

基于自适应正则化的全变分去噪算法

余丽红 冯衍秋 陈武凡

(南方医科大学生物医学工程学院医学信息研究所, 广州 510515)

摘要 Stanley Osher 和 Martin Burger 提出的基于 Bregman 距离的迭代正则化全变分去噪算法运算速度较快,但是应用于图像去噪时,没有考虑不同区域的灰度分布特性,从而容易导致纹理等重要信息丢失或模糊的缺陷。针对这一现象,提出了一种基于自适应正则化的全变分去噪算法。论文对 Osher 的去噪模型中的全局正则化参数进行改进,给出了一种根据图像中不同区域的灰度分布特性,自适应选取正则化参数的方法。该算法可以保留图像的边缘和纹理细节信息。实验结果证实了所提算法的有效性,其信噪比较原有方法至少提高 1.0 dB 以上。

关键词 图像去噪 全变分 Bregman 距离 自适应去噪

中图分类号: TP751.1 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)10-1950-05

Adaptive Regularization Method Based Total Variational De-noising Algorithm

YU Li-hong, FENG Yan-qiu, CHEN Wu-fan

(School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou 510515)

Abstract Stanley Osher and Martin Burger introduced an iterative regularization method for image de-noising based on the Bregman distance. The approach can improve the general procedure and save the execution time. However, important information, such as texture is often compromised in the process of de-noising. The reason is that the proposed approach ignored the gradient information of each pixel. In order to avoid the above phenomenon, a novel texture preserving variational de-noising method based on the use of adaptive regularization is proposed in this paper. The new adaptive regularization method based total variational de-noising algorithm uses an adaptive fidelity term which locally controls the extent of de-noising over image regions according to the gradient information of each pixel. So important information, such as edge and texture is preserved. The numerical results for de-noising show the improvement in the signal-to-noise ratio (SNR) over standard model processes, and they are visually more appealing.

Keywords image denoising, total variation, Bregman distance, adaptive denoising

1 引言

在图像的获取和传输过程中,由于受到多种因素干扰,图像不可避免地带有噪声,从而严重影响图像的质量,给图像观测、特征信息提取和分析等图像

处理过程带来了很大的困难。对图像进行后续处理前,必须先对图像去噪,减弱干扰,以使图像更有利于下一步的图像处理工作。由于噪声与边缘点难于区分,局部来看图像灰度都发生了阶跃,因而怎样在图像降噪和图像细节信息保留之间采取有效的折中是图像降噪的关键。

目前已经提出了基于各向异性扩散^[1],基于小

基金项目: 国家重点基础研究发展计划(973)项目(2003CB716103)

收稿日期: 2008-03-17; 改回日期: 2008-09-01

第一作者简介: 余丽红(1985 ~), 女。南方医科大学生物医学工程专业硕士研究生。主要研究领域为医学图像处理。E-mail: yucei@163.com

通讯作者: 陈武凡, E-mail: chenwufan@fimmu.com

波变换^[2],基于偏微分方程^[3](PDE)等许多去噪算法。这些方法建立在对整幅图像模糊的基础上,取得了一定的平滑效果,但有可能丢失边缘和纹理。

1992年,Rudin等人提出的基于梯度能量函数的全变分(total variation, TV)去噪算法^[4],在图像去噪领域得到了广泛的应用和研究^[5-7]。TV算法能有效地去除噪声,但可能会使图像的边缘变得模糊,使细节信息变得不清晰,算法的运算速度也比较慢。Chan等人尝试用1-范数来替换全变分算法中的保真项,并讨论了相关结果^[5]。Osher等人也对TV算法进行改进^[8],提出了基于Bregman距离^[9]的迭代正则化全变分去噪算法,它提高了算法的收敛速度,并且去噪效果要优于TV算法。但该算法中,正则化参数是一个全局标量,没有考虑不同区域的灰度分布特性,从而导致纹理等重要信息被模糊。

为了克服上述方法的不足,本文对Osher提出的迭代正则化去噪算法中的正则化参数进行改进,得到了自适应正则化的全变分去噪算法。该算法根据图像中不同区域的信息,自适应选取正则化参数。该算法在去噪的同时可以保持图像的纹理细节,提高去噪性能。

2 TV 算法

Rudin等人在1992年提出的全变分极小化算法即TV算法(也可简称ROF算法)^[1]:

$$u = \operatorname{argmin} \{ |u|_{BV} + \lambda \|f - u\|_{L^2}^2 \} \quad (1)$$

式中, $f: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$,为给定噪声图像, \mathbf{R} 为实数集, Ω 是有界变分空间(即BV空间,是2维空间)中的一个子集,且 $f = u + v$, u 是原始的干净图像, v 是图像中加入的噪声。 $|u|_{BV}$ 为BV范数,也称之为 u 的全变分,其定义为 $|u|_{BV} = \int_{\Omega} |\nabla u|$ 。式(1)中的第2项为保真项, $\lambda > 0$ 为正则化参数,它在TV范数项(u 的全变分)和保真项之间起着重要的平衡作用, L^2 表示2-范数。

3 迭代正则化算法

TV算法的去噪效果比传统方法要好,但是算法的收敛速度较慢。迭代正则化算法的目的就是为了优化运算,提高收敛速度。令 $u_0 = \mathbf{0}, v_0 = \mathbf{0}$,即将其初始化为零矩阵。基于Bregman距离的迭代正则化

算法为

$$u_k = \operatorname{argmin}_{u \in BV(\Omega)} \{ D(u, u_{k-1}) + \lambda H(u, f) \} \quad (2)$$

式中, u 为原始干净图像, u_k 为去噪后得到的图像, $H(u, f)$ 等价于式(1)中的保真项,即

$$H(u, f) = \lambda \|f - u\|_{L^2}^2$$

$D(u, u_{k-1})$ 为Bregman距离。定义如下:

$$D(u, u_{k-1}) \equiv J(u) - J(u_{k-1}) - \langle p, u - u_{k-1} \rangle \quad (3)$$

式(3)中 $J(u), J(u_{k-1})$ 都为可微函数, $p \in \partial J(u_{k-1}), p$ 为 J 在 u_{k-1} 处的次梯度^[10-11], $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示内积。Bregman距离不是通常意义的几何距离,而是一种贴近性的度量。 $D(u, u_{k-1}) \neq D(u_{k-1}, u)$,它不满足三角不等式,当且仅当 $u = u_{k-1}$ 时, $D(u, u_{k-1}) = 0$ 。

Osher等人利用Bregman距离^[8],证明求解式(2)等价于求解下式:

$$u_k = \operatorname{argmin}_{u \in BV(\Omega)} \{ J(u) + \lambda H(u, f + v_{k-1}) \} \quad (4)$$

并且 $\{u_k\}$ 序列在 L^2 中单调收敛至 f ^[8]。

4 自适应正则化的全变分去噪算法 (A-R-T 算法)

全变分算法^[4]和Osher等人提出的算法^[8]都是讨论原始图像加入高斯噪声 $v \sim N(0, \sigma^2)$ 的情况,即 $\int_{\Omega} (u - f)^2 dx dy = \sigma^2$ 。它们实际上是一个求条件极值^[4]的问题。即

求解:

$$\min_u \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy$$

约束条件为:

$$\int_{\Omega} (u - f)^2 dx dy = \sigma^2$$

而这种条件极值问题又是一个变分问题,所以就得到式(1)。式(1)实际是将约束条件转换成了保真项,然后加入一个正则项参数 λ 。保真项是为了确保去噪后的图像能够尽可能逼近原始图像。Osher等人对式(1)进行改进最后变形得到了式(4)。式(4)中,

$$\begin{aligned} J(u) &= \int_{\Omega} |\nabla u| dx dy, H(u, f + v_{k-1}) \\ &= \int_{\Omega} (f + v_{k-1} - u)^2 dx dy \end{aligned}$$

式(1)和式(4)对应的约束条件是针对整幅图

像而言,而正则项参数 λ 与约束条件紧密相关。所以相应的 λ 也是一个全局标量,对于整幅图像都是同一个值。这两种算法都忽略了图像不同区域的灰度分布特性,从而容易导致纹理等重要信息丢失或模糊的缺陷。因此,本文将式(4)的正则化参数 λ 进行改进,根据图像不同区域特征,引入一个平滑窗函数 $\eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) = \eta(|\tilde{x} - x|, |\tilde{y} - y|)$,从而将图像分成不同区域 \mathbf{W} 来考虑,对于不同区域可以得到不同的约束值,相应的正则化参数也是变动的,最后就可以得到动态的正则化参数 $\lambda(x,y)$ 。

在实验中,为了避免出现 $|\nabla \mathbf{u}| \approx 0$,取 $J(\mathbf{u}) = \Phi(|\nabla \mathbf{u}|) = \int \sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}$ 。

下面是本文提出的自适应正则化的全变分去噪算法,公式如下:

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left[\lambda(x,y) \left(\int_{\mathbf{W}} (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u})^2 \eta_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) + \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| \right] \right\} \quad (5)$$

式中, $\eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) = \eta(|\tilde{x} - x|, |\tilde{y} - y|)$ 是归一化 $\left(\int_{\mathbf{W}} \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} = 1 \right)$ 的径向对称的平滑窗函数,并且满足:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[\lambda(x,y) \left(\int_{\mathbf{W}} (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u})^2 \eta(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \right] \\ &= \int_{\Omega} \left[(\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u})^2 \left(\int_{\mathbf{W}} \lambda(\tilde{x},\tilde{y}) \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \right] \end{aligned}$$

因此式(5)可以化简为下式:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| + \int_{\Omega} \left[\lambda(x,y) \left(\int_{\mathbf{W}} (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u})^2 \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y} \right) \right] \right\} \\ &= \operatorname{argmin}_{\mathbf{u} \in BV(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla \mathbf{u}| + \int_{\Omega} \bar{\lambda}(x,y) (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u})^2 \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

式中, $\bar{\lambda}(x,y) = \int_{\mathbf{W}} \lambda(\tilde{x},\tilde{y}) \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$, 式(6)的欧拉-拉格朗日方程为

$$2\bar{\lambda}(x,y) (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u}) + \nabla \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) = 0 \quad (7)$$

令 $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}, \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, 当 $k=1$ 时,式(7)左右两边同时乘以 $(\mathbf{u} - \mathbf{f})$, 并求积分,通过改变积分顺序,则可以得到:

$$\int_{\Omega} (2\lambda(x,y)L(x,y) - M(x,y)) dx dy = 0$$

则: $\lambda(x,y) = \frac{M(x,y)}{2L(x,y)}$, 且有: $M(x,y) = (\mathbf{u} - \mathbf{f}) \nabla$

$\left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right)$ 。其中, $L(x,y) = \int_{\mathbf{W}} (\mathbf{f} - \mathbf{u})^2 \eta_{x,y}(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$ 为局部方差。A-R-T 算法实现步骤如下:

(1) 初始化: $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}, \mathbf{v}_0 = \mathbf{0}, \lambda(x,y), \bar{\lambda}(x,y)$ 都取为零值。

(2) 求解: $k = 1, 2, \dots$;

$$\mathbf{u}_k = \operatorname{div} \left(\Phi' \left(\frac{\nabla \mathbf{u}_{k-1}}{|\nabla \mathbf{u}_{k-1}|} \right) + \bar{\lambda}(x,y) (\mathbf{f} + \mathbf{v}_{k-1} - \mathbf{u}_{k-1}) \right)$$

(3) 求得: $\lambda(x,y) = \frac{M(x,y)}{2L(x,y)}$, 其中 $M(x,y) = (\mathbf{u}_k - \mathbf{f}) \operatorname{div} \left(\Phi' \left(\frac{\nabla \mathbf{u}_k}{|\nabla \mathbf{u}_k|} \right) \right) \operatorname{div}, \nabla$ 分别表示散度和梯度, Φ' 表示对 \mathbf{u}_k 求偏导。

$$L(x,y) = \int_{\mathbf{W}} (\mathbf{f} - \mathbf{u}_k)^2 \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$$

$$\bar{\lambda}(x,y) = \int_{\Omega} \lambda(\tilde{x},\tilde{y}) \eta_{x,y}(\tilde{x},\tilde{y}) d\tilde{x}d\tilde{y}$$

(4) 做如下校正: $\mathbf{v}_k = \mathbf{v}_{k-1} + \mathbf{f} - \mathbf{u}_k$, 返回步骤(2)。

5 仿真实验及分析

为了说明本文提出的去噪算法的有效性,进行了仿真实验,分别对 Rudin 等人提出的 TV 算法(ROF 算法)^[4], Stanley Osher 提出的迭代 TV 算法^[8](O-TV 算法)以及本文提出的自适应正则化算法(A-R-T 算法)进行了比较。现以图 1 和图 2 为例进行说明和分析。

图 1 和图 2 是用 3 种算法分别对 Toys 和 Barbara 进行处理后的效果图。两幅图像中加入的都是高斯噪声 $v \sim N(0, \sigma^2)$, 其中图 1 中, $\sigma = 10$, 图 2 中 $\sigma = 15$ 。平滑窗函数 $\eta(x,y)$ 为高斯函数($\sigma_w = 5$)。图 1 中(c)图像很模糊,图 1(d)图像比图 1(c)要清晰,但是图 1(c)和图 1(d)中的细节信息都不清晰。图 1(e)图像的去噪效果最好,可以看到很清晰的纹理细节(特别是胸部区域)。图 2 也说明了本文提出的算法去噪效果明显,而且在去噪的同时能够很好地保留纹理信息。

表 1 是 3 种去噪方法信噪比的对比。图像中加入的都是高斯噪声 $v \sim N(0, \sigma^2)$, 其中前 3 幅图的 $\sigma = 10$, Barbara 的 $\sigma = 15$ 。取信噪比: $\text{SNR} = 20 \log \left(\frac{\|\mathbf{f} - \bar{\mathbf{f}}\|_{L^2}}{\|\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}\|_{L^2}} \right)$ 为评价的客观标准,其中, $\bar{\mathbf{f}}$ 和 $\bar{\mathbf{v}}$ 是 \mathbf{f} 和 \mathbf{v} 在 Ω 上的均值。由表 1 可以看出,对

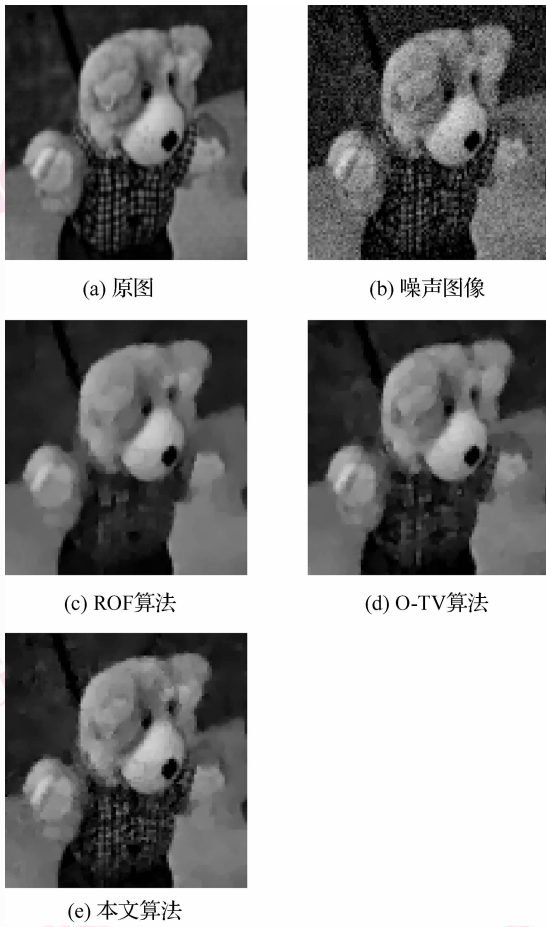


图 1 Toys 的降噪图像
Fig. 1 Denoising of Toys

各图像而言,本文的算法相对原有算法均具有更高的信噪比。

因为本文引入的正则化参数是一个动态变量,所以运算速度相对于 O-TV 算法要稍慢,但是明显比 TV 算法要快。实验数据表明,O-TV 算法最快,本文算法次之,而 TV 算法仍然最耗时。如表 2 所示。本文的算法弥补了原有算法的不足,既有很好的去噪效果,又可以保留图像的细节信息,从而更有利于图像的后处理工作。

表 1 3 种去噪方法的信噪比
Tab.1 SNR of three denoising methods

图像	SNR ₀	ROF	O-TV	本文方法
Toys	20.8	17.4	22.8	24.3
Lena	26.7	27.9	27.9	29.0
Radar	28.6	28.7	30.8	32.2
Barbara	21.5	24.3	30.9	25.2

注:SNR₀ 表示噪声图像的信噪比

表 2 3 种去噪方法的运算时间
Tab.2 Comparison of denoising time 单位:s

图像	ROF	O-TV	本文方法
Toys	6.45	0.90	2.39
Lena	9.69	2.47	7.14
Radar	3.78	1.09	2.83
Barbara	6.00	1.03	2.73

6 结 论

基于全变分的图像复原方法是近年来研究的热门课题。本文在 Rudin, Osher 等人的工作基础上对 TV 算法式做了改进,提出自适应正则化的全变分去噪算法。该算法不但能够有效地去除噪声、保持边缘的位置,而且能够保持图像中的纹理特征和不能用边缘刻画的大尺度细小特征,使处理过的图像清晰度和对比度大大增加。人眼也能直观感受到图像质量的改善。实验结果表明,该算法适合于去除边缘、纹理等细小特征丰富的自然图像上的高斯噪声,能够保持图像的纹理等细节信息。

参考文献 (References)

1 Perona P, Malik J. Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion [J]. IEEE Transactions on PAMI, 1990, 12 (7):

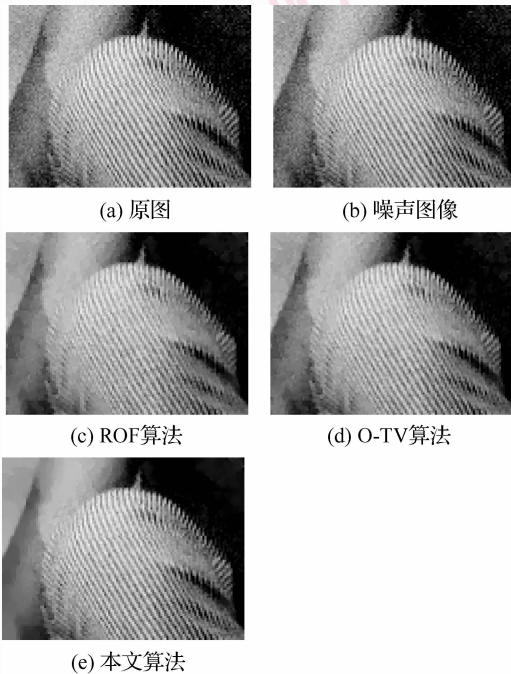


图 2 Barbara 的降噪图像(右膝部分)
Fig. 2 Denoising of Barbara(right knee)

- 629-639.
- 2 Xie Jie-cheng, Zhang Da-li, Xu Wen-li. Overview on wavelet image denoising [J] . Journal of Image and Graphics, 2002, **7** (3) : 209-217. [谢杰成, 张大力, 徐文立. 小波图象去噪综述 [J] . 中国图象图形学报, 2002, **7** (3) : 209-217.]
 - 3 Fu Shu-jun, Ruan Qiu-qi, Wang Wen-qia. Applications of PDEs model in image analysis and processing; a Survey [J] . Computer Engineering and Applications, 2005, **41** (2) : 33-35. [付树军, 阮秋琦, 王文洽. 偏微分方程模型在图像处理中的若干应用 [J] . 计算机工程与应用, 2005, **41** (2) : 33-35.]
 - 4 Rudin L, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J] . Physica D, 1992, **60** (1-4) : 259-268.
 - 5 Chan T F, Esedoglu S. Aspects of total variation regularized L_1 function approximation [J] . SIAM Journal on Applied Mathematics. 2005, **65** (5) : 1817-1837.
 - 6 Strong D, Chan T. Edge-preserving and scale-dependent Properties of total variation regularization [J] . Inverse Problems, 2003, **19** (6) : 165-187.
 - 7 Ring W. Structural properties of solutions of total variation regularization problems [J] . M2AN Mathematical Modeling and Numerical Analyses, 2000, **34** (4) : 799-810.
 - 8 Osher S, Burger M, Goldfarb D, *et al.* An iterative regularization method for total variation-based image restoration [J] . Multiscale Modeling and Simulation, 2005, **4** (2) : 460-489.
 - 9 Della P S, Della P V, Lafferty J. Duality and auxiliary functions for Bregman distances [R] . CMU-CS-01-109, Pittsburgh, PA, USA: School of Computer Science, Carnegie Mellon University, 2001.
 - 10 Cetin E. Reconstruction of signals from Fourier transform samples [J] . Signal Process, 1989, **16** : 129-148.
 - 11 Cetin E. An iterative algorithm for signal reconstruction from bispectrum [J] , IEEE Transactions on Signal Process, 1991, **39** (12) : 2621-2628.