

## 2 维异方差鉴别分析及其在人脸识别中的应用

甘俊英 何思斌

(五邑大学信息学院, 江门 529020)

**摘要** 在2维线性鉴别分析(2DLDA)的基础上,介绍了2维异方差鉴别分析(2DHDA),并将其应用于人脸识别。2DHDA算法去除了2DLDA算法样本类内协方差相等的约束,克服了异方差鉴别分析(HDA)算法的“小样本”问题。首先,根据2DLDA准则定义2DHDA准则;然后,将2DHDA准则取对数,用梯度下降法求得最优投影矩阵,人脸图像向最优投影矩阵投影提取人脸图像的特征;最后,最小距离分类器完成人脸识别。基于ORL与Yale混合人脸数据库的实验结果表明了2DHDA应用于人脸识别的有效性。

**关键词** 2维异方差鉴别分析(2DHDA) 2维线性鉴别分析(2DLDA) 人脸识别

中图法分类号: TP301.6 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)10-2122-04

## Two-dimensional Heteroscedastic Discriminant Analysis and Applications in Face Recognition

GAN Jun-ying, HE Si-bin

(School of Information, Wuyi University, Jiangmen 529020)

**Abstract** On the basis of two-dimensional linear discriminant analysis(2DLDA), a novel discriminant analysis named two-dimensional heteroscedastic discriminant analysis(2DHDA) is introduced, and is used for face recognition. In 2DHDA, equal within-class covariance constraint is removed and “small sample size” problem of heteroscedastic discriminant analysis(HDA) is solved. Firstly, criterion of 2DHDA is defined according to that of 2DLDA. Secondly, criterion of 2DHDA, log term is taken, and then the optimal projection matrix is solved by gradient descent algorithm. Thirdly, facial images are projected onto the optimal projection matrix, then, 2DHDA features of face images are extracted. Finally, nearest neighbor classifier is selected to perform face recognition. Experimental results based on olivetti research laboratory (ORL) and Yale mixture face database show the validity of 2DHDA for face recognition.

**Keywords** two-dimensional heteroscedastic discriminant analysis, two-dimensional linear discriminant analysis, face recognition

## 1 引言

提取有效的人脸鉴别特征是人脸识别获得较高识别率的关键。然而,受表情变化和光照变化等因素的影响,人脸图像的特征提取已成为一项具有挑战性的工作<sup>[1]</sup>。线性鉴别分析(LDA)是一种有效

的特征提取和降维算法<sup>[2-3]</sup>,广泛应用于模式识别和计算机视觉等领域中。然而,线性鉴别分析经常遇到“小样本”问题,即当训练样本数小于样本的维数时,训练样本的类内协方差矩阵为奇异矩阵。2维线性鉴别分析(2DLDA)<sup>[4]</sup>直接采用样本的2维像素矩阵进行训练,克服了LDA算法的“小样本”问题。然而,文献[5]和[6]的研究结果表明,LDA是

基金项目:广东省自然科学基金项目(07010869,032356)

收稿日期:2009-06-11;改回日期:2009-08-05

第一作者简介:甘俊英(1964~),女。五邑大学信息学院院长,硕士生导师,教授,主要研究方向为生物特征融合与识别。

E-mail: jyg@wyu.cn

一个高斯模型的最大似然估计,满足两个先验的假设:(1)样本的鉴别特征都在一个低维的特征子空间里;(2)每类样本的类内协方差矩阵相等。因此,当每类样本的类内协方差矩阵为异方差时,LDA 和 2DLDA 算法不能得到最优投影矩阵和取得最好的识别率<sup>[5-6]</sup>。

异方差鉴别分析(HDA)<sup>[7-9]</sup>是 LDA 算法的延伸,去除了 LDA 算法等样本类内协方差矩阵的约束,提出了更合理的优化目标,使得提取的特征更具鉴别能力。HDA 算法可以被看作是一个协方差矩阵满秩高斯模型的最大似然投影,其约束为最大化样本类间散度<sup>[10]</sup>。HDA 算法广泛应用于语音识别中<sup>[7-11]</sup>,其识别率优于 LDA 算法。但 HDA 与 LDA 算法一样,当样本维数较高时,出现“小样本”问题,因而不能计算最优投影矩阵。本文根据 2DLDA 和 HDA 算法的特点,介绍了 2 维异方差鉴别分析(2DHDA),并将其应用于人脸识别中。实验结果表明了 2DHDA 算法应用于人脸识别的有效性。

## 2 2DHDA 算法

2 维算法与 1 维算法在表征人脸图像时,2 维算法用一个矩阵,而 1 维算法用一个向量。假设  $C$  类样本分别表示为  $A^1, A^2, A^3, \dots, A^c$ , 每类样本数为  $n_i$ , 总数为  $N$ 。 $A_j^i \in \mathbf{R}^{m \times 1}$  表示第  $i$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, C$ ) 类的第  $j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n_i$ ) 个样本。则  $C$  类样本各自的类内均值  $\bar{A}^i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} A_j^i$ ;  $C$  类样本总均值  $\bar{A} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} A_j^i$ 。

### 2.1 2DLDA 算法

假设  $\theta_{2DLDA}$  为 2DLDA 算法的最优投影矩阵,则 2DLDA 的准则定义为

$$J(\theta_{2DLDA}) = \frac{|\theta_{2DLDA}^T S_b \theta_{2DLDA}|}{|\theta_{2DLDA}^T S_w \theta_{2DLDA}|} \quad (1)$$

式中,  $S_w$  为样本总的类内协方差矩阵,表示为

$$S_w = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^{n_i} (A_j^i - \bar{A}^i)^T (A_j^i - \bar{A}^i) \quad (2)$$

$S_b$  为样本总的类间协方差矩阵,表示为

$$S_b = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^c n_i (\bar{A}^i - \bar{A})^T (\bar{A}^i - \bar{A}) \quad (3)$$

为使提取的线性鉴别特征具有最优分类能力,最优投影矩阵  $\theta_{2DLDA}$  满足使得准则函数  $J(\theta_{2DLDA})$  最大。

最优投影矩阵  $\theta_{2DLDA}$  通过求解  $S_b S_w^{-1}$  的特征值与特征向量问题求得。

### 2.2 DHDA 算法

2DHDA 移除了 LDA 和 2DLDA 算法等样本类内协方差矩阵的约束。2DHDA 准则定义为

$$J(\theta_{2DHDA}) = \frac{\prod_{i=1}^c \left( \frac{|\theta_{2DHDA}^T S_b \theta_{2DHDA}|}{|\theta_{2DHDA}^T W_i \theta_{2DHDA}|} \right)^{n_i}}{\prod_{i=1}^c |\theta_{2DHDA}^T S_b \theta_{2DHDA}|^N} \quad (4)$$

式中,  $W_i = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} (A_j^i - \bar{A}^i)^T (A_j^i - \bar{A}^i)$  表示第  $i$  类样本的协方差矩阵,并且有  $S_w = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^c W_i$ 。比较式(3)和式(4),当每类样本的协方差矩阵  $W_i$  相等时,有  $J(\theta_{2DHDA}) = (J(\theta_{2DLDA}))^N$ 。然而,对  $J(\theta_{2DLDA})$  的尺度变换不会改变  $\theta_{2DLDA}$ , 因此有  $\theta_{2DHDA} = \theta_{2DLDA}$ , 于是 2DHDA 算法演变成了 2DLDA 算法。图 1 为两类样本分别向 2DHDA 与 2DLDA 算法投影后样本的概率分布情况。图 1 中,每一个椭圆表示一类样本,分别向 2DHDA 和 2DLDA 投影方向投影后,概率曲线相互重合区域为错误识别区域,从图中可知,2DHDA 的错误识别区域远小于 2DLDA 的错误识别区域。

2DHDA 投影

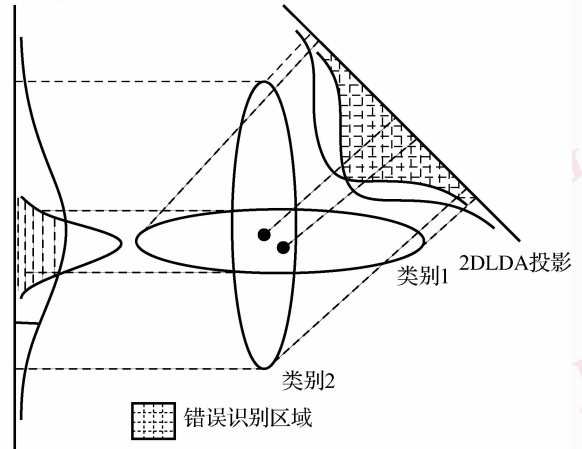


图 1 2DHDA 投影与 2DLDA 投影  
Fig. 1 2DLDA and 2DHDA projection

对 2DHDA 准则取对数可得

$$H(\theta_{2DHDA}) \triangleq N \log |\theta_{2DHDA}^T S_b \theta_{2DHDA}| - \sum_{i=1}^c n_i \log |\theta_{2DHDA}^T W_i \theta_{2DHDA}| \quad (5)$$

对于任意的非奇异矩阵  $\varphi \in \mathbf{R}^{l \times l}$  有: (1)  $H(\varphi \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}) = H(\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}})$ , 这表示在特征空间里对  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  的变换不会改变 2DHDA 准则的值<sup>[5]</sup>; (2) 对  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  进行行或列的比例变换和对  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}} \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T$  特征值的比例变换不会改变 2DHDA 准则的值。  $H$  对  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  求偏导数可得

$$\frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}} = \sum_{i=1}^C -2n_i (\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}})^{-1} \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}} \mathbf{W}_i + 2N (\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T \mathbf{S}_b \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}})^{-1} \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}} \mathbf{S}_b \quad (6)$$

然而, 对于  $\frac{\partial H(\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}})}{\partial \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}} = 0$ , 没有非数值的方法求解  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ 。因此, 采用梯度下降求解  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ 。然后, 样本向  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  投影提取特征, 可表示为

$$\mathbf{Y}_j^i = \mathbf{A}_j^i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}} \quad (7)$$

式中,  $\mathbf{Y}_j^i$  表示样本  $\mathbf{A}_j^i$  的投影特征。

### 2.3 2DHDA 的似然解释

假设  $C$  类样本  $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots, \mathbf{A}^c$  向 2DHDA 特征空间投影后的特征表示为  $\mathbf{Y}^1, \mathbf{Y}^2, \mathbf{Y}^3, \dots, \mathbf{Y}^c$ , 则投影后每类样本的均值和协方差矩阵分别为  $\bar{\mathbf{A}}_Y^i = \bar{\mathbf{A}}^i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  和  $\mathbf{W}_Y^i = \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ ; 同时假设投影后每类样本的分布满足单高斯模型, 表示为

$$P(\mathbf{Y}_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{W}_Y^i}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{Y}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_Y^i)^T (\mathbf{Y}_j^i - \bar{\mathbf{A}}_Y^i)}{2 \mathbf{W}_Y^i}\right) \quad (8)$$

将  $\mathbf{Y}_j^i = \mathbf{A}_j^i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ ,  $\bar{\mathbf{A}}_Y^i = \bar{\mathbf{A}}^i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  和  $\mathbf{W}_Y^i = \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  代入式(8)可得

$$P(\mathbf{Y}_j^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \mathbf{W}_Y^i}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}^i)^T (\mathbf{A}_j^i - \bar{\mathbf{A}}^i)}{2 \mathbf{W}_i}\right) \quad (9)$$

对于所有样本, 它们的联合概率密度为

$$\mathbf{P} = \prod_{i=1}^C \prod_{j=1}^{n_i} P(\mathbf{Y}_j^i) \quad (10)$$

对式(10)取对数似然可得

$$\begin{aligned} H_Y &\triangleq - \sum_{i=1}^C \frac{n_i}{2} \log |\mathbf{W}_Y^i| + K \\ &= - \sum_{i=1}^C \frac{n_i}{2} \log |\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}} \mathbf{W}_i \boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}^T| + K \quad (11) \end{aligned}$$

式中,  $K$  为一常量。式(11)与式(5)比较可得, 2DHDA 可看作是一个受约束的最大似然投影, 其约束条件为最大化样本特征的类间距离<sup>[7]</sup>。

## 3 最小距离分类器

假设  $\mathbf{Y}_{\text{test}} = [\mathbf{Y}_{\text{test}}(1), \mathbf{Y}_{\text{test}}(2), \dots, \mathbf{Y}_{\text{test}}(d)]$  为任意一幅测试样本图像  $\mathbf{A}_{\text{test}}$  的特征矩阵, 则  $\mathbf{Y}_{\text{test}}$  与任意一幅训练样本图像  $\mathbf{A}_j^i$  的特征矩阵  $\mathbf{Y}_j^i = [\mathbf{Y}_j^i(1), \mathbf{Y}_j^i(2), \dots, \mathbf{Y}_j^i(d)]$  的距离可表示为

$$D(\mathbf{Y}_j^i, \mathbf{Y}_{\text{test}}) = \sum_{k=1}^d \|\mathbf{Y}_j^i(k) - \mathbf{Y}_{\text{test}}(k)\|^2 \quad (12)$$

式中,  $\mathbf{Y}_j^i(k), \mathbf{Y}_{\text{test}}(k)$  分别表示  $\mathbf{Y}_j^i$  和  $\mathbf{Y}_{\text{test}}$  的第  $k$  个列向量,  $\|\mathbf{Y}_j^i(k) - \mathbf{Y}_{\text{test}}(k)\|^2$  表示  $\mathbf{Y}_j^i(k)$  与  $\mathbf{Y}_{\text{test}}(k)$  之间的欧氏距离。若存在第  $p$  类的第  $q$  个训练样本图像  $\mathbf{A}_q^p$  的特征矩阵  $\mathbf{Y}_q^p$ , 满足  $D(\mathbf{Y}_q^p, \mathbf{Y}_{\text{test}}) = \min_{i,j} D(\mathbf{Y}_j^i, \mathbf{Y}_{\text{test}})$  成立, 则测试样本  $\mathbf{A}_{\text{test}}$  属于第  $p$  类。

## 4 实验

基于 ORL 与 Yale 混合人脸数据库, 将 2DHDA 算法应用于人脸识别。当用梯度下降法求解  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  时, 选取随机的满秩的矩阵初始化  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  (通常选取  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DLDA}}$  或单位矩阵  $\boldsymbol{\theta}_{\text{EYE}}$  初始化  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ , 本文选取  $\boldsymbol{\theta}_{\text{EYE}}$  初始化  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$ ), 求得最优投影矩阵  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  后, 人脸样本图像向  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  投影提取人脸鉴别特征, 用最小距离分类器完成人脸识别。

实验中, 由于梯度下降法是局部最优的算法, 选取的迭代次数和迭代因子不同, 得到的  $\boldsymbol{\theta}_{2\text{DHDA}}$  系数会有微小的变化, 使得提取的人脸特征也有微小的变化, 从而影响识别率, 因此, 选取不同的迭代次数和迭代因子进行多次实验获得实验结果。

### 4.1 人脸数据库介绍

ORL 人脸数据库是基于表情和姿态变化的人脸数据库, 该数据库有 40 人, 每人 10 幅不同姿态和表情的人脸图像, 总共 400 幅。这些图像是从不同角度拍摄的, 分辨率为  $112 \times 92$ , 灰度级为 256。

Yale 人脸数据库共有 15 人, 每人 11 幅不同表情、姿态和受光照影响的图像, 分辨率为  $243 \times 320$ , 灰度级为 256。

实验中, 构造一个含有 55 人、每人 10 幅, 共 550 幅人脸图像的人脸数据库。其中, 选取 ORL 人脸数据库 400 幅人脸图像, 每类人脸图像 10 幅; 选取 Yale 人脸数据库每类人脸的前 10 幅, 共 150 幅人脸图像, 并将它们的分辨率通过双线性插值算法

归一化为  $112 \times 92$ 。

### 4.2 实验结果及实验结果分析

基于 ORL 与 Yale 混合人脸数据库,首先,选取每类人脸样本的前 4 幅图像为训练样本,剩余的 6 幅图像为测试样本,实验结果如图 2 所示。然后,分别选取每类人脸样本的前 5,7,9 幅人脸图像为训练样本,每类剩余的图像为测试样本分别实验,实验结果如表 1 所示。

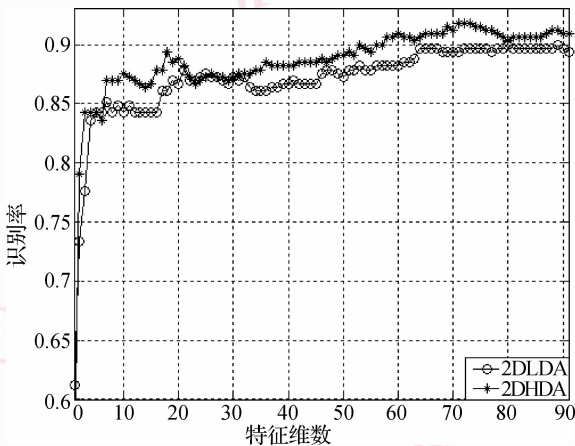


图 2 前 4 幅人脸图像为训练样本的实验结果  
Fig. 2 Experimental results when 4 training samples are selected

表 1 选取训练样本数变化时的实验结果  
Tab. 1 Experimental results when the number of training samples changes

训练样本数	算法	识别率 (%)
5	2DHDA	93.82
	2DLDA	92.36
7	2DHDA	96.39
	2DLDA	95.15
9	2DHDA	100
	2DLDA	100

图 2 为选取每类人脸样本的前 4 幅图像为训练样本时的实验结果。从图 2 中可知,当选取的特征维数不同时,2DHDA 和 2DLDA 算法的识别率都在变化,并且 2DHDA 的最高识别率高于 2DLDA 的识别率。表 1 列出了基于 ORL 与 Yale 混合人脸数据库选取不同训练样本数时的实验结果。从表 1 可知,当选取每类人脸前 5 幅图像为训练样本时,2DHDA 和 2DLDA 的识别率分别为 93.82% 和

92.36%;当选取每类人脸的前 7 幅为训练样本时,2DHDA 的识别率为 96.39%,比 2DLDA 的识别率高出 1.24%;当每类样本的前 9 幅为训练样本,剩余的一幅为测试样本时,2DHDA 和 2DLDA 的识别率都为 100%。

## 5 结 论

在 2DLDA 算法的基础上,介绍了 2DHDA 算法,并将其应用于人脸识别。2DHDA 算法克服了 HDA 算法的“小样本”问题。基于 ORL 与 Yale 混合人脸数据库的实验结果表明,2DHDA 算法的识别率优于 2DLDA 算法的识别率。然而,当人脸图像在更为复杂的背景下,如何提高识别率仍有待深入研究;梯度下降法是一个易陷入局部最优的优化算法,在人脸识别中如何合理选取其迭代因子和迭代次数,使 2DHDA 算法取得最好识别率仍有待深入研究。

### 参考文献 (References)

- Zhang Xiao-xun, Jia Yun-de. A linear discriminant analysis framework based on random subspace for face recognition [ J ]. Pattern Recognition, 2007, **40**(9): 2585-2591.
- Kyperountas M, Tefas A, Pitas I. Weighted piecewise LDA for solving the small sample size problem in face verification [ J ]. IEEE Transactions on Neural Networks, 2007, **18**(2): 506-519.
- Howland P, Wang J, Park H. Solving the small sample size problem in face recognition using generalized discriminant analysis [ J ]. Pattern Recognition, 2006, **39**(2): 277-287.
- Ye J P, Janarsan R, Li Q. Two-dimensional linear discriminant analysis [ J ]. Neural Information Processing Systems, 2005, **17**(2): 1569-1576.
- Campbell N. Canonical variate analysis-A general model formulation [ J ]. Australian Journal of Statistics, 1984, **26**(1): 86-96.
- Hastie T, Tibshirani R. Discriminant analysis by Gaussian mixtures [ J ]. Journal of the Royal Statistical (Series B), 1996, **58**(1): 155-176.
- Loog M, Duin R P W. Non-iterative heteroscedastic linear dimension reduction for two-class data from fisher to chernoff [ A ]. In: Caelli T, et al, eds, Proceedings of Lecture Notes in Computer Science [ C ], Berlin, Germany: Springer-Verlag, 2002, **2396**: 508-517.
- Lei Zhen, Liao Sheng-cai, Yi Dong, et al. A discriminant analysis method for face recognition in heteroscedastic distributions [ A ]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Biometrics, Alghero [ C ], Italy, 2009, **5558**: 112-121.
- Kumar N, Andreou A G. Heteroscedastic discriminant analysis and reduced rank HMMs for improved speech recognition [ J ]. Speech Communication, 1998, **25**(4): 283-297.
- Saon G, Padmanabhan M, Gopinath R, et al. Maximum likelihood discriminant feature spaces [ A ]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing [ C ], Istanbul, Turkey, 2000, **2**(2): 1129-1132.