

基于多尺度局部分形维的黑色素瘤轮廓 不规则性描述方法

马 莉

(杭州电子科技大学自动化学院生物医学工程与仪器研究所, 杭州 310018)

摘 要 黑色素瘤轮廓的不规则性是区别于良性皮肤痣的重要临床特征之一, 研究皮肤肿瘤轮廓的不规则性描述对黑色素瘤计算机辅助早期诊断和治疗具有重要意义。传统分形维(FD)利用自相似度量表示轮廓的不规则性, 但作为全局特征, 分类能力较弱。为了探索新的多尺度下轮廓不规则程度的描述方法。提出了高斯滤波和局部分形维相结合的度量模型: 两种新的轮廓结构不规则性度量和多尺度下轮廓不规则性特征描述。后者优点在于提供了图像空间不同尺度下轮廓不规则性度量的特征簇。实验分析表明, 该轮廓不规则性描述子不仅增强了轮廓复杂性的细节表述, 而且不同尺度提取的轮廓不规则度统计特征可有效甄别黑色素瘤和良性皮肤肿瘤。

关键词 黑色素瘤 轮廓不规则性 多尺度局部分形维

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)05-736-06

Descriptions of Boundary Irregularity on Melanomas Using Multi-scale Local Fractal Dimension

MA Li

(Institute of Biomedical Engineering and Instruments, School of Automation Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018)

Abstract Research on CAD based boundary-feature descriptions of skin lesions for early diagnosis and medical treatments are crucial as boundary irregularity of melanomas is one of the most important clinical indicators to discriminate lesions from other benign moles. Conventional fractal dimension(FD) is utilized to describe boundary complexity based on self-similarity measures. The discriminative power of FDs is low due to its global property and lack of detail information. The objective of the paper is to explore new irregularity descriptors of object boundaries at different scales. In the paper, there are two novel measures; the irregularities of boundary structures and multi-scale features related to boundary roughness are described using an integrated quantitative model combining Gaussian filtering and local FDs. The advantage of the latter approach is that feature clusters of boundary irregularity are formed at different scales in the image space, so that the extracted measurements from multi-scale descriptions and different viewpoints (statistics and boundary-like roughness) can provide effective descriptors compared to the conventional FD and other boundary based methods and will be helpful for further classification tasks. Experiments show that the proposed irregular descriptors not only enhance fine expressions of boundary complexity but also can effectively discriminate melanomas among moles using statistical features of the boundary roughness at different scales.

Keywords melanomas, boundary irregularity, multiscale local fractal dimension

0 引 言

恶性黑色素瘤是表皮或黏膜的黑色素细胞的恶

性肿瘤, 恶性程度高, 且易发生淋巴转移, 预后不良。大量证据表明, 早期诊断和治疗能有效地提高恶性黑色素瘤的治愈率。目前, 恶性黑色素瘤的早期诊断主要依据 ABCD 规则对肿瘤的良好、恶性进行诊断^[1],

基金项目: 国家自然科学基金项目(60775016); 浙江省重大科技专项基金项目(2007C13062)

收稿日期: 2008-08-18; 改回日期: 2009-02-03

第一作者简介: 马 莉(1954—), 女, 教授, 硕士生导师。主要研究方向为图像分析、模式识别。E-mail: mali@hdu.edu.cn

即瘤体边缘形状特征的不对称性 (Asymmetry)、不规则性 (Boundary Irregularity)、瘤体的颜色分布 (Color) 和瘤体直径 (Diameter)。随着影像学检查手段的普及,临床医师需要非接触的计算机辅助诊断系统帮助诊断早期皮肤肿瘤,提高诊断的准确率。探索基于机器视觉的肿瘤体外轮廓的有效描述方法,对黑色素瘤计算机辅助早期诊断和治疗具有重要意义。

近十几年来,人们用图像分析技术对黑色素瘤检测进行了许多研究。在皮肤肿瘤视觉特征中,肿瘤轮廓的不规则性是最重要特征之一^[2]。临床上,良性痣表现为颜色均匀的小肿瘤(圆或椭圆形);而恶性黑色素瘤瘤体尺寸较大,表面具有多种颜色且外轮廓呈现不规则性和不对称性。对于黑色素瘤表面轮廓的不规则性的研究可以分为两个方面:1) 瘤体表面和周围皮肤交界处灰度变化的锐利程度分布^[3];2) 瘤体外轮廓的粗糙度或不规则性。前者通过计算轮廓边缘灰度变化的一阶统计量描述边缘灰度梯度的不均匀性^[3-4],后者利用轮廓的分形维值 (FD)^[5-6]度量肿瘤轮廓的不规则程度,或者直接根据轮廓曲线的几何分布计算不规则程度^[7-9]。研究表明,黑色素瘤表面轮廓具有两种类型的不规则性:纹理不规则和结构不规则^[2,10]。纹理不规则是指沿瘤体轮廓细微的变化,结构不规则是指沿轮廓的凹凸起伏。纹理不规则性易受摄像环境噪声的影响,而结构不规则性具有重要的临床诊断意义^[2]。以上所述传统轮廓不规则性度量方法均在原始图像上进行,未涉及轮廓结构不规则性,但试验表明这些轮廓全局度量方法会引起假阳性或假阴性。图1通过所给出的3幅皮肤肿瘤轮廓图像说明纹理不规则性与结构不规则性。图1(a)轮廓上不存在结构凹凸起伏,但具有较强的纹理不规则性;图1(b)轮廓上部具有结构不规则性,但纹理不规则性较少;图1(c)在下半部具有显著的结构不规则性。传统分形维 (FD) 广泛用来度量轮廓或表面的粗糙

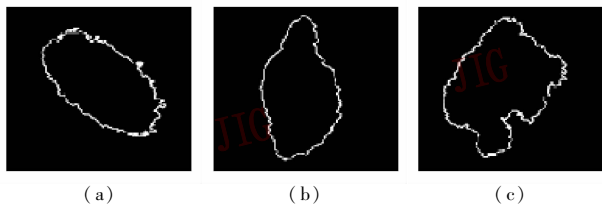


图1 皮肤肿瘤轮廓纹理不规则性和结构不规则性

Fig. 1 Contour textural and structural irregularity of a skin lesion

度^[11],然而FD对结构不规则性并不敏感^[2](图1中3个肿瘤轮廓的FD值经计算分别为1.2168, 1.1383, 1.2168)。值得注意的是,FD值是一个全局特征。虽然图1(c)中存在大的凹凸子段,但属于局部信息,图1(c)中轮廓平滑部分使得整体轮廓的FD降低,造成与视觉感知的不一致性,也弱化了FD的分类能力^[6]。

为了获取轮廓结构不规则性,Claridge等人设计了称为结构分形维(SFD)度量,SFD值取分形尺度断点之后的数据拟合结果,但断点的确定存在困难^[10]。Lee等人提出用多尺度轮廓的曲率模型确定合适的尺度级进行结构不规则性度量^[2],需要在尺度空间跟踪曲率极值点位置。本文的基本思想是将轮廓高斯滤波和局部分形维分布结合,利用局部分形维分布特征确定适合度量结构不规则性的尺度,建立皮肤肿瘤轮廓结构不规则性的度量模型。本文提出了两种新的(适当尺度下基于局部分形维和基于轮廓几何的)结构不规则性度量,以及多尺度下的轮廓不规则性特征量。其优点在于:1)局部分形维分布保留了轮廓不规则程度的自然特性,同时保留了轮廓凹凸位置、强度等局部细节信息;2)高斯滤波与局部分形维分布配合直接度量轮廓的结构不规则性;并且在不同尺度下利用轮廓局部分形维分布的统计信息构建多层次不规则性的描述。

1 多尺度局部分形维分布

分形几何学是由Mandelbrot首先提出,并用分形维来解释自然界物体表面的粗糙程度^[12]。所谓“分形”,是指一类“其组成部分与整体相似的形态”。一个分形物体具有各向异构性和在不同尺度上自相似性,通常用来描述物体表面的复杂性。

1.1 局部分形维分布

给定一个二值图像 I 与合适的度量 μ , 令 $\mu(B(x_i, r))$ 是轮廓上以 x_i 为中心, 尺寸为 r 的网格 B 内所包围的所有像素灰度的累加和。设 $D(x_i)$ 为点 x_i 处的局部分形维 ($i = 1, 2, \dots, N$), N 为轮廓上点的数目。改变网格尺寸 r , 在对数坐标系 $\log r - \log(\mu(B(x_i, r)))$ 中对数据进行拟合,

$$\log \mu(B(x_i, r)) = \log \beta_i + D(x_i) \log(r) \quad (1)$$

式(1)中表示所拟合的直线斜率为点 x_i 处的局部分形维值 $D(x_i)$, 截距 $\log \beta_i$ 为局部分形长度, 均

为位置 x_i 的函数。如果网格尺寸一定,某点周围曲线越粗糙,则网格所围的轮廓点数就多,所拟合的局部分形维 $D(x_i)$ 就大;反之,平滑曲线处的分形维值就小。因此,沿轮廓点滑动所得到的 $D(x_i)$ 分布描述了轮廓局部复杂性信息,表示了不规则性的细节特征。为了描述简便,在以下各节用 d_i 替代点 x_i 处的局部分形维模型 $D(x_i)$ 。归一化分形维分布位于 0-1 之间。图 2 给出了规则图形轮廓(正方形(a)、圆(b)、带有粗糙边缘的圆(c))的局部分形维分布(未归一化)。图 2(d)、图 2(e)、图 2(f)分别为正方形、圆、带有粗糙边缘的圆轮廓的局部分形维分布(local fractal distribution, LFD),图中横坐标为图形的轮廓点序列。可以看出,局部分形维对轮廓上的角点(高曲率点),轮廓的粗糙程度的检测是敏感的。局部分形维不仅可以描述形状的细节信息(奇异点定位),其统计直方图具有较强的分类能力^[13]。在实验中,分别计算了这 3 个轮廓的全局分形维,其分形维值在尺度 $r \in [1, 41]$ 内拟合的分形维值分别为 $[1.092\ 7, 1.022\ 3, 1.037\ 3]$,相差甚微,而局部分形维分布对轮廓形状变化更敏感。除此之外,局部分形维还具有局部不变特征,即对目标轮廓的仿射变换具有局部不变性(详见附录)。

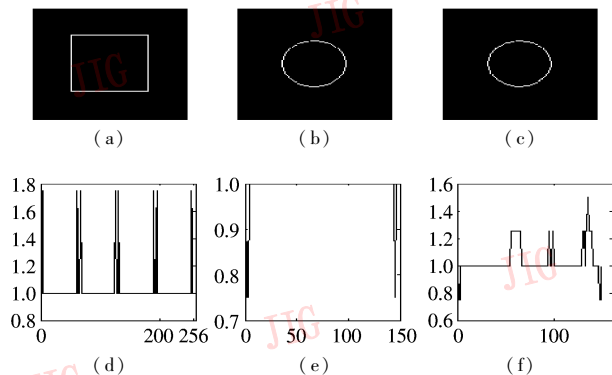
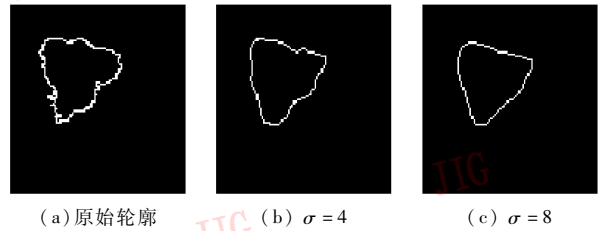


图 2 规则图形轮廓的局部分形维分布

Fig. 2 LFDs of regular shape contours

1.2 多尺度局部分形维

局部分形维描述了轮廓上形态变化的分布信息,分形维值 d_i 较大的地方表示轮廓曲率较大, d_i 较小表示比较平滑。对于皮肤肿瘤轮廓的不规则性分析来说,轮廓的平滑与粗糙与否不仅与形态有关,而且与观测尺度有关(如图 3 所示)。原始轮廓 $l(x)$ 与高斯平滑滤波器 $g(x, \sigma)$ 卷积产生尺度空间轮廓向量



(a) 原始轮廓 (b) $\sigma = 4$ (c) $\sigma = 8$

图 3 高斯滤波不同尺度下的黑素瘤轮廓

Fig. 3 Melanoma contours under different Gaussian filtering scales

$$L(x, \sigma) = l(x) \otimes g(x, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} l(u) \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-u)^2}{2\sigma^2}} du \quad (2)$$

式中, $l(u)$ 为轮廓上点 u 的坐标, σ 是控制平滑度的高斯标准差。随着 σ 不断增加,轮廓 $l(x)$ 上的曲率极值逐渐消失, $L(x, \sigma)$ 演化为更平滑的轮廓。图 3 给出经过高斯滤波不同 σ 下的黑素瘤轮廓。其中,图 3(a) 是原始轮廓,尺度 $\sigma = 0$ (轮廓包含纹理的不规则和结构的不规则性),图 3(b) 中, $\sigma = 4$, 平滑后的轮廓细微的波动基本消失,凸显结构的不规则性,图 3(c) 中, $\sigma = 8$ 不存在纹理不规则性,但右侧的凹凸起伏被削弱了。如果尺度进一步增大,轮廓可以演变为平滑的圆或椭圆。在不同的尺度下观测轮廓的局部分形维分布 $[d_i^k, i = 1, 2, \dots, N; k = 0, 1, \dots, K]$, 可以清楚揭示轮廓纹理不规则性的演变,并寻找合适的尺度级,在该尺度上度量轮廓的结构不规则性。其中 K 是最大尺度级。与小波变换不同,不同尺度的轮廓采样点数相同。

图 4 给出了在两种尺度下的轮廓及其局部分形维分布,它揭示了轮廓的粗糙度与轮廓分辨率(尺度)的关系。随着观测尺度增大(轮廓更平滑),局部分形维表示出轮廓的结构不规则信息。图 4(a) 是黑色素瘤原始轮廓,其归一化局部分形维分布如图 4(c) 所示(极坐标中径向距离为轮廓上的分形维值)。从图中看出,轮廓上的不规则性表现为沿局部分形维分布曲线包络的波动性,其分形维均值较大,并且刺状线表示粗糙程度高(较大的刺状线处对应凹陷和突起部分)。在大尺度下(高斯滤波 $\sigma = 5$) 得到较平滑的轮廓(图 4(b)) 后,轮廓上纹理不规则性基本消失,但结构的不规则性仍然存在,表现为随角度 θ 波动的分形维包络线,但均值已经较图 4(c) 大大降低,轮廓上凹凸起伏在局部分形维分布中清晰呈现。

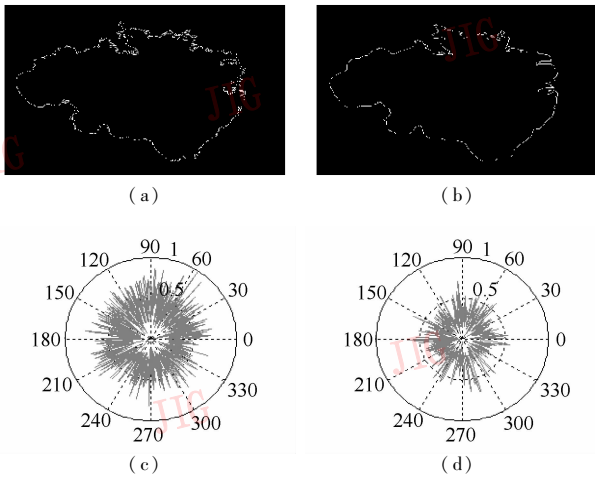


图 4 黑色素瘤在两种尺度下轮廓及局部分形维分布
Fig. 4 Contours and LFDs of a melanoma on two scales

2 轮廓结构不规则度量 and 特征量

由以上分析可知,基于多尺度局部分形维分布度量轮廓结构不规则性的关键是选择合适的尺度级。尺度过小,轮廓仍包含纹理的不规则性,尺度过大,轮廓结构不规则性会削弱。试验研究发现,随着尺度的增加,轮廓局部分形维的方差逐渐减少;当方差减少到某值之后,方差波动呈现无规则变化。本文将方差呈现不规则变化时的尺度临界值作为检测结构不规则性的尺度 σ_i 。

2.1 轮廓结构不规则性度量

1) 基于局部分形维分布的结构不规则性度量

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N} \quad (3)$$

$$I_t = \frac{A_d}{A_s} \times 100$$

式中, d_m 为被测目标轮廓的平均分形维, d_i 是在选定的 σ_i 尺度下轮廓上点 i 处的归一化局部分形维, N 为轮廓数目。 I_t 为基于分形维的轮廓结构不规则度, A_s (下标 s 表示标准圆) 是以局部分形维包络中心为圆心, 以 d_m 为半径形成的标准圆面积, A_d (下标 d 表示差集) 是被测目标轮廓局部分形维所围区域与标准区域差集的面积。

2) 基于轮廓分析的结构不规则性度量 I_c

$$I_c = \frac{A_i}{A_f} \times 100 \quad (4)$$

式中, A_f 是被测目标轮廓的傅里叶描述子的前 m 项

进行反变换形成的近似轮廓 C_f 所围区域的面积; A_i 是选定的 σ_i 尺度下目标轮廓区域与 C_f 所围区域进行异或运算后的区域面积。本方法用傅里叶描述子前几项近似形成没有结构不规则性的参照轮廓, 较文献[8]的方法更符合结构不规则度量的物理定义^[10]。

2.2 相关特征量提取

在寻找 σ_i 度量目标轮廓结构不规则性的过程中, 形成了不同尺度下局部分形维分布簇, 其统计信息有助于描述轮廓在不同尺度上的演变, 可以提供新的途径辅助诊断 (以下特征用于不同尺度)。文中选择的局部分形维分布统计特征包括均值、斜度和信息熵。均值表示整体的粗糙程度, 斜度是局部分形维分布对称性的度量。对称的分形维分布斜度近似为零, 负值表示分布偏向分形维较小的一侧 (轮廓比较平滑), 正值表示分布偏向数值较大的一侧 (轮廓比较粗糙)。信息熵描述信号的混沌程度, 这里表示轮廓的不规则性。其他特征有:

1) 穿越阈值次数

$$TC = \sum_{i=1}^N F(d_i)$$

$$F(d_i) = \begin{cases} 1 & d_i \geq T \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

式中, TC 为轮廓上局部分形维 d_i 大于阈值 T 的点数。

2) 轮廓粗糙度

$$R = \frac{\sum_{j=1}^k R(j) + (L_{k+1}/L_s)R(k+1)}{k + (L_{k+1}/L_s)}$$

$$(k = N/L_s - 1)$$

$$R(j) = \sum_{i=j}^{L_s+j} |d'_i - d'_{i+1}| \quad (j = 1, 2, \dots, N/L_s)$$

$$d'_i = \begin{cases} d_i & d_i > T_r \\ T_r & \text{其他} \end{cases} \quad (6)$$

将轮廓的局部分形维分布分解成 k 个子段, 每个子段的长度为 L_s , 通过累计每个子段的差异计算轮廓的粗糙度。本文对文献[7]计算轮廓的粗糙度进行了修正, 这是因为局部分形维分布表示轮廓的粗糙程度, 小于阈值 T_r 处表示平滑, 在计算中应该去除平滑段的影响。其中 d'_i 为第 i 个轮廓点修正后的局部分形维值。

3 实验结果

黑色素瘤和良性痣的图像 48 幅取自文献[14]

数据库和国外大学研究机构,实验在 Matlab6.5 平台下进行。实验分为两个部分:1) 提出的基于轮廓的和基于局部分形维的不规则性度量与传统度量方法的对比;2) 多尺度下基于分形维特征量的实验比较。图 5 给出了两种结构不规则度量的方法。图 5(a) 为滤波后的轮廓($\sigma_t = 5$)与傅里叶描述子前 3 项的近似轮廓比较,根据两个轮廓所围区域的异或累加和计算轮廓不规则性;图 5(b) 为滤波后($\sigma_t = 5$)轮廓局部分形维分布,分形维大于均值 d_m 的累加和 A_d 与 A_s 之比作为结构不规则性度量。由于局部分形维取值的大小直接与局部复杂性有关,特征计算简便并且对噪声具有鲁棒性。可以看出,定义的不规则度量均能反映轮廓不规则程度。然而,该轮廓的全局分形维(值为 1.2465)不能准确描述结构不规则性。为了考察不同尺度下轮廓不规则特征的情况,可将黑色素瘤图像分为

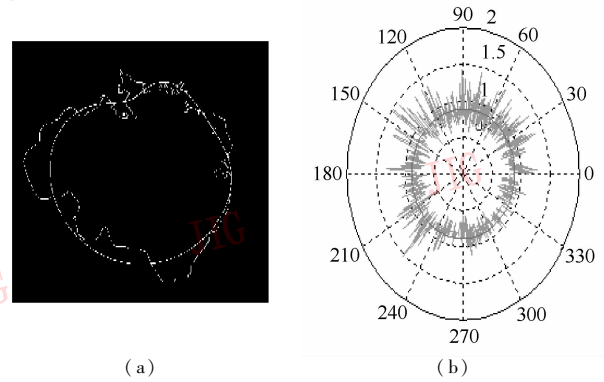


图 5 轮廓结构不规则性度量

Fig. 5 The measurement of contour structural irregularity

3 组,良性痣 2 组,在尺度为 $\sigma = 2$ 和 $\sigma = 5$ 下,每组中随机取 1 个计算各特征量,其结果如表 1 所示。表 1 中前 2 项是常用的轮廓不规则性度量 FD 和不规则度量 r_c [8]。

表 1 轮廓结构不规则性度量和特征量实例

Tab. 1 Instances of structural irregularity measures and features

特 征	黑色素瘤			良性痣	
	Melanoma G1	Melanoma G2	Melanoma G3	Benign G1	Benign G2
传统 FD	1.331 6	1.432 6	1.143 6	1.216 8	1.105 2
传统轮廓几何 ^[8]	0.054 3	0.032 6	0.064 7	0.045 5	0.032 4
不规则度量式(5)	0.248 8	0.268 7	0.259 6	0.164 5	0.156 4
不规则度量式(4)	0.431 3	0.516 2	0.504 2	0.333 1	0.274 5
均值	1.074 8	1.153 2	1.055 6	0.881 7	0.678 3
斜度	0.451 3	0.660	0.430 0	0.319 2	0.278 5
$\sigma = 2$					
熵	3.700 9	3.834 1	3.648	3.150 3	2.674 2
穿越次数	891	368	101	5	3
粗糙度	3.918 7	2.977 6	2.574 4	2.145 1	1.814 6
均值	0.887 5	0.897 3	0.835 9	0.817 1	0.598 4
斜度	1.224 2	0.582 0	0.523 1	0.063 3	0.004 3
$\sigma = 5$					
熵	3.225 4	3.613 3	3.029 5	2.160 2	2.134 2
穿越次数	114	23	3	0	0
粗糙度	2.237 2	2.039 7	1.101 7	2.027 2	1.406 2

从表 1 中可以看出,1) 传统度量 FD 和 r_c 的计算值类内具有不一致性。提出的轮廓结构不规则度量 I_c 和 I_f 具有类内一致性和类间差异性,并且基于局部分形维的度量 I_f 具有较显著、且一致的类间差异;2) 在基于局部分形维的黑色素瘤不规则特征中,均值、穿越次数、熵随尺度增加而减少,斜度、粗糙度随尺度而增加,然而良性痣的斜度具有相反的

变化趋势;3) 均值、斜度和穿越次数具有较强的类间甄别能力。

4 结 论

本文的目标是探索多尺度下轮廓结构不规则程度的描述方法。提出的高斯滤波和局部分形维相结

合的度量模型,提供了度量皮肤肿瘤结构不规则性的有效方法。一方面可以通过轮廓分辨率的下降(尺度增加)去除轮廓的纹理不规则性,凸显结构的不规则性,进而给出准确的不规则度量;另一方面利用局部分形维有效反应轮廓不规则程度分布的特点,在不同尺度下形成不规则性度量的特征簇,这些特征的综合分析有利于对肿瘤轮廓细节特征的揭示。比如,较大的结构不规则度量值和较小的斜度,表示轮廓具有弱纹理不规则性;斜度值大且较大 I_r 或 I_l 值表示结构不规则性显著,进一步利用阈值穿越点可以提醒医师关注结构不规则发生的位置,有助于辅助诊断。实验分析表明,提出的轮廓不规则性度量是有效的,均值、斜度、阈值穿越次数都具有显著区分性。今后将进一步开展特征选择、多尺度信息融合研究,实现基于图像分析的皮肤肿瘤准确分类。

参考文献 (References)

- [1] Costantino Grana, Giovanni Pellacani, Rita Cucchiara, et al. A new algorithm for border description of polarized light surface microscopic images of pigmented skin lesions[J]. Journal of IEEE Transactions on Medical Imaging, 2003, 22(8): 959-964.
- [2] Lee T K, McLean D, Atkins M S. Irregularity Index: A new border irregularity measure for cutaneous lesions[J]. Journal of Medical Image Analysis, 2003, 7(1): 47-64.
- [3] Tanaka T, Yamada R, Tanaka M, et al. A study on the image diagnosis of melanoma [C]//Proceedings of the 26th Annual International Conference of the IEEE EMBS. San Francisco, CA, USA, IEEE Press, 2004: 1597-1600.
- [4] Harald Ganster, Axel Pinz. Automated melanoma recognition[J]. Journal of IEEE Transactions on Medical Imaging, 2001, 20(3): 233-239.
- [5] Jayalalitha G, Uthayakumar R. Estimating the skin Cancer using fractals [C]//Proceedings of the International Conference on Computational Intelligence and Multimedia Application (ICCIMA). Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2007: 2, 306-311.
- [6] Vincent N G, Andrew Coldman. Diagnosis of melanoma with fractal dimensions [C]//Proceedings of IEEE Region 10 Conference on Computer, Communication, Control and Power Eng. Beijing, China, [s. n.]1993: 514-517.
- [7] Harris Georgiou, Michael Mavroforakis, Nikos Dimitropoulos, et al. Multi-scaled morphological features for the characterization of mammographic masses using statistical classification schemes[J]. Journal of Artificial Intelligence in Medicine, 2007, 41(8): 39-55.

- [8] Khaled Taouil, Nadra Ben Romdhane. Automatic segmentation and classification of skin lesion images [C]//Proceedings of the 2nd International Conference on Multimedia Application. Penang, Malaysia, IEEE Press, 2006: 1-12.
- [9] Su H, Bouridane A, Crookes D. Scale adaptive complexity measure of 2D shapes [C]//Proceedings of the 18th International Conference on Pattern Recognition. Hong Kong, China: IEEE Press, 2006, 2: 134-137.
- [10] Claridge E, Hall P N, Keefe M, et al. Shape analysis for classification of malignant melanoma [J]. Journal of Biomed. Eng., 1992, 14(22): 229-234.
- [11] Justin M. Zook, Khnan M. Iftekaruddin. Statistical analysis of fractal-based brain tumor detection algorithms [J]. Journal of Magnetic Resonance Imaging, 2005, 23(5): 671-678.
- [12] Chandhuri B B, Nirupam Sarker. Texture segmentation using fractal dimension [J]. Journal of IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1995, 17(1): 72-77.
- [13] Varma M, Garg R. Locally invariant fractal features for statistical texture classification [C]//Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision, Rio de Janeiro, Brazil, IEEE Press, 2007: 232-237.
- [14] Dermnet. Skin Disease Image Atlas [EB/OL]. [2008-06-17]. <http://www.dermnet.com>.

附 录

局部分形维的局部仿射变换不变性

定义一个变换: $f: X \rightarrow Y, X, Y \subset R^2$ 。当点 $x \in X$, 变换函数 $f(x) = Ax$ (A 是仿射变换矩阵, $f(x) \in Y$), 由于仿射变换矩阵是可逆的, 并且对 $\forall x, y \in X$, 则满足

$$|f(x) - f(y)| = |A(x - y)| \leq |A| |x - y| = c_2 |x - y|, \text{同理 } c_1 |x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2 |x - y|$$

若 $c_2 \geq c_1 > 0$, 则仿射变换函数 f 是一个双 Lipschitz 函数^[9]。

设变换点 $f(x)$ 处的局部分形维 D' 满足直线方程 $\mu(B(f(x), r)) = D' \log(r) + L'$, 其中 L' 是分形长度。由于函数 f 是可逆的, 在变换域 (Y) 中以 $f(x)$ 为中心尺度为 r 网格内所包围的像素个数应等于经过逆变换在原始图像域 (X) 中某点集 $P(B(x, r/c_2)) \subseteq P \subseteq B(x, r/c_1)$ 所包围的像素个数。对集合取度量 μ , 可得到 $D \log(r/c_2) + L \leq D' \log(r) + L' \leq D \log(r/c_1) + L$ 其中 D 和 L 分别是 $f(x)$ 的反变换 x 处的局部分形维和分形长度。从上式可以得到 $D = D'$ 。这意味着对于仿射变换, 在满足约束条件下, 局部分形维具有不变性, 称为局部不变性。