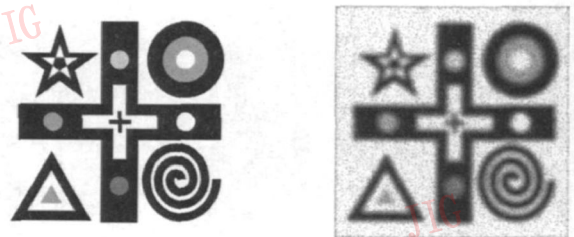


(a) C-W 模型的恢复效果 (b) 本文模型的恢复效果

图 3 Camera 图像恢复效果

Fig. 3 Restoration effect of Camera image

第 2 幅图像是一幅由多个不同的几何图形组成的图像, 图像大小为 320×320 。图 4 中 (a)、图 4 (b) 分别为原始图像和模糊图像, 其中模糊图像是通过原始图像同高斯 PSF 卷积后, 再叠加一定水平的加性噪声得到, 其峰值信噪比为 13.105dB。图 5 是分别采用 C-W 模型和本文模型恢复的图像。



(a) 原始图像 (b) 模糊图像

图 4 几何图像的原始图像和模糊图像

Fig. 4 Original geometry image and noise image

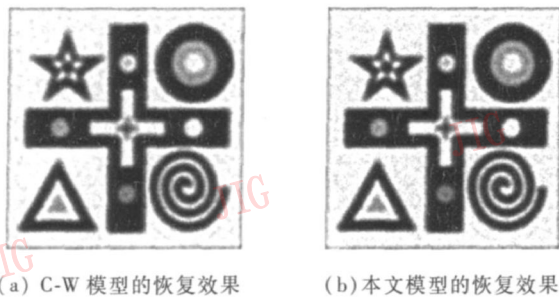


图 5 几何图像的恢复效果

Fig 5 Restoration effect of geometry image

从图 3、图 5 和表 1 的对比可以明显地看出, 本文模型恢复的图像要比文献 [5] 模型恢复的图像效果有较大的改进。从时间上来看, 两种算法所用的时间相差不多, 但由于本文模型很好地克服了由二阶模型造成的阶梯效应, 较好地复原了图像的细节, 因此应用效果更好。实验结果对比表明, 本文模型能获得较好的图像恢复效果。

表 1 图像盲恢复实验结果对比

Tab 1 Contrast of image blind restoration

| | Camera 图像 | 几何图像 |
|------------------------|-----------|---------|
| C-W 模型处理所需时间 /s | 135.006 | 112.003 |
| 本文模型处理所需时间 /s | 140.203 | 120.250 |
| C-W 模型恢复图像的 PSNR 值 /dB | 24.575 | 14.640 |
| 本文模型恢复图像的 PSNR 值 /dB | 30.898 | 16.063 |

5 结 论

本文在 C-W 模型的基础上, 通过引入一个四阶范数来度量图像, 克服了采用二阶模型恢复所产生的阶梯效应。实验对比表明, 该模型能获得较好的图像恢复效果。进一步的工作是提高算法的计算速度, 以便能够更好地应用于实践。

参考文献 (References)

- [1] Kurdur D, Hatzinakos D. Blind image deconvolution [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 1996, 13(3): 43-64.
- [2] Zhang Hang, Luo Daryong. Status and development of study on blind image restoration algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 2004, 9(10): 1145-1152. [张航, 罗大庸. 图像盲复原算法研究现状及其展望 [J]. 中国图象图形学报, 2004, 9(10): 1145-1152.]
- [3] Kurdur D, Hatzinakos D. Blind image restoration via recursive filtering using deterministic constraints [C] // Proceedings of the 1996 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, Atlanta, GA, USA, 1996, 4: 2283-2286.
- [4] You Y, Kaveh M. A regularization approach to joint blur identification and image restoration [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(3): 416-428.
- [5] Chan T, Wong C. Total variation blind deconvolution [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 370-395.
- [6] Chan T, Wong C. Convergence of the alternating minimization algorithm for blind deconvolution [J]. Linear Algebra and Its Application, 2000, 316(3): 259-285.
- [7] Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithm [J]. Physica D, 1992, 60(4): 259-268.
- [8] You Y, Kaveh M. Fourth-order partial differential equations for noise removal [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10): 1723-1730.
- [9] Chan T, Marquina A, Mulet P. High-order total variation based image restoration [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2000, 22(2): 503-516.
- [10] You Y, Kaveh M. Image enhancement using fourth order partial differential equations [C] // Proceedings of the Thirty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems & Computers, Pacific Grove, CA, USA, 1998, 2: 1677-1681.
- [11] Lysaker M, Lundervold T, Tai X. Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2003, 12(12): 1579-1590.