

# 图像轮廓波变换及变换域隐马尔可夫模型的应用

宋晓阳<sup>1)</sup> 宋克欧<sup>2)</sup> 陈亚珠<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (上海交通大学生物医疗仪器研究所, 上海 200240) <sup>2)</sup> (哈尔滨工程大学计算机科学与技术学院, 哈尔滨 150001)

**摘要** 鉴于2维张量积小波已被证实不能为分片光滑图像提供理想表达, 从而促使了近年来各种“超越小波”的变换理论和方法的出现。其中轮廓波变换因其理论新颖、技术思想先进、实效显著而具有深入研究的前景和潜力。为了使人们对轮廓波变换有一概略了解, 首先以轮廓波变换原理及变换域隐马尔可夫模型为主线, 并对关键点给出了详细论述; 然后从宏观角度对轮廓波变换进行了深入浅出的综述; 最后通过与小波变换的应用对比、分析, 指出了轮廓波的应用潜力之所在, 以及更进一步的研究方向。

**关键词** 图像小波变换 轮廓波变换 自然图像 隐马尔可夫模型

中图法分类号: TP391.41 文献标识码: A 文章编号: 1006-8961(2009)09-1721-11

## Contourlet Transform and Hidden Markov Model in Contourlet Domain

SONG Xiao-yang<sup>1)</sup>, SONG Ke-ou<sup>2)</sup>, CHEN Ya-zhu<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> (Institute of Biomedical Instrument, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240)

<sup>2)</sup> (College of Computer Science and Technology, Harbin Engineering University, Harbin 150001)

**Abstract** It has become evident that the commonly used two-dimensional tensor product wavelet bases are not optimal for representing signals that resemble images. This motivated a variety of schemes beyond wavelets, such as ridgelets, curvelets, contourlets, and wedgelets. Contourlet transform provides an efficient representation for two-dimensional piecewise smooth images, and constructed in discrete domain. In this paper, contourlets and hidden Markov model using contourlet transform are discussed, and the deep insights on the keys to understanding the contourlet transform are stated in details. The applications of contourlets, comparing with wavelets, are also introduced, and comment on the potential of contourlets for these applications in the future is given.

**Keywords** wavelet transform, contourlet transform, natural image, hidden Markov model(HMM)

## 1 引言

人们从真实世界获取的数据, 如1维波形数据和2维图像数据, 常常由于不能把所含的信息高效地表示出来, 因此需要借助某种变换手段减少数据冗余, 使信息集中于少量数据载体上。小波变换就是一种很成功的变换理论和方法。在1维信号的变换和处理中, 小波变换已经取得广泛进展, 并渐趋成

熟。然而, 以张量积形式将1维小波推广成2维甚至高维小波时, 则出现了原理机制上的局限。2维张量积小波有如下形式:

$$\begin{cases} \varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \\ \psi^1(x, y) = \varphi(x)\psi(y) \\ \psi^2(x, y) = \varphi(y)\psi(x) \\ \psi^3(x, y) = \psi(x)\psi(y) \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $\varphi(x)$ ,  $\varphi(y)$ ,  $\psi(x)$  和  $\psi(y)$  分别为  $x$  和  $y$  方向1维尺度母函数和小波母函数。  $\varphi(x, y)$ ,  $\psi^1(x, y)$ ,

基金项目: 国家重点基础研究发展(973)项目(2003CB716103); 上海市科委重点攻关项目(05DZ19509)

收稿日期: 2007-07-01; 改回日期: 2007-11-26

第一作者简介: 宋晓阳(1977 ~ ), 女。上海交通大学生物医学仪器研究所博士研究生。主要研究领域为生物医学图像处理。

E-mail: songxiaoyang@sjtu.org

$\psi^2(x,y)$ ,  $\psi^3(x,y)$  分别为 2 维尺度母函数及垂直方向、水平方向和对角方向的 2 维母小波函数, 由于它们都具有正方形支撑域, 因此当它们扩展成为各尺度小波基函数时, 正方形支撑域相当于对应尺度图像的一个像素点, 因此用这样的小波对图像进行变换, 只能感觉到点状灰度突变(奇异性), 而对轮廓线只能“瞎子摸象”般一点一点地“感觉”出来, 完全不知道可以把平滑轮廓线某个方向上的点聚在一起, 用少量系数加以表示。

为了“超越”张量积 2 维小波<sup>[1]</sup>, 需要克服上述局限, 使图像变换效率得以提高。如今已提出了各种适于“感觉”图像中分段光滑轮廓的方法<sup>[2-13]</sup>, 形成了类似小波分析的 X-let 分析(X 代表各种方法), 其中以脊波(Ridgelets)<sup>[2]</sup>, 曲波(Curvelets)<sup>[4-5]</sup> 和轮廓波(Contourlets)<sup>[12-16]</sup> 最有名。它们的基函数支撑域都是矩形, 不仅长宽比可调整, 且具有多个方向, 适于“套住”不同粗细(尺度)和方向的轮廓线段, 不但可使变换效率得到提高, 而且可减少数据量形成稀疏表示。脊波被设计成适于逼近直线, 但对于多曲率的复杂轮廓, 脊波与小波同样效果不佳。第 1 代曲波<sup>[4]</sup> 是由脊波演变而来, 凡被各尺度基函数“套住”的轮廓曲线都认为是一段直线; 第 2 代曲波<sup>[5]</sup> 不用进行脊波变换, 可直接在子带图像上对曲线进行划分来实现变换。与傅里叶变换和小波变换一样, 其曲波构建也是先在连续域完成的, 然后通过采样转换到离散域上。两代曲波变换都涉及旋转操作和以极坐标为基础的 2 维频率划分, 这种在连续域看似简单的操作, 在离散图像上(矩形栅格)却是巨大的难题。

轮廓波变换与曲波相似, 都具有多尺度(多分辨率), 多向分解功能, 但它是先直接在矩形栅格的离散域上开发构建, 然后再进行连续域展开的精确表达。从功能上看, 轮廓波变换好像是曲波的离散化版本, 但它们的技术原理和路线完全不同。

轮廓波变换的直接作用是先通过去除数据的相关性和依赖性, 使变换域系数之间的依赖性大为减弱; 然后通过轮廓波系数进行统计分析来建立适当的统计模型, 对图像处理等各种成功的应用有至关重要的作用, 其中最重要的是隐马尔可夫树。轮廓波变换是针对图像小波变换弱点设计的, 它们有相同的应用领域, 但总体而言, 其效能优于小波变换。

## 2 轮廓波变换

在文献[17]的研究基础上, Do 和 Vetterli 于 2003 年提出轮廓波<sup>[12]</sup>, 经过几年的充实和完善, 形成了较成熟的理论和方法<sup>[13, 18-20]</sup>, 目前在该领域里的主要研究力量仍然是以 Do 为主的研究小组。其在图像处理领域及其传统应用场合已经开始受到青睐, 国内外的研究成果不断涌现, 并呈现增长的势头<sup>[21-37]</sup>。

轮廓波变换是由拉普拉斯塔式分解(Laplacian pyramid, LP)和方向滤波器组(directional filter banks, DFB)组合而成的。LP 和 DFB 是早已开发出来的技术<sup>[38-39]</sup>, 但轮廓波的两位先驱对其进行了成功的改进<sup>[17-18, 40-41]</sup>。偏重于应用的研究者首先应该掌握轮廓波变换原理和变换域模型, 暂时越过 LP 和 DFB 的设计以及基函数构建, 可通过实际应用, 对 LP 和 DFB 进行有针对性的进一步研究。与图像小波变换及应用进行对比, 是非常好的研究方式。下面介绍正交轮廓波变换。

### 2.1 拉普拉斯塔式多尺度分解

如图 1 左半部所示,  $a_0[\mathbf{n}] \in V_0$  是输入图像, 经 LP 分解后输出  $J$  个带通图像  $b_j[\mathbf{n}] \in W_j, j=1, 2, \dots, J$  (分辨率由细到粗的次序) 和一个低通图像  $a_j[\mathbf{n}] \in V_j$ , 也就是说, LP 分解的第  $j$  级把图像  $a_{j-1}[\mathbf{n}]$  分解成更粗糙的低频图像  $a_j[\mathbf{n}]$  和含有  $a_{j-1}[\mathbf{n}]$  细节的带通图像  $b_j[\mathbf{n}]$ 。于是有

$$\begin{cases} a_j[\mathbf{n}] \in V_j, b_j[\mathbf{n}] \in W_j \\ a_{j-1}[\mathbf{n}] \in V_j \oplus W_j = V_{j-1} \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $V_j$  和  $W_j$  分别表示  $a_j[\mathbf{n}]$  和  $b_j[\mathbf{n}]$  所在的子图像空间,  $\oplus$  表示对子空间进行正交和运算。于是有嵌套子空间序列

$$\underbrace{\dots V_J \subset V_{J-1} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots \subset L_2(\mathbf{R}^2)}_{a_0[\mathbf{n}] \text{ LP 分解出来的各子空间}} \quad (3)$$

各尺度级  $j=1, 2, \dots, J$  对应空间  $V_0, V_1, \dots, V_J$  从细到粗的有限分解。二抽一的下采样矩阵  $\mathbf{M} = \text{diag}(2, 2)$  对前一级的细图像  $a_{j-1}[\mathbf{n}]$  隔行隔列地抽取, 形成低通粗图像  $a_j[\mathbf{n}]$  和高通细图像  $b_j[\mathbf{n}]$ , 使栅格横向和纵向各缩小 2 倍, 分辨率降低 4 倍。 $V_j$  是分解树的顶点, 它是最粗图像  $a_j[\mathbf{n}]$  所在的子空间。正交尺度基函数  $\varphi(\mathbf{t} - \mathbf{n}), \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2$ , 张成空间  $V_0$ , 尺度母函数  $\varphi(\mathbf{t})$  满足以下双尺度方程。

$$\varphi(t) = 2 \sum_{n \in \mathbf{Z}^2} g(n) \varphi(2t - n) \quad (4)$$

式中,  $g(n)$  是 2 维组合系数, 即是 LP 分解的低通综合滤波器<sup>[11,18]</sup>, 它是设计轮廓波滤波器组 LP 和 DFB 的关键, 是双尺度方程(式(4))的解。轮廓波尺度母函数  $\varphi(t)$  和下小节的轮廓波母函数  $\lambda(t)$  的

构建都由  $g(n)$  决定。尺度母函数扩展成

$$\varphi_{j,n}(t) = 2^{-j} \varphi(2^{-j}t - n), j = 1, 2, \dots, J; n \in \mathbf{Z}^2 \quad (5)$$

就成为  $V_0$  的各个子空间  $V_j$  的紧框架(完备规范正交基),  $V_j$  和  $W_j$  皆由  $V_{j-1}$  的框架生成, 于是有

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad (6)$$

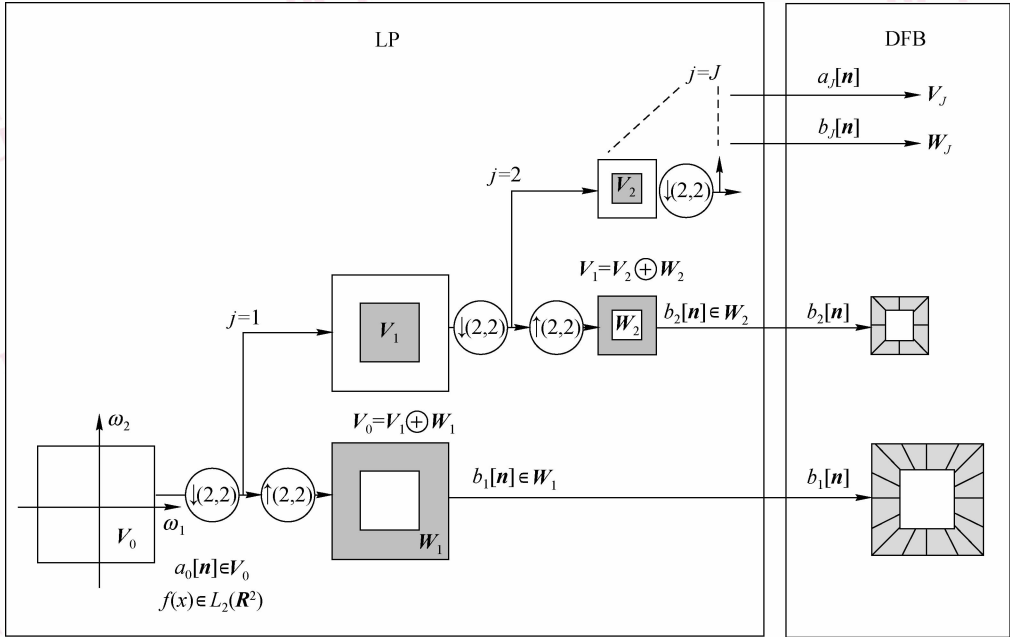


图1 轮廓波滤波器组  
Fig. 1 The contourlet filter bank

### 2.2 方向滤波器组多方向分解

如图1右半部分所示, 以对带通轮廓波空间  $W_j$  的 8 个方向子带进行划分(实线)作为例子(如图2(a)所示)。带通轮廓波空间  $W_j$  的细节图像

$b_j[n]$  因高通而由  $M = \text{diag}(2, 2)$  进行上采样, 使  $b_j[n]$  与  $a_{j-1}[n]$  具有同样的采样栅格。图2(b)中,  $W_{j,k}^{(l)}$  为  $W_j$  的第  $k$  个方向的子带空间,  $k = 0, 1, \dots, 2^j - 1$ ,  $b_j[n]$  中第  $k$  个方向的轮廓线段信息即含于

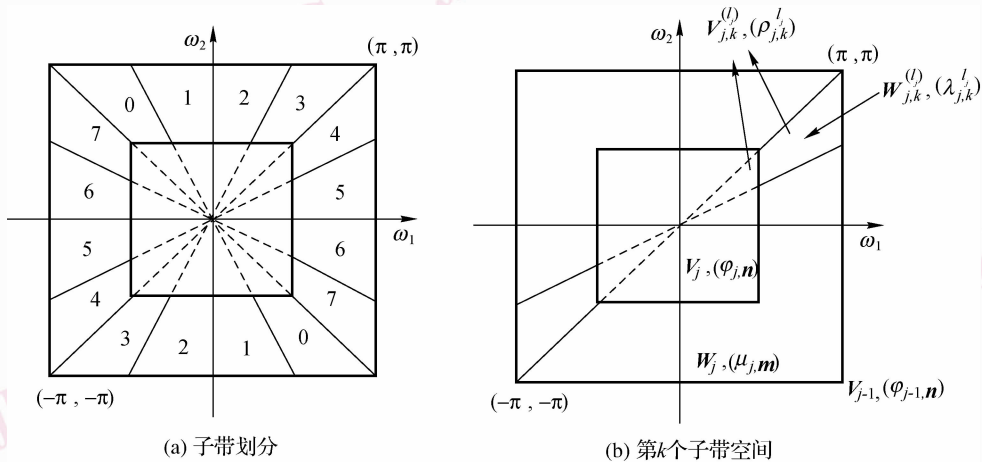


图2 第j级方向滤波器组的多方向子带频域空间划分

Fig. 2 An example of possible frequency decompositions by the contourlet transform

此子带中。 $l_j$  可表示尺度  $j$  时 DFB 分解的方向数  $2^{l_j}$ , 其表达式将在后面式 (11) 中给出。子带空间  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的轮廓波基函数为

$$\lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{m} \in \mathbf{Z}^2} w_k^{(l_j)}[\mathbf{m}] \varphi_{j-1,m}(\mathbf{t})$$

$$j = 1, 2, \dots, J, k = 0, 1, \dots, 2^j - 1 \quad (7)$$

其位移可形成子带空间  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的轮廓波紧框架

$$\{\lambda_{j,k,n}^{(l_j)}(\mathbf{t}) = \lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t} - 2^{j-1} \mathbf{S}_k^{(l_j)} \mathbf{n})\}_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2} \quad (8)$$

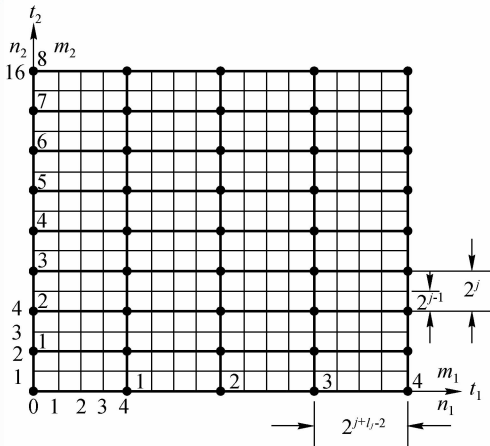
式 (7) 中,  $w_k^{(l_j)}[\mathbf{m}]$  是  $\varphi_{j-1,m}(\mathbf{t})$  的组合系数, 它是一个离散滤波器, 可由  $\mathbf{W}_j$  的带通滤波器和  $j$  级 DFB  $k$  方向滤波器进行卷积求和得出。空间  $\mathbf{W}_j$  由不具方向的紧框架  $\mu_{j,m}(\mathbf{t})$  张成, 而 DFB 划分出的空间  $\mathbf{V}_{j,k}^{(l_j)}$  则由紧框架  $\rho_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  张成 (见图 2 (b)), 这里省去  $\mu_{j,m}(\mathbf{t})$  和  $\rho_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  的表达式, 详细参看文献 [10-11, 38-39], 式 (7) 的求和组合系数  $w_k^{(l_j)}[\mathbf{m}]$  的得出都要用到  $\mu_{j,m}(\mathbf{t})$  的表达式。式 (8) 中的  $2^{j-1} \mathbf{S}_k^{(l_j)} \mathbf{n}$  为  $\lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  在  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的子带栅格  $\mathbf{n}$  上的移位, 其中矩阵

$$\mathbf{S}_{k,j}^{(l_j)} = \begin{cases} \text{diag}(2^{l_j-1}, 2), & 0 \leq k < 2^{l_j-1} \\ \text{diag}(2, 2^{l_j-1}), & 2^{l_j-1} \leq k < 2^{l_j} \end{cases}$$

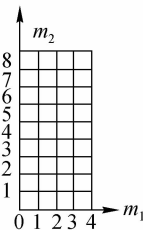
$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} 2^{l_j-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}_{l_j=3} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2^{l_j-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (9)$$

的作用是对  $b_j[\mathbf{n}] \in \mathbf{W}_j$  的细栅格  $\mathbf{n} = [n_1 \ n_2]^T$  进行下抽样, 形成子带图像  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的粗栅格

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = 2^{j-1} \mathbf{S}_k^{(l_j)} \mathbf{n}$$



(a) 细栅格  $\mathbf{n}$  到粗栅格  $\mathbf{m}$  的映射



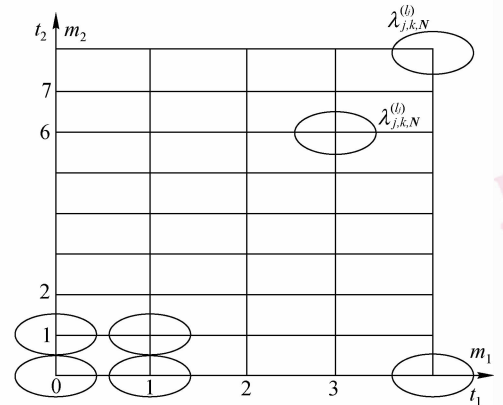
(b) 规范的栅格  $\mathbf{m}$

$$= 2^{j-1} \begin{pmatrix} 2^{l_j-1} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{j+l_j-2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{j+l_j-2} n_1 \\ 2^j n_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

以  $l_j = 3$  为例, 通过式 (9)  $k = 0, 1, 2, 3$  的 4 个方向子带的下抽样矩阵和式 (10) 的映射, 即可将细栅格  $\mathbf{n}$  变成粗栅格  $\mathbf{m}$  (如图 3 (a) 所示)。图中黑圆点为栅格  $\mathbf{m}$  坐标, 纵坐标栅格尺寸从  $2^{j-1}$  变为  $2^j$ , 分辨率下降 2 倍; 横坐标从  $2^{j-1}$  变为  $2^{j+l_j-2}$ , 分辨率下降 4 倍。把栅格  $\mathbf{m}$  规范为矩形栅格 (如图 3 (b) 所示)。细节图像  $b_j[\mathbf{n}] \in \mathbf{W}_j$  中的 0, 1, 2, 3 等 4 个近水平方向的轮廓线段就会出现在图 3 (a) 那样的 4 个子带栅格图像上, 并规范成图 5 下方的 4 个竖长系数子带, 其记录着某个水平方向的所有轮廓波变换系数 (注意: 在频域空间  $\mathbf{W}_j$  中,  $k = 0, 1, 2, 3$  为垂直方向, 这是由傅里叶变换的性质决定的, 见图 2 (a))。如果要进行轮廓波反变换, 则栅格  $\mathbf{m}$  要经过  $\mathbf{S}_k^{(l_j)}$  逆矩阵的上抽样才能恢复栅格  $\mathbf{n}$ 。

图 3 (c) 示出了子带空间  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  轮廓波基函数  $\lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  椭圆形支撑域在栅格  $\mathbf{m}$  上的位置, 它“套住” $k$  方向上的所有轮廓线段, 通过计算内积即可得到轮廓波系数, 并“放置”在图 3 (b) 子带栅格的相应位置上。  $\lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  在其支撑域上的积分为零 ( $\int \lambda_{j,k}^{(l_j)}(\mathbf{t}) d\mathbf{t} = 0$ ), 则可离散化成为零和模板, 这使得轮廓波基函数像小波基函数一样, 是一种局部化的“波”。图 3 (c) 的  $\lambda_{j,k,n}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  椭圆支撑域像瓦片似的铺满栅格  $\mathbf{m}$ 。



(c)  $\lambda_{j,k,n}^{(l_j)}(\mathbf{t})$  椭圆支撑域

图 3 细栅格  $\mathbf{n}$  和粗栅格  $\mathbf{m}$

Fig. 3 A detail image grid  $\mathbf{n}$  and a coarser grid  $\mathbf{m}$

尺度为  $j$  时方向分解级数  $l_j$  的计算式为

$$l_j = l_{j_0} + \lfloor (j_0 - j) / 2 \rfloor, j \leq j_0 \quad (11)$$

式中,  $l_{j_0}$  为 DFB 分解最后 1 级方向的分解级数,  $j_0$  可选任何整数。最后子带  $a_j[\mathbf{n}] \in \mathbf{V}_j$  如不进行方向划分, 则可设  $l_{j_0} = 0$ 。式中,  $\lfloor (j_0 - j) / 2 \rfloor$  可保证每两个尺度有相同的方向划分。当取  $j_0 = J + 3$ , 则  $J = 4$ ; 当  $j = 1, 2, 3, 4$  (如图 1 标注) 时, 则由式 (11) 得到  $l_j = 3, 3, 2, 2$ , 对应  $j$  的各级方向数为  $2^{l_j} = 8, 8, 4, 4$  (如图 4 所示)。通过式 (11) 中  $l_{j_0}$  和  $j_0$  的设置以及  $j$  的编号安排, 即可得到灵活的方向划分。

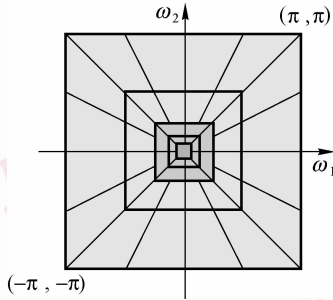


图 4 轮廓波变换域空间的一种划分, 方向数每两级加倍

Fig. 4 A frequency portioning of the Contourlet transform, the number of directions is doubled at every other finer scale

若式 (8) 构成了子带空间  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的紧框架, 并提供了张成  $\mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)}$  的完备正交基函数, 则说明各子带空间正交, 于是有 (参见图 2)

$$\mathbf{W}_j = \left( \bigoplus_k \mathbf{w}_{j,k}^{(l_j)} \right), k = 0, 1, \dots, (2^{l_j} - 1) \quad (12)$$

式中,  $\bigoplus$  表示正交和。又由 (6) 式可知

$$\begin{cases} \mathbf{W}_j \perp \mathbf{V}_j, j = 1, 2, \dots, J \\ \bigcap_i \mathbf{W}_j = \emptyset \end{cases} \quad (13)$$

### 2.3 轮廓波分解

由式 (5) 和式 (8) 就可以给出如图 1 所示的 LP 分解和 DFB 轮廓波分解的紧框架

$$\left\{ \begin{aligned} &\{\varphi_{0,n}(\mathbf{t}), \lambda_{j,k,n}(\mathbf{t}) \mid j = 1, 2, \dots, J \in \mathbf{Z}; \\ &k = 0, 1, \dots, (2^{l_j} - 1); l_j = l_{j_0} + \lfloor (j_0 - j) / 2 \rfloor; \\ &l_{j_0}, j_0 \in \mathbf{Z}; \mathbf{n} \in \mathbf{Z}^2 \} \end{aligned} \right. \quad (14)$$

用此框架就可以对图像  $f(\mathbf{t})$  (离散图像为  $a_0[\mathbf{n}]$ ) 进行轮廓波变换(分解)了。分解树的最顶级(见图 1DFB 的上端)  $j = J$  粗图像变换系数为

$$a_j[\mathbf{n}] = \langle f(\mathbf{t}), \varphi_{j,n}(\mathbf{t}) \rangle \in \mathbf{V}_j \quad (15)$$

式中  $\varphi_{j,n}(\mathbf{t})$  由式 (5)  $j = J$  时给出。而 DFB 分解各级方向子带图像轮廓波系数为

$$c_{j,k,n}^{(l_j)} = \langle f(\mathbf{t}), \lambda_{j,k,n}^{(l_j)}(\mathbf{t}) \rangle \in \mathbf{W}_{j,k}^{(l_j)} \quad (16)$$

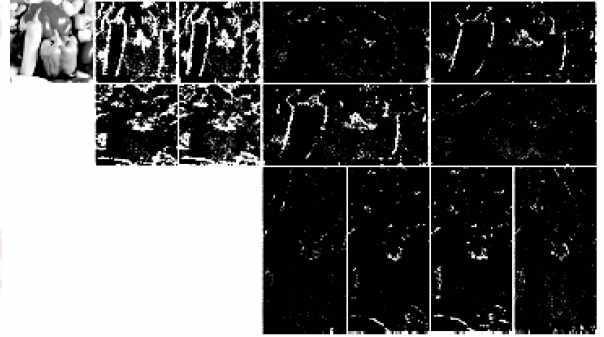


图 5 标准图像“pepper”轮廓波分解例子

Fig. 5 An example of the contourlet transform on the Peppers image

图 5 为标准“pepper”图像通过两级分解轮廓波变换得到的各子带系数图像<sup>[12-13]</sup>。 $j = -2, -1$  两级, 设置  $j_0 = 0, l_{j_0} = 2$ , 并由式 (11) 得到  $l_j = 3, 2$ , 则两级方向子带方向数分别为  $2^3 = 8$  和  $2^2 = 4$ 。

## 3 轮廓波域隐马尔可夫树 (HMT) 模型

尽管轮廓波变换比小波变换有更高的变换效率, 但变换系数之间仍存在复杂的依赖关系, 研究这种依赖关系, 并对轮廓波系数的统计特性进行精确描述, 以构建图像统计模型, 是开展应用研究的基础<sup>[16,42]</sup>。

### 3.1 轮廓波系数之间的关系

轮廓波系数之间的关系如图 6 所示。

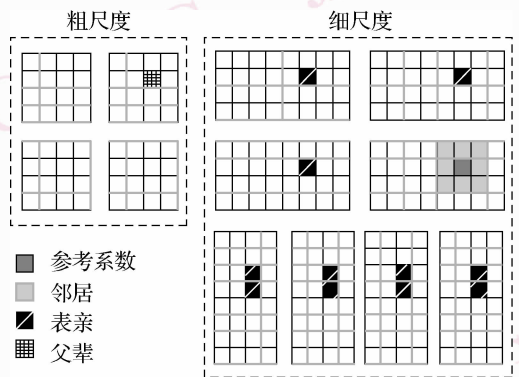


图 6 轮廓波系数之间的关系

Fig. 6 Contourlet coefficient relationships

对每个轮廓波系数  $X$ , 在同一方向子带上 有 8 个相邻系数  $X_N$ ; 上一级粗方向子带的相同位置有一个父辈系数  $X_P$ ; 同尺度的各个方向子带上 有多个表亲系数  $X_C$ ; 任何一个轮廓波系数在下一级细尺度子带的相应位置上 有 4 个子辈系数。  $X_P, X_N$  和  $X_C$  与  $X$  存在跨尺度、跨位置、跨方向的“亲属”关系, 把它们组合在一起称为  $X$  的“广义邻居”  $GNX$ 。

### 3.2 轮廓波系数统计特性

#### 3.2.1 边缘统计特性

每一个子带轮廓波系数都构成一个随机场, 并且可认为各系数具有独立相同的概率密度 (i. i. d), 这可使分析得以简化, 于是子带上的轮廓波系数统计直方图即为该子带系数的边缘统计特性, 数学上也称为边缘概率分布。任何系数  $X$  的数值是该系数的“显状态”,  $X$  还会有“隐状态”。最简单的隐状态只有两个, 即状态  $S_1$  为轮廓, 状态  $S_2$  为背景。图 7 为轮廓波系数  $X$  和隐状态之间的统计关联特性示意。图 7(a) 显示出了  $X$  在不同状态下的条件概率分布  $p(X | S_1)$  和  $p(X | S_2)$ , 它们是均值为零方差为  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  的高斯分布, 各自的面积为 1。均值为零是指轮廓波基函数积分为零的结果。光滑背景系数的方差  $\sigma_2$  较小, 这表明背景系数集中在零附近; 轮廓系数的方差  $\sigma_1$  较大, 这说明轮廓系数较分散。其原因是当轮廓波基函数与轮廓方向一致时, 可得到较大的值, 方向不一致时, 则得到较小的数值。图 7(b) 示出了轮廓波系数  $X$  和状态  $S = (S_1, S_2)$  的联合概率分布  $p(X, S)$  (体积为 1) 和  $X$  的边缘分布  $p(X)$  (面积为 1)。  $P_1$  和  $P_2$  分别为子带图像边缘系数和背景系数的先验概率, 一般边缘概率系数所占比例远小于背景系数所占比例

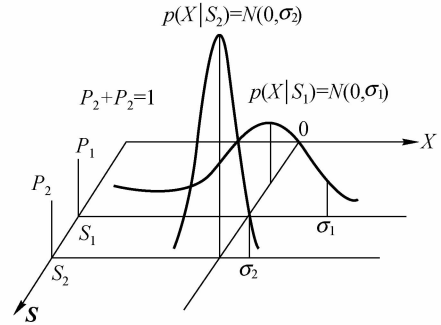
$$p(X, S) = (p(X, S_1), p(X, S_2)) \quad (17)$$

$$\begin{cases} p(X) = p(X, S_1) + p(X, S_2) \\ = P_1 p(X | S_1) + P_2 p(X | S_2) \\ = P_1 N(0, \sigma_1) + P_2 N(0, \sigma_2) \\ P_1 + P_2 = 1 \end{cases} \quad (18)$$

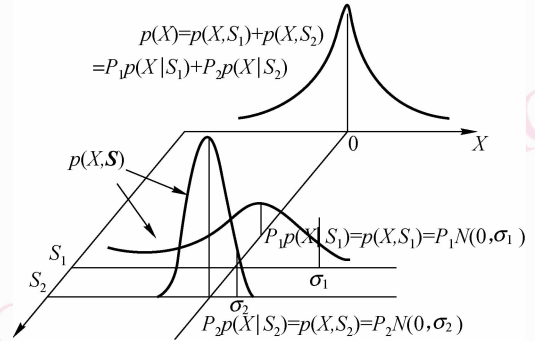
若图像除了轮廓波和背景外, 还有其他多种状态, 即  $S = (S_1, S_2, \dots, S_N)$ , 则子带系数边缘概率分布为

$$\begin{cases} p(X) = \sum_{i=1}^N P(X, S_i) = \sum_{i=1}^N P_i p(X | S_i) \\ = \sum_{i=1}^N P_i N(0, \sigma_i) \\ \sum_{i=1}^N P_i = 1 \end{cases} \quad (19)$$

边缘概率密度是子带系数的无条件统计特性, 是一种混合高斯密度模型 (MG) <sup>[42, 17]</sup>, 其也可用广义高斯密度函数 (GGD) 加以描述 <sup>[17, 43-47]</sup>。一般  $p(X)$  是一个峭度很高的对称的非高斯分布。



(a)  $S_1, S_2$  隐状态下  $X$  的条件概率分布



(b) 隐状态  $S$  和  $X$  的联合概率密度

图 7 轮廓波子带系数的边缘统计特性

Fig. 7 Marginal statistics of the contourlet coefficients

#### 3.2.2 联合统计特性

边缘统计特性仅仅描述了轮廓波系数各自的统计特性, 没有考虑系数之间的依赖性。由于轮廓波基函数与轮廓重叠, 且方向一致时会产生较大系数值, 所以轮廓上的系数  $X$  与它的  $X_P$  和  $X_N$  的依赖性较强; 由于方向偏离时得到的系数值较小, 所以  $X$  与  $X_C$  的依赖性会减弱。总之轮廓波系数与它的广义邻居  $GNX$  之间存在或强或弱的依赖关系。在广义邻居之外的远亲, 因尺度、位置、方向偏离较大, 致使依赖性减弱到可以忽略, 故成为独立和不相关了, 这正是马尔可夫随机特性。

要定量地度量轮廓波系数之间的依赖性, 必须构建系数的联合概率分布  $p(x, y)$ , 进而计算出系数之间的互信息 <sup>[48-50]</sup>

$$I(X, Y) = \iint p(x, y) \log \frac{p(x, y)}{p(x)p(y)} dx dy \quad (20)$$

式中,  $X, Y$  为代表轮廓波系数的两个随机变量, 式 (20) 也可以推广成多变量之间的互信息。一般情

况下,轮廓波系数  $X$  与它的  $X_N$  之间的互信息最大,  $X_C$  次之,  $X_P$  最小,这是由它们的数量多少和与  $X$  的依赖程度决定的。 $X_N$  数量多,且与  $X$  密切,  $X_C$  数量也很多,但关系较弱些,  $X_P$  虽与  $X$  关系密切但只有一个,所以互信息有上述结果。这种情况对于高度纹理图像更明显,因为高度纹理会使更多的  $X_N, X_C$  与  $X$  存在较强的依赖性。但是,若计算  $X$  与各个  $X_N$  的互信息和与各个  $X_C$  的互信息,并求其平均互信息,再与  $X$  和  $X_P$  的互信息进行比较,则常常出现相反的情况,由于  $X$  和  $X_P$  的“父子”关系最密切,反而使它们的互信息最大,于是  $X_P$  成为  $X$  的最佳预测器。当然,对高度纹理图像可能会出现  $X$  与  $X_N$  的平均互信息大于与  $X_P$  的互信息的情况。图 8(a) 示出了轮廓波系数  $X$  以  $X_P$  为条件的分布  $p(X|X_P)$  (阴影区),  $\odot$  表示  $p(X|X_P)$  函数坐标垂直纸面指向读者,  $p(X), p(X_P)$  分别为  $X$  和  $X_P$  的边缘分布。假设在  $X_P = b, a$  两处作  $p(X|X_P)$  的剖面,则可得条件分布  $p(X|X_P = b)$  和  $p(X|X_P = a)$  (图 8(c))。图 8(b) 是  $p(X|X_P)$  的一个实际例子<sup>[42]</sup>。读者可以想象一下  $p(X|X_P)$  的立体形态

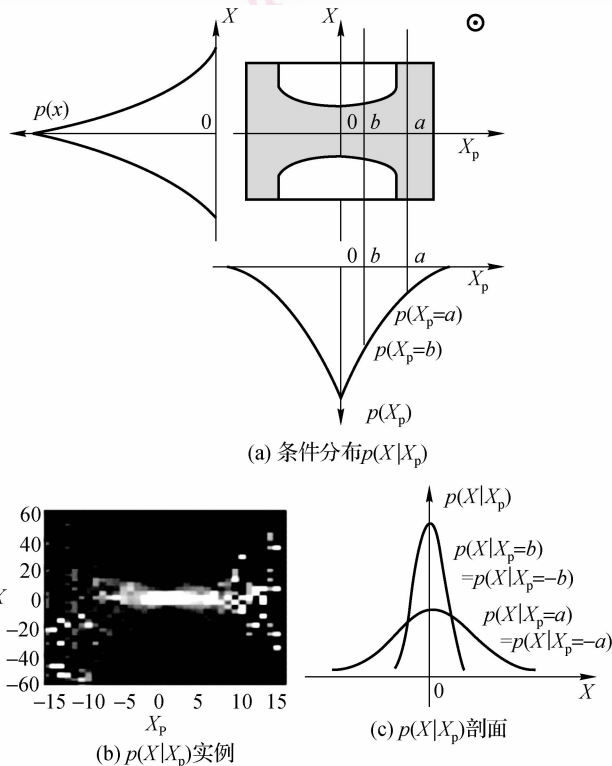


图 8 轮廓波系数  $X$  以  $X_P$  为条件的概率分布  
Fig. 8 Contourlet distribution of the subband coefficients  $X$  on their parents  $X_P$

由贝叶斯公式可以得到轮廓波系数  $X$  和  $X_P$  跨尺度同位置的联合分布

$$p(X, X_P) = p(X_P)p(X|X_P) \neq p(X_P)p(X) \quad (21)$$

由此就可以用式(20)通过计算  $X$  和  $X_P$  的互信息来定量描述它们的依赖性。 $p(X, X_P)$  的分布区域应与  $p(X|X_P)$  相似,但要小一些。

同样,可以建立  $X$  与  $X_N$  同尺度同方向的联合分布  $p(X, X_N)$  以及与  $X_C$  同尺度跨方向的联合分布  $p(X, X_C)$ 。由于  $p(X|X_P) \neq p(X), p(X|X_N) \neq p(X)$  以及  $p(X|X_C) \neq p(X)$ , 因此可知  $X$  和广义邻居是不独立的。但是,由于协方差  $E\{X \cdot X_P\}, E\{X \cdot X_N\}$  和  $E\{X \cdot X_C\}$  都为零,因此线性回归线为  $X_P$  轴(图 8(a), 图 8(b)), 即  $X$  与  $X_P, X_N, X_C$  不相关。

综合起来,就可以构建轮廓波系数  $X$  与  $X_P; X_1^N, \dots, X_8^N; X_1^C, \dots, X_{m_j}^C$  的高维联合分布  $p(X, X_P, X_1^N, \dots, X_8^N, X_1^C, \dots, X_{m_j}^C)$  ( $m_j$  为  $X$  的表亲总数), 这将是一个非常复杂的高维分布函数,但可以用 2 维分布  $p(X, X_P), p(X, \bar{X}_N)$  或者  $p(X, \bar{X}_C)$  代替以求简化 ( $\bar{X}_N, \bar{X}_C$  表示平均), 并用它们计算互信息<sup>[42,48]</sup>, 则常有

$$I(X, X_P) > I(X, \bar{X}_N) > I(X, \bar{X}_C) \quad (22)$$

同时若考虑轮廓波系数之间跨尺度、跨位置、跨方向的依赖关系,则要求构建十分复杂的隐马尔可夫随机场模型和树模型。由于式(22)中  $I(X, X_P)$  最大,所以可以只考虑  $X$  与  $X_P$  的依赖信息来建立简单的隐马尔可夫树(HMT)模型。

### 3.2.3 图像轮廓波域马尔可夫树模型

(1) 根据上面两小节的分析可得出如下结论:

- ① 轮廓波系数的边缘分布是非高斯分布的,因此可以用混合高斯分布和广义高斯分布加以描述。
- ② 轮廓波系数与广义邻居系数有跨尺度、跨位置和跨方向的依赖关系。当以单个广义邻居为条件,则轮廓波系数的条件分布为零均值高斯分布,其方差随广义邻居系数值而变化;轮廓波系数以广义邻居为条件的分布是多维零均值向量高斯分布,其协方差矩阵不一定是对角阵,但可以对角化<sup>[17]</sup>。
- ③ 当广义邻居系数被分别考虑时,一般的自然图像(非纹理图像)轮廓波系数对父辈系数的依赖性最强,它们的 2 维联合分布是零均值向量非高斯分布(由图 8(a) 及式(21)对  $p(X, X_P)$  的说明可知)。

(2) 隐马尔可夫树模型

针对上面的结论,可以用尽量少的参数和尽量简单的结构来使自然图像轮廓波系数之间的依赖关系精确模型化。设有  $J$  级轮廓波分解,在尺度  $j$  级有  $m_j$  个方向子带,从粗到细  $j=1,2,\dots,J$ (为了方便叙述, $j$  的编号与图 1 相反),轮廓波有如下参数:

①  $\mathbf{p}_{1,k} = [p_{1,k}^1 \quad p_{1,k}^2]^T$  是最粗尺度  $j=1$  (根尺度)上,第  $k$  个方向子带的根状态概率向量。 $k=1,2,\dots,m_1$ ,  $m_1$  为根尺度上的方向子带数。上标 1 和 2 分别代表轮廓和背景两个状态,  $p_{1,k}^1 + p_{1,k}^2 = 1$ , 所以只有一个自由参数。

$$\textcircled{2} \mathbf{A}_{j,k} = \begin{pmatrix} p_{j,k}^{1 \rightarrow 1} & p_{j,k}^{2 \rightarrow 1} \\ p_{j,k}^{1 \rightarrow 2} & p_{j,k}^{2 \rightarrow 2} \end{pmatrix}$$

$\mathbf{A}_{j,k}$  为尺度  $j$  上第  $\tilde{k}$  个方向子带与尺度  $j-1$  的父辈第  $k$  个子带之间的状态转移矩阵。由于  $p_{j,k}^{1 \rightarrow 1} + p_{j,k}^{1 \rightarrow 2} = 1$ ,  $p_{j,k}^{2 \rightarrow 1} + p_{j,k}^{2 \rightarrow 2} = 1$ , 所以  $\mathbf{A}_{j,k}$  只有两个自由参数,上标表示状态之间转换。从  $j-1$  尺度向  $j$  尺度状态转移过程为

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{j,\tilde{k}} = \mathbf{A}_{j,k} \mathbf{p}_{j-1,k} \\ \begin{bmatrix} p_{j,\tilde{k}}^1 \\ p_{j,\tilde{k}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{j,k}^{1 \rightarrow 1} & p_{j,k}^{2 \rightarrow 1} \\ p_{j,k}^{1 \rightarrow 2} & p_{j,k}^{2 \rightarrow 2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{j-1,k}^1 \\ p_{j-1,k}^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (23)$$

上式只有 3 个自由参数。

③  $\sigma_{j,k} = [\sigma_{j,k}^1 \quad \sigma_{j,k}^2]$  为尺度为  $j$ , 方向为  $k$  的子带上轮廓波系数零均值高斯分布方差向量。 $\sigma_{j,k}^1$  和  $\sigma_{j,k}^2$  分别是以状态 1 和状态 2 为条件的分布方差,它们两个都是自由参数。

于是轮廓波系数的 HMT 模型可由上述模型参数集合完全确定,即

$$\Theta = \{p_{1,k}; \mathbf{A}_{j,k}; \sigma_{j,k}\} \quad (24)$$

这些参数可以用期望最大(EM)算法进行高效训练获得<sup>[51-53]</sup>。

图 9 示出了由父子关系构建的 HMT 模型例子。图 9(a) 示出了尺度为  $j=2,3$  时候的子带轮廓波系数之间的亲子关系,箭头起点为父,终点为子。图 9(b) 为对应的轮廓波域隐马尔可夫树(CD-HMT)模型,尺度  $j=1,2,3,4$  从粗到细的方向数为 4,4,8,8,各节点代表对应尺度上的方向子带,并标出自由参数;节点之间的有向弧线代表相邻尺度子带系数状态转移矩阵。此例只考虑父子关系,所以构成了自然图像轮廓波分解隐马尔可夫树模型。图 9(b) 例子共有 92 个自由参数,构成了式(24)参数集合。一旦这些自由参数得以确定,则待处理图像的 CD-HMT 模型便可以获得实际应用。

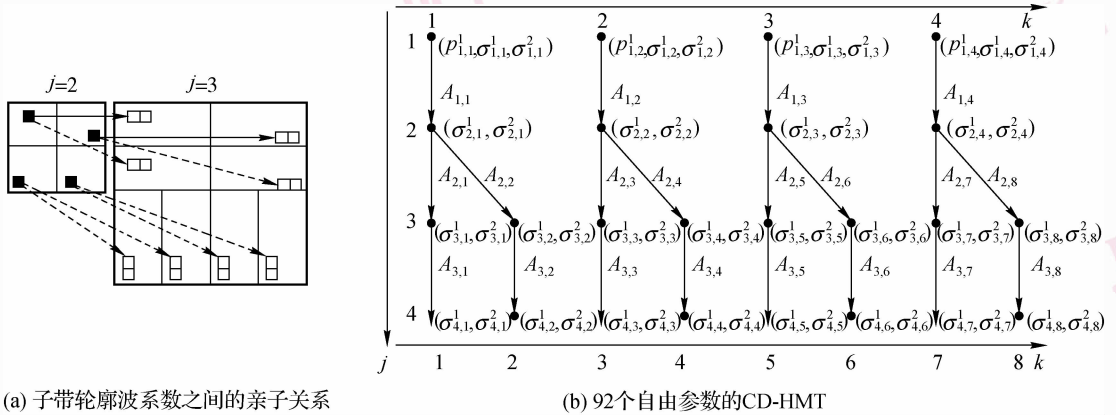


图 9 轮廓波分解亲子关系和隐马尔可夫树 HMT

Fig. 9 Parent-children relationship and hidden Markov tree

## 4 轮廓波的应用

轮廓波变换之所以具有广泛应用的潜力,其最根本的原因是它能建立自然图像的高效表示,把图像信息和能量集中在极少的变换系数上。对于它的应用和开发正从以下两方面展开:一是传统的图像

处理领域,图像(函数)的非线性逼近、图像去噪、增强、分割、压缩和高效表示、以内容为基础的图像修复、纹理分析、特征提取、变换域统计模型化等,目前开展研究较多的是去噪<sup>[21-23,32-37]</sup>、分割<sup>[31]</sup>、纹理提取分类<sup>[25]</sup>、融合<sup>[26,29]</sup>等;另一方面是在各实际应用领域引进轮廓波变换,用以解决实际问题 and 改进处理方法,例如,合成孔径雷达图像<sup>[22,29-30]</sup>、医学图

像<sup>[27-28]</sup>等领域。

轮廓波变换的各种应用研究都是在变换域开展的,由于图像信息和能量可以集中在少数变换系数上,因此使直接处理这些系数的方法提高了效率,例如去噪、增强、轮廓线段逼近和提取等,更主要的是利用仍存在于变换系数之间的相关性,可以建立图像变换域的统计模型,特别是隐马尔可夫模型和隐马尔可夫树模型,从而使应用范围和处理效果更明显地改善。例如利用隐马尔可夫树模型去噪<sup>[31]</sup>及纹理检索等的效率都有了显著提高。

在图像去噪方面,轮廓波隐马尔可夫树模型方法在 PSNR 等客观评价指标上与小波 HMT 方法的效果相当,都胜于维纳滤波、小波阈值等经典方法<sup>[42]</sup>;而在视觉效果上,轮廓波 HMT 方法则显示出更优的去噪效果,其可在去除大部分噪声的同时更能平滑图像,尽管 PSNR 等客观评价指标不一定最优。

轮廓波 HMT 方法用于基于内容的纹理检索时,相比较而言,比小波 HMT 更具有普适性。小波 HMT 方法对于垂直、水平或对角方向纹理的图像的检索效果好,而对于图像纹理,包含多种方向(比如圆形或者不规则形状)纹理,轮廓波 HMT 方法的检索效果则优于小波变换。对于大多数纹理而言,轮廓波 HMT 方法的检索结果更加令人满意,检索率达到 80%<sup>[17,42]</sup>。

由于轮廓波变换是一种“超越”小波变换的变换理论和方法,所以它的应用研究都是在与小波变换对比中进行的,目前所有应用成果都优于小波变换或与小波变换持平。从发展趋势上看,凡是引进图像小波变换的领域或场合都会并列地引进轮廓波变换,以期获得更好的应用效果。

## 5 结 语

轮廓波变换是一种不可分的“真正的”2 维变换,它是针对自然图像固有的几何结构而设计的,而这种几何结构正是视觉信息的关键特征。设计符合要求的不可分滤波器组和构建轮廓波基函数是深入研究轮廓波变换的核心任务。目前已经研究成功的轮廓波变换是一种灵活的、多分辨率的、局部的、多方向的用轮廓线段表示的图像高效展开方法,达到了对分片光滑函数(自然图像)进行最佳逼近。它的灵活性、多方向和高效率超越了小波变换,从原理上就具有先天的优势和潜力,原则上可用其替代图

像小波变换,应用于需要图像变换的各领域。

在各种“超越”小波变换的图像变换方法中,轮廓波变换的特点是先从离散域构建开始,然后再研究连续域展开式的收敛性,从而克服了其他方法(如曲波变换)由连续域分析转到离散域所带来的困难和挑战,这就使得轮廓波变换成为备受关注的热点,已在各应用领域开展了与小波变换进行对比的实际研究,并且已显示出它的优势。

但图像轮廓波变换因其是从实现构建到理论完善的逆向产生过程,数学基础仍有待更进一步完善<sup>[18]</sup>。轮廓波具有来自拉普拉斯塔式结构的 1.333 的冗余度,这会对图像压缩编码会产生不利影响。后来的临界采样轮廓波<sup>[19]</sup>则对此进行了改进,以适应不同的应用需求。另外,由于图像小波变换的基函数为可分的 2 维张量积小波,而且在基函数构建和算法实现中可充分借助 1 维小波的成果,已成为比较成熟的变换手段,因此当轮廓线段方向较少,可以由水平、垂直和对角 3 个方向进行分解的情况,则不一定非要用轮廓波变换替代小波变换不可。

轮廓波变换的未来应着眼于更广泛的应用与更深入的研究两个发展方向。更广泛的应用既包括一般图像处理领域,也包括各种具体应用领域所涉及图像处理的部分,比如 SAR 图像、医学图像处理等领域都需要进一步应用。轮廓波变换目前仍处在进一步深入研究之中<sup>[14-15,18,20,42]</sup>,其主要集中在滤波器组的设计和轮廓波基函数的构建方面。这些都将是轮廓波未来的研究方向与热点。其中视觉信息的高效表示处于许多图像处理课题的核心地位。高效表示指的是通过图像变换使变换域系数之间的相关性大为减弱,以便使图像信息和能量集中于少数系数之中,然而无论什么变换方法也不能使变换系数完全不相关。因此,研究变换域系数之间的统计相关性和建立图像变换域统计模型化表示是研究轮廓波变换的实际应用的前提,特别是隐马尔可夫模型和隐马尔可夫树模型具有重要的价值。

通过对上述分析进行综合可以得出这样的结论:研究更有效的方向滤波器组、构建更精确的变换域系统模型以及开发轮廓波变换的应用领域是摆在研究者面前的 3 个主要课题。对于偏重实际应用的研究者来说,透彻理解轮廓波变换原理和变换域统计模型是开发实际应用的前提。而通过各领域的实际应用和不断提出要求,则是促进轮廓波变换理论和方法研究的动力。

## 参考文献 (References)

- 1 Stoeckler J, Welland G V. Beyond Wavelets[M]. New York, USA : Academic Press, 2003.
- 2 Candes E J, Donoho D L. Ridgelets: A key to higher-dimensional intermittency [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society, 1999, **357**(1760):2495-2509.
- 3 Candes E J, Donoho D L. Curvelets-a surprisingly effective nonadaptive representation for objects with edges [A]. In: Rabat C, Cohen A, Suhumaker L L, eds, Proceedings of Conference on Curves and Surfaces Fitting [C], Nashville, TN, USA: Vanderbilt University Press, 2000:105-120.
- 4 Candes E J, Donoho D L. New tight frames of curvelets and optimal representations of objects with piecewise  $C^2$  singularities [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2004, **57**(2): 219-266.
- 5 Pennec E L, Mallat S. Sparse geometric image representation with bandelets [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, **14**(4): 423-438.
- 6 Cohen A, Matei B. Compact representation of images by edge adapted multiscale transforms [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing (Special Session on Image Processing and Non-Linear Approximation) [C], Thessaloniki, Greece, 2001: 8-11.
- 7 Donoho D L. Wedgelets: Nearly-minimax estimation of edges [J]. Annals of Statistics, 1999, **27**(3): 859-897.
- 8 Wakin M B, Romberg J K, Choi H, *et al.* Rate-distortion optimized image compression using wedgelets [A]. In: Proceedings IEEE International Conference on Image Processing [C], Rochester, New York, USA, 2002:237-240.
- 9 Shukla R, Dragotti P L, Do M N, *et al.* Rate-distortion optimized tree structured compression algorithms for piecewise smooth images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, **14**(3): 343-359.
- 10 Meyer F G, Coifman R R. Brushlets: A tool for directional image analysis and image compression [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 1997, **4**(2): 147-187.
- 11 Kingsbury N. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals [J]. Applied and Computational Harmonic Analysis, 2001, **10**(3): 234-253.
- 12 Do M N, Vetterli M. Contourlets [A]. Beyond Wavelets [M]. New York, USA: Academic Press, 2003.
- 13 Do M N, Vetterli M. The contourlet transform: An efficient directional multiresolution image representation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2005, **14**(12):2091-2106.
- 14 Cunha A L, Zhou J P, Do M N. The nonsubsampling contourlet transform: Theory, design, and applications [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, **15**(10): 3089-3101.
- 15 Lu Y, Do M N. A new contourlet transform with sharp frequency localization [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C], Atlanta, Georgia, USA, 2006:1629-1632.
- 16 Xue W T, Song J S, Yuan L H, *et al.* Statistical dependences of images coefficients in Contourlet domain: Analyzing and modeling [A]. In: Proceedings of the Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation [C], Dalian, China, 2006:10121-10125.
- 17 Do M N. Directional Multiresolution Image Representations [D]. Swiss Federal Institute of Technology, Lausanne, Switzerland, December, 2001.
- 18 Zhou J P, Cunha A L, Do M N. Nonsubsampling contourlet transform: Construction and application in enhancement [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing [C], Genoa, Italy, 2005:469-472.
- 19 Lu Y, Do M N, CRISP-contourlet: A critically sampled directional multiresolution image representation [A]. In: Proceedings of SPIE Conference on Wavelet Applications in Signal and Image Processing [C], San Diego, CA, USA, 2003: 655-665.
- 20 Cunha A L, Do M N, Bi-orthogonal filter banks with directional vanishing moments [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference Acoustics, Speech, and Signal Processing [C], Philadelphia, Penn., USA, 2005: iv/553 - iv/556.
- 21 Zhou Z F, Shui P L. Contourlet-based image denoising algorithm using directional windows [J]. Electronics Letters, 2007, **43**(2): 92-93.
- 22 Ni W, Guo B L, Yan Y Y, *et al.* Speckle suppression for SAR images based on adaptive shrinkage in contourlet domain [A]. In: Proceedings of the Sixth World Congress on Intelligent Control and Automation [C], Dalian, China, 2006: 10017-10021.
- 23 Song H H, Yu S Y, Wang C, *et al.* A new deblocking algorithm based on adjusted contourlet transform [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Multimedia and Expo [C], Toronto, Canada, 2006: 449-452.
- 24 Li H F, Song W W, Wang S X. A novel blind watermarking algorithm in contourlet domain [A]. In: Proceedings of 18th International Conference on Pattern Recognition [C], Hong Kong, China, 2006: 639-642.
- 25 Bouzidi A, Baaziz N. Contourlet domain feature extraction for image content authentication [A]. In: Proceedings of IEEE Workshop on Multimedia Signal Processing [C], Victoria, Canada, 2006: 202-206.
- 26 Tang Lei, Zhao Feng, Zhao Zong-gui. The nonsubsampling contourlet transform for image fusion [A]. In: Proceedings of the International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition [C], Beijing, China, 2007:305-310.
- 27 Feng P, Pan Y J, Wei B, *et al.* Enhancing retinal image by the Contourlet transform [J]. Pattern Recognition Letters. 2007, **28**(4): 516-522.
- 28 Zewail R, Mandal M, Durdle N. Iris identification using contourlet transform [J]. Proceeding of SPIE (Image Processing: Algorithms and Systems V), 2007, **6497**:1-8.
- 29 Zheng Y A, Zhu C S, Song J S, *et al.* Fusion of multi-band SAR images based on contourlet transform [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference on Information Acquisition [C], Weihai,

- Shandong, China, 2006: 420-424.
- 30 Lian Qiu-sheng, Kong Ling-fu. The construction of redundant contourlet transform and its application to SAR image despeckling[J]. Journal of Electronics & Information Technology, 2006, **28**(7):1215-1218. [练秋生,孔令富.冗余轮廓波变换的构造及其在SAR图像降斑中的应用[J].电子与信息学报,2006,**28**(7):1215-1218.]
- 31 Sha Yu-heng, Cong Lin, Sun Qiang, *et al.* Multi-scal image segmentation based on contourlet-domain hidden markov trees model [J]. Journal of Infrared and Millimeter Waves, 2005, **24**(6): 472-476. [沙宇恒,丛琳,孙强等.基于Contourlet域HMT模型的多尺度图像分割[J].红外与毫米波学报,2005,**24**(6): 472-476.]
- 32 Yu Mei, Yi Wen-juan, Jiang Gang-yi. Image denoise based on inter-scale correlations of Contourlet transform [J]. Opto-electronic Engineering, 2006,**33**(6):73-77,83. [郁梅,易文娟,蒋刚毅.基于Contourlet变换尺度间相关的图像去噪[J].光电工程,2006,**33**(6):73-77,83.]
- 33 Wang Zhong-hua. Subband-adaptive image denoising based on contourlet transform [J]. Journal of Nanchang Institute of Aeronautical Technology(Natural Science Edicition), 2006,**20**(2):21-23. [王忠华.基于Contourlet变换的子带自适应图像去噪[J].南昌航空工业学院学报(自然科学版),2006,**20**(2):21-23.]
- 34 Guo Xu-jing, Hou Zheng-xin. Application of the all phase contourlet on image denoising[J]. Journal of Tianjin University, 2006, **39**(7): 832-836. [郭旭静,侯正信.全相位Contourlet在图像去噪上的应用[J].天津大学学报,2006,**39**(7):832-836.]
- 35 Dong Hong-yan, Yang Wei-ping, Shen Zhen-kang. Adaptive image denoising algorithm based on contourlet transform [J]. Infrared Technology, 2006, **28**(9):552-556. [董鸿燕,扬卫平,沈振康.基于Contourlet变换的自适应图像去噪方法[J].红外技术,2006,**28**(9):552-556.]
- 36 Feng Peng, Wei Biao, Pan Ying-jun, *et al.* A novel De-noising method in contourlet domain with cycle spinning [J]. Computer Simulation, 2006, **23**(9):116-118,187. [冯鹏,魏彪,潘英俊等.一种循环平移的Contourlet变换去噪新方法[J].计算机仿真,2006,**23**(9):116-118,187.]
- 37 Yang Liu, Guo Bao-long, Ni Wei. Algorithm of contourlet multi-threshold image denoising based on layer structure [J]. Computer Engineering, 2006, **32**(20):180-182. [杨镛,郭宝龙,倪伟.基于层结构的Contourlet多阈值图像去噪算法[J].计算机工程,2006,**32**(20):180-182.]
- 38 Burt P J, Adelson E H. The Laplacian pyramid as a compact image code[J]. IEEE Transactions on Communications, 1983, **31**(4): 532-540.
- 39 Bamberger R H, Smith M J T. A filter bank for the directional decomposition of images: Theory and design[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1992, **40**(4): 882-893.
- 40 Do M N, Vetterli M. Framing pyramids[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2003, **51**(9): 2329-2342.
- 41 Cunha A L, Do M N. Bi-orthogonal filter banks with directional vanishing moments [A]. In: Proceedings of IEEE International Conference Acoustics, Speech, and Signal Processing [C], Philadelphia, Penn., USA, 2005: 553-556.
- 42 Duncan D, Po Y, Do M N. Directional multiscale modeling of images using the contourlet transform [J]. IEEE Transactions on. Image Processing, **15**(6):1610-1620.
- 43 Varanasi M K, Aazhang B. Parametric generalized Gaussian density estimation[J]. The Journal of the Acoustical Society of America, 1989, **86**(4):1404-1415.
- 44 Wouwer G V, Scheunders P, Dyck D V. Statistical texture characterization from discrete wavelet representations [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1999, **8**(4):592-598.
- 45 Sharifi K, Leon-Garcia A. Estimation of shape parameter for generalized Gaussian distributions in subband decompositions of video [J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, 1995, **5**(1):52-56.
- 46 Moulin P, Liu J. Analysis of multiresolution image denoising schemes using generalized Gaussian and complexity priors [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, **45**(3):909-919.
- 47 Meyer Y. Wavelets and Operators[M]. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1992.
- 48 Cover T M, Thomas J A. Elements of Information Theory[M]. New York, USA: Wiley Interscience, 1991.
- 49 Moddemeijer R, On estimation of entropy and mutual information of continuous distributions [J]. Signal Processing, 1989, **16**(3): 233-246.
- 50 Beirlant J, Dudewicz E J, Gyofi L, *et al.* Nonparametric entropy estimation: An overview [J]. International Journal of Mathematical and Statistical Sciences, 1997, **6**(1): 17-39.
- 51 Crouse M, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based signal processing using hidden Markov models[J]. IEEE Transactions on Signal Processing (Special Issue on Wavelets and Filterbanks), 1998, **46**(4): 886-902.
- 52 Theodoridis S, Koutroumbas K. Pattern Recognition(Second Edition) [M]. New York, USA: Academic Press, 2006.
- 53 Duda R O, Hart P E, Stork D G. Pattern Classification (Second Edition) [M]. New York, USA: Wiley, 2000.