

V 系统在图像消噪中的应用

欧梅芳 宋瑞霞

(北方工业大学理学院, 北京 100041)

摘要 小波变换是一种强有力的图像消噪方法,选取合适的小波变换具有重大意义。 k 次V系统是一类在 $L_2[0,1]$ 空间上新建立的完备正交系,它由分段 k 次多项式组成,具有多小波(multi-wavelet)的多分辨(multi-resolution)特性,特别是它的基函数中既有连续的函数又有间断的函数,这是它与其他经典正交系的不同。文中利用线性V系统及其相应的正交V变换,探索V系统在数字图像消噪中的应用。将V系统的消噪效果与经典的小波消噪进行比较,采用PSNR作为评价标准,利用MATLAB进行大量的试验,结果表明V系统对高斯白噪声、椒盐噪声以及乘性斑点噪声的消除均有明显的优势。

关键词 正交系 V系统 离散V变换 图像消噪 小波

中图法分类号: TP391 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)07-1447-06

The Application of V-system in the Digital Image Denoising

OU Mei-fang, SONG Rui-xia

(College of Sciences, North China University of Technology, Beijing 100041)

Abstract Wavelet transform is a powerful method in image denoising, and it is of great significance to select an appropriate kind of wavelet transform. V-system of degree k is a class of complete orthogonal function system on $L_2[0,1]$, which is composed of sub-function of degree k , with the characteristics of the multi-resolution of multi-wavelet. Particularly, its basic function contains both continuous and discontinuous functions, which makes it different from classic orthogonal function system. In this article, a new kind of orthogonal discrete transform called DVT is proposed, and the application of DVT in image denoising is studied. The comparisons of the DVT with wavelet transform in image denoising are given. Using PSNR as evaluation criteria and using MATLAB processing to carry out a lot of experiments, the comparison results indicate that the linear DVT has obvious advantages in the denoising of Gaussian noise, salt & pepper noise and speckle noise.

Keywords orthogonal function system, V-system, discrete V-transform, image denoising, wavelet

1 引言

噪声是影响图像质量的主要因素。噪声的污染使图像偏离了真实情况,极大地影响了人们从图像中提取信息的精确度,图像消噪是图像预处理的主要任务之一,目的是提高消噪后图像的质量,突出图

像特征。因此,如何既去掉噪声、又尽量保持图像细节,是图像消噪的主要任务。

消噪是图像处理中极其重要的步骤。近年来,作为数学领域半个世纪以来工作结晶的小波分析得到了快速发展,被被誉为“数学显微镜”。小波分析理论因独特的时频多尺度分析技术,而成为图像处理及信号处理等许多学科的经典数学工具,同样也

基金项目:国家重点基础研究发展计划(973)项目(2004CB318000);国家自然科学基金重点项目(60133020,10771002);浙江大学CAD&CG国家重点实验室开放课题(A0503);澳门科技发展基金项目(045/2006/A)

收稿日期:2008-08-18; **改回日期:**2008-09-25

第一作者简介:欧梅芳(1982~),女。北方工业大学应用数学专业硕士研究生。主要研究领域为计算机图形学,图像处理。
E-mail: omfang@yahoo. cn

是图像消噪的一种强有力的方法。小波变换是一种多尺度信号分析方法,克服了傅里叶变换固定分辨率的弱点,既可分析信号概貌,又可分析信号的细节。利用小波变换进行图像消噪一直是个热门的题目^[1-8]。

目前,针对不同的实际背景,已经有很多不同的小波函数。对图像消噪问题,如何选取更有效的小波函数,无疑有重要的实用价值。众所周知, Haar 函数系是在小波分析出现之时,被视为最简单、最基本、并应用广泛的有限区间上的小波函数。2005 年,本文作者构造了 $L_2[0,1]$ 空间上的一类正交完备函数系,命名为“ k 次 V 系统”^[9],它可以看作一类多小波,是由分片多项式构成的,结构简洁且有多分辨的特性,有详细简明的数学表达式。其中 0 次 V 系统就是 Haar 函数系。V 系统在几何信息的正交表达、模式识别、点云数据拟合、数字水印等方面的相应探索,取得了理想的效果^[10-13]。离散 V 变换(DVT)是 V 系统离散化之后得到的正交变换,在图像变换中与斜变换和 DCT(discrete cosine transform)相比更有优势^[14]。本文将离散 V 变换应用于图像消噪,并将其与小波消噪作比较,为图像消噪、图像压缩等图像处理领域提供一种新工具。

2 线性 V 系统及其多分辨特性

本节简要介绍线性 V 系统,详细细节见文献[9]。

线性 V 系统是 k 次 V 系统当 $k=1$ 时的情形,是 $L_2[0,1]$ 空间上的完备正交函数系,是分组分类来构造的。

第 1 组函数是由 $[0,1]$ 区间上的前 2 个 Legendre 多项式组成:

$$V_{1,1}^1(x) = 1, V_{1,1}^2(x) = \sqrt{3}(1-2x) \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1)$$

第 2 组函数是由两个生成元构成:

$$V_{1,2}^1 = \begin{cases} \sqrt{3}(1-4x) & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \sqrt{3}(4x-3) & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$V_{1,2}^2 = \begin{cases} 1-6x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 5-4x & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

第 n 组的一般项的表达式为(这组的函数分成了 2 类):

第 1 类:

$$V_{1,n}^{1,j}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-2}} V_{1,2}^1 \left[2^{n-2} \left(x - \frac{j-1}{2^{n-2}} \right) \right] & x \in \left(\frac{j-1}{2^{n-2}}, \frac{j}{2^{n-2}} \right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3)$$

第 2 类:

$$V_{1,n}^{2,j}(x) = \begin{cases} \sqrt{2^{n-2}} V_{1,2}^2 \left[2^{n-2} \left(x - \frac{j-1}{2^{n-2}} \right) \right] & x \in \left(\frac{j-1}{2^{n-2}}, \frac{j}{2^{n-2}} \right) \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (4)$$

$$n = 3, 4, \dots; j = 1, 2, \dots, 2^{n-2}$$

这里 $V_{1,n}^{i,j}(x)$ 表示线性 V 系统中第 n 组第 i 类的第 j 个函数,是通过第 2 组函数压缩再复制得到的,在这个意义下说第 2 组的函数是生成元。

$$\text{令 } V_0 = \text{span} \{ V_{1,1}^1(x), V_{1,1}^2(x) \},$$

$$\text{记 } \begin{cases} W_0 = \text{span} \{ V_{1,2}^1(x), V_{1,2}^2(x) \} \\ W_1 = \text{span} \{ V_{1,3}^1(x), V_{1,3}^2(x); V_{1,3}^{2,1}(x), V_{1,3}^{2,2}(x) \} \end{cases} \quad (5)$$

对 $n = 3, 4, 5, \dots$, 令

$$W_{n-2} = \text{span} \{ V_{1,n}^{1,1}(x), V_{1,n}^{1,2}(x), \dots, V_{1,n}^{1,2^{n-2}}(x); V_{1,n}^{2,1}(x), V_{1,n}^{2,2}(x), \dots, V_{1,n}^{2,2^{n-2}}(x) \} \quad (6)$$

则 $\dim W_{n-2} = 2 \cdot 2^{n-2}$ 。

令 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j, j = 0, 1, 2, 3, \dots$, 于是得到:

$$V_j \perp W_j, V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \dots, \text{且 } \bigcup_{j=0}^{\infty} V_j = L_2[0,1]$$

因此说线性 V 系统具有多分辨特性。

3 基于 V 系统的图像消噪

V 系统的图像消噪需要经过离散 V 变换来实现,离散 V 变换是 V 系统离散化之后得到的正交变换。

从 V 系统的基函数得到离散 V 变换所对应的正交矩阵 V_N (N 阶矩阵)的过程为:

(1) 计算 k 次 V 系统中前 N 个基函数在 $[0,1]$ 区间的 $2N$ 等分点处的函数值,得到一个 N 阶矩阵,即采用基函数等间隔取点法得到一个 N 阶矩阵,一般来说这个矩阵不一定是正交矩阵。

(2) 对上述 N 阶矩阵进行正交化,得到正交矩阵 V_N 。本文用到的 V_{16} 的表达式为

以 256×256 的 Lena 和 512×512 的 peppers 图像为例,进行消噪实验,并将本文的消噪方法与经典的 (sym4 与 db4) 小波消噪进行比较。为了说明分块

对消噪结果的影响,本文采用不同的分块进行实验,消噪结果见表 1、表 2。限于篇幅仅在图 1,图 2 中给出了表 1、表 2 中的两种情形的消噪图例。

表 1 Lena 图像的消噪结果 (PSNR) 比较
Tab. 1 The comparison of denoising on the image of Lena

消噪方法	Gaussian		salt & pepper		speckle	
	均值 0, 方差 0.01	均值 0, 方差 0.06	噪声密度 0.05	噪声密度 0.09	方差 0.04	方差 0.08
V 消噪 (本文方法) (8×8 分块)	20.595 6	20.349 9	20.487 7	19.880 7	23.546	21.214 9
V 消噪 (本文方法) (16×16 分块)	20.490 4	20.310 2	20.346 5	19.851 7	23.460 8	21.099 5
V 消噪 (本文方法) (32×32 分块)	20.508 1	20.296 2	20.260 4	19.816 3	23.374	21.047 1
V 消噪 (本文方法) (64×64 分块)	20.492 3	20.313 0	20.094 0	19.809 8	23.314 3	21.040 2
V 消噪 (本文方法) (256×256 分块)	20.476 6	20.291 6	19.991 4	19.807 3	23.327 8	21.025 3
小波消噪 (db4)	19.903 1	19.590 1	17.565 2	17.851 7	21.785 1	19.247 7
小波消噪 (sym4)	19.705 8	19.602 0	17.054 2	17.712 3	21.786 2	19.252 0

表 2 peppers 图像的消噪结果 (PSNR) 比较
Tab. 2 The comparison of denoising on the image of peppers

消噪方法	Gaussian		salt & pepper		speckle	
	均值 0, 方差 0.01	均值 0, 方差 0.06	噪声密度 0.05	噪声密度 0.09	方差 0.04	方差 0.08
V 消噪 (本文方法) (8×8 分块)	20.556 8	20.530 9	19.598 8	17.952 9	20.468 8	18.941 9
V 消噪 (本文方法) (16×16 分块)	20.513 9	20.491 9	19.425 7	17.891 5	20.407 0	18.870 2
V 消噪 (本文方法) (32×32 分块)	20.511 2	20.482 3	19.362 4	17.890 7	20.383 7	18.865 3
V 消噪 (本文方法) (64×64 分块)	20.498 2	20.453 8	19.340 5	17.840 9	20.338 8	18.829 8
V 消噪 (本文方法) (256×256 分块)	20.504 1	20.456 7	19.305 4	17.823 1	20.326 8	18.789
V 消噪 (本文方法) (512×512 分块)	20.478 0	20.460 9	19.333	17.871 1	20.325 7	18.825 6
小波消噪 (db4)	19.932 5	19.905 7	18.354 2	17.760 3	19.811 4	17.189 0
小波消噪 (sym4)	19.910 1	19.875 6	18.315 4	17.801 9	19.774 2	17.181 3

从表 1、表 2 及图 1、图 2 看出,对实验中的 3 类

噪声,从主观视觉上看,V 消噪后的图像边缘明显比



(a) 原图



(b) 加入Gaussian噪声(均值为0, 方差为0.01)



(c) V消噪(8×8分块)
(本文方法PSNR=20.595 6)



(d) 小波(sym4)消噪(PSNR=19.705 8)

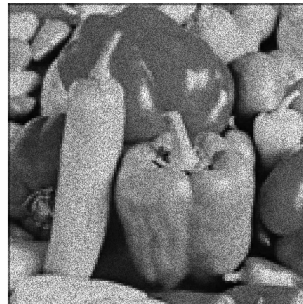


(e) 小波(db4)消噪(PSNR=19.903 1)

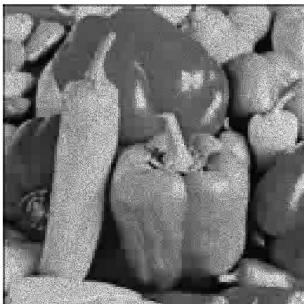
图 1 含白噪声的图像消噪(噪声类型 Gaussian)
Fig. 1 Denoising of image with white noise(Gaussian)



(a) 原图



(b) 加入speckle噪声(噪声密度为0.08)



(c) V消噪(本文方法PSNR=18.870 2)



(d) 小波(sym4)消噪(PSNR=17.181 3)



(e) 小波(db4)消噪(PSNR=17.189 0)

图 2 含乘性噪声的图像消噪(噪声类型是 speckle)
Fig. 2 Denoising of image with speckle noise

两类小波 (sym4, db4) 消噪后的图像更清晰; 从客观数量上分析, V 消噪后的图像的 PSNR 明显优于两类经典的小波消噪。从理论上分析, 是由于 V 系统既包含连续的、也包含间断的基函数, 而且具有有限区间上的多小波的多分辨率结构, 使得 V 变换比较适合纹理复杂及带有较多突变的图像, 本文实验的 Lena 图像和 peppers 图像及 3 类噪声恰好符合这一特征。实验中的分块处理并不是必需的, 只是为了减少运算量, 不同大小的分块并没有对消噪结果产生必然的影响。

5 结 论

V 变换作为一类新的正交变换, 在几何信息重构、模式识别、数字水印等方面, 已经有若干应用上的成功探索例证。本文将线性 V 变换应用到数字图像处理领域的图像消噪问题。实验结果表明, 离散 V 变换在图像消噪中, 对消除高斯白噪声和椒盐噪声以及乘性斑点噪声比 sym4, db4 更有优势。进一步的工作很多, 比如对更多类型噪声的消噪、对阈值更合理的选取、对高次 V 系统的图像消噪研究等。

参考文献 (References)

- 1 Donoho D L. Denoised by soft thresholding [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1995, **41**(3): 613-627.
- 2 Averbuch A, Lazar D, Israeli M. Image compression using wavelet transform and multiresolution decomposition [J]. IEEE Transactions on Image Process, 1996, **5**(1): 4-15.
- 3 Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage [J]. Biometrika, 1994, **81**(3): 425-455.
- 4 Shark L K, Yu C. Denoising by optimal fuzzy thresholding in wavelet domain [J]. Electronics Letters, 2000, **36**(6): 581-582.
- 5 Liu Z G, Qian Q Q. Adaptive shrinkage noising method of fault transient

- signals with Multi-wavelets [J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, **26**(7): 878-880.
- 6 Chu Heng, Zhu Wei-le. An adaptive wavelet image denoise scheme using pixel classification [J]. Journal of Optoelectronics · Laser, 2007, **18**(4): 482-486.
- 7 Zha Yu-fei, Bi Du-yan. Adaptive wavelet multithresholding for image denoise [J]. Journal of Image and Graphics, 2005, **10**(5): 567-570.
- 8 Li Xing-mei, Yan Guo-ping, Chen Liang, et al. Image denoise based on soft-threshold and edge enhancement [A]. In: Proceedings of the Second Workshop on Digital Media and its Application in Museum & Heritage [C], Chongqing, China, 2007: 53-56.
- 9 Song Rui-xia, Ma Hui, Wang Tian-jun, et al. Complete orthogonal V-system and its applications [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2007, **6**(3): 853-871.
- 10 Liang Yan-yan, Song Rui-xia, Qi Dong-xu. Complete orthogonal function system V and points cloud fitting [J]. Journal of System Simulation, 2006, **18**(8): 2109-2113. [梁延研, 宋瑞霞, 齐东旭. 完备正交 V-系统与点云数据拟合, 系统仿真学报, 2006, **18**(8): 2109-2113.]
- 11 Liang Yan-yan, Song Rui-xia, Wang Xiao-chun, et al. Complete orthogonal V-system and it's application in Geometrical information reconstruction [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, **19**(7): 871-875. [梁延研, 宋瑞霞, 王小春等. 完备正交 V-系统及其在几何信息重构中的应用 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, **19**(7): 871-875.]
- 12 Ma H, Song R X, Wang X C. V-descriptor and B-spline [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2006, **18**(11): 1717-1722. [马辉, 宋瑞霞, 王小春. V 描述子与 B 样条曲线 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2006, **18**(11): 1717-1722.]
- 13 Song Rui-xia, Liang Yan-yan, Wang Xiao-chun, et al. Elimination of Gibbs phenomenon in computational information based on the V-system [A]. In: Proceedings of The Second International Conference on Pervasive Computing and Applications [C], Birmingham, UK, 2007: 337-341.
- 14 Song Rui-xia, Ou Mei-fang. The Application of V-system in the digital image transform [A]. In: Proceedings of the IEEE International Conference on Information Acquisition [C], Zhangjiajie, Hunan, 2008: 296-301.