

基于形状修正的三角网格模型顶点法矢估算方法

彭育辉^{1), 2)} 高诚辉¹⁾

¹⁾ (福州大学福建省制造业数字化设计工程研究中心, 福州 350002) ²⁾ (福州大学机械工程及自动化学院, 福州 350108)

摘要 为了提高三角网格模型的顶点法矢计算的准确度和稳定性, 提出了一种改进的基于三角形形状修正的法矢估算方法, 并首先对具有代表性的 5 种顶点法矢估算方法进行了分析, 通过比较各估算方法在顶角、面积等权重方面的处理特点及存在的缺陷, 提出了一种评价因子对三角形形状质量进行量化, 且在理论上给予了证明; 然后据此对顶点法矢估算方法进行了改进; 最后利用规则和不规则的二次曲面网格模型进行了实验验证, 并以顶点法矢误差的算术平均值和标准方差来分别评价各种估算方法估算结果的准确度和稳定性。实验结果证明, 该新方法较其他估算方法估算的顶点法矢精度更高, 稳定性更好。

关键词 形状修正 三角网格 法矢 误差分析

中图分类号: TP391.72 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)01-0142-07

An Improved Algorithm for Vertex Normal Computation of Triangular Meshes Based on Shape Correction

PENG Yu-hui^{1), 2)}, GAO Cheng-hui²⁾

¹⁾ (Digital Design Center for Manufacture of Fujian Province, Fuzhou University, Fuzhou 350002)

²⁾ (College of Mechanical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou 350108)

Abstract An improved algorithm based on correcting triangle shape is presented to improve accuracy and stability of computing vertex normal of triangular meshes. Firstly, five representational algorithms are analyzed by comparing their weighting characteristics. Following that, a quantitative assessment parameter to estimate the quality of triangle shape is proposed and demonstrated in theory, and then we put forward an improved equation to amend the influence of triangle shape. Finally, the article tests all algorithms with regular and irregular triangular meshes of quadratic surfaces for evaluating the algorithm's accuracy and stability. Experimental results demonstrate the improved approach is effective.

Keywords shape correction, triangular mesh, vertex normal, error analysis

0 引言

三角网格模型是 3 维空间中由一系列相互连接的三角形面片组成的一种曲面离散逼近的表达形

式。由于三角形网格比四边形网格更为稳定, 更能灵活反映实际曲面复杂的形貌, 因此适用于任意分布的散乱数据点集, 而且使得它在计算机图形学、计算机视觉、反求工程、快速原型制造等许多领域得到广泛应用。由于三角网格模型的顶点法矢表达了重

基金项目: 国家自然科学基金项目 (50605007); 福建省重大科技项目 (2007H2011); 福建省教育厅科研资助项目 (JA08028)

收稿日期: 2008-07-09 改回日期: 2009-01-16

第一作者简介: 彭育辉 (1975—), 男。2000 年获南京理工大学车辆工程专业硕士学位, 现为福州大学机械工程及自动化学院讲师, 在职博士研究生。主要研究方向为反求工程、快速制造等。E-mail: pengyuhu@fzu.edu.cn

通讯作者: 高诚辉。E-mail: gcl@fzu.edu.cn

要的微分几何信息, 因此在曲面重构^[1]、曲面分割^[2]、模型光滑^[3]等方面经常把它作为已知前提, 且顶点法矢计算的准确与否严重影响着后续的计算结果。对三角网格模型的顶点法矢进行估算, 尽管 Gouraud、Thumer、Taubin、Max 以及神会存等人先后提出了不同的估算方法^[4-8], 但各种方法的理论依据、权重法则都不相同。Jin 等人对早期的 3 种估算方法进行了比较^[9], 却未能系统地对各方法的权重特点进行分析比较; 姜寿山等人基于数学推理提出了判别 3 维多面体顶点法矢计算方法优劣的准则^[10], 但是其理论却基于顶点邻接三角面片是具有外接球的四面体, 在实际应用中具有较大的局限性。因此, 需对各种三角网格模型的顶点法矢估算算法的特点进行系统地分析和比较, 以期进行改进, 即提高离散点法矢计算的准确度和稳定性显得十分必要。

本文首先对目前具有代表性的 5 种三角网格模型的顶点法矢估算方法进行了分析, 通过比较各种估算方法在顶角、面积等权重方面的处理特点以及存在的缺陷, 并引入了一种评价因子, 用来对三角形形状质量进行量化, 且在理论上给予了证明, 据此提出了一种改进的基于三角形形状修正的法矢估算方法, 该方法充分考虑了三角形的形状、面积、顶角等因素对顶点法矢的影响。最后通过对规则和 irregular 的 6 种不同的二次曲面网格模型进行实验验证, 并以顶点法矢的算术平均误差和标准方差来分别评价各估算方法的准确度和稳定性。结果证明, 本文改进方法估算的顶点法矢具有较其他方法更高的精度, 特别对于不规则及三角形形状存在较大差异的三角网格模型, 该方法的计算精度最好、稳定性最高。

1 三角网格模型顶点法矢估算方法

1.1 基本定义

为了叙述方便, 引入以下一些基本定义 (如图 1 所示):

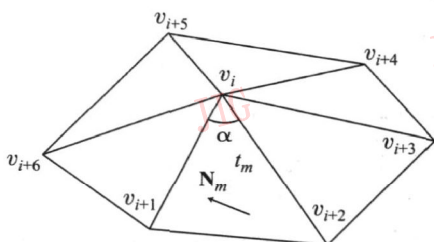


图 1 顶点 v_i 的 1-ring 三角形
Fig 1 1-ring triangles of vertex v_i

定义 1 若空间中一组三角形沿公共边在顶点处相邻接, 则把这样的一组三角形定义为三角形网格 M , M 可由顶点集 $V = (v_1, v_2, \dots, v_i)$ 和三角形集合 $T = (t_1, t_2, \dots, t_j)$ 所组成的二元组 (V, T) 来表示。

定义 2 由 3 维网格模型上某顶点 v_i 和其相邻顶点 $N(v_i)$ 所围成的环称为 1-ring 点 v_i 为 1-ring 的中心点, $N(v_i)$ 为 1-ring 的边界点; 以点 v_i 为顶点的三角形集合 $T_i = (t_1, t_2, \dots, t_m)$, 称为点 v_i 的 1-ring 三角形。

定义 3 任一顶点 v_i 的单位法矢记为 n_i ; 第 m 个三角形 t_m 的面积为 A_m , 其所在平面的单位法矢记为 N_m 。

定义 4 若顶点 v_j 属于点 v_i 的 1-ring 的边界点, 则将点 v_j 与点 v_i 的连接边矢量记为 E_{ij} , 方向由点 v_j 指向点 v_i 。

根据上述定义, 三角形 t_m 所在平面的单位法矢 N_m 可以通过以下公式计算:

$$N_m = \frac{E_{i+2} \times E_{i+1}}{\|E_{i+2} \times E_{i+1}\|} = \frac{(x_{i+2} - x_i) \times (x_{i+1} - x_i)}{\|(x_{i+2} - x_i) \times (x_{i+1} - x_i)\|} \quad (1)$$

其中, x_i, x_{i+1}, x_{i+2} 代表三角形 t_m 的 3 个顶点的坐标矢量。

1.2 法矢估算方法回顾

当前, 具有代表性的三角网格模型的顶点法矢估算方法有 Gouraud、Thumer、Taubin、Max 和神会存等人提出的 5 种方法。

方法 1^[4] 它是 Gouraud 于 1971 年提出的三角网格模型顶点法矢估算方法, 其基本思想是认为顶点 v_i 的 1-ring 三角形各法矢对于顶点 v_i 的法矢 n_i 的贡献是相等的, 其计算公式为

$$n_i = \frac{\sum_{k=1}^k N_k}{\left\| \sum_{k=1}^k N_k \right\|} \quad (2)$$

方法 2^[5] Thumer 和 Wuthrich 认为, 式 (2) 使得顶点 v_i 的法矢过于依赖点 v_i 的与 1-ring 的边界点之间的拓扑结构, 因此提出用各三角形在点 v_i 的夹角加权对式 (2) 进行修正的方法, 其计算公式为

$$n_i = \frac{\sum_{k=1}^k \alpha_k N_k}{\left\| \sum_{k=1}^k \alpha_k N_k \right\|} \quad (3)$$

方法 3^[6] Taubin 考虑了各三角片面积大小对顶点 v_i 的单位法矢 \mathbf{n}_i 的影响, 其基本思想是按三角形的面积对式 (2) 进行修正, 面积越大的三角形, 其对 \mathbf{n}_i 的贡献越大, 修正后公式为

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{k=1}^k A_k \mathbf{N}_k}{\left\| \sum_{k=1}^k A_k \mathbf{N}_k \right\|} \quad (4)$$

方法 4^[7] 神会存等人综合了方法 2 和方法 3 的影响因素, 提出如下以面积与顶角加权的顶点法矢计算公式:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{k=1}^k \alpha_k A_k \mathbf{N}_k}{\left\| \sum_{k=1}^k \alpha_k A_k \mathbf{N}_k \right\|} \quad (5)$$

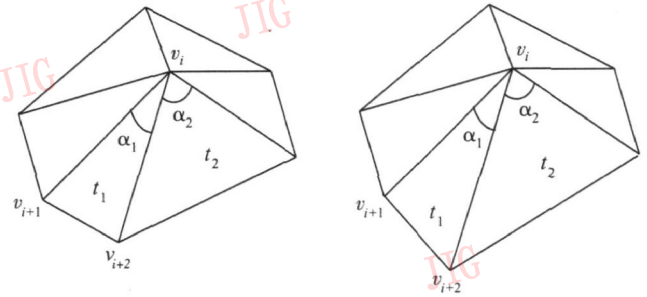
方法 5^[8] Max 认为各三角形在点 v_i 处的夹角和连接边长同样影响该三角形法矢对 \mathbf{n}_i 的贡献, 因此提出了以下修正公式:

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{k=1}^k \frac{\sin \alpha_k \mathbf{N}_k}{|\mathbf{E}_{i,i+1}| |\mathbf{E}_{i,i+2}|}}{\left\| \sum_{k=1}^k \frac{\sin \alpha_k \mathbf{N}_k}{|\mathbf{E}_{i,i+1}| |\mathbf{E}_{i,i+2}|} \right\|} \quad (6)$$

1.3 算法分析

1.3.1 权重问题

上述各种法矢计算方法除方法 1 外, 均把三角形的面积、顶角通过不同的组合方式作为权重, 可见面积和顶角深刻地影响着顶点的法矢。方法 3、方法 4、方法 5 均认为顶角越大, 该三角形对 \mathbf{n}_i 的贡献越大 (如图 2(a) 所示), 因为 $\alpha_2 > \alpha_1$, 显然三角形 t_2 较 t_1 对顶点 v_i 的局部区域表达影响更大。若只对图 2(a) 顶点 v_{i+2} 进行延伸 (如图 2(b) 所示), 则三角形 t_2 和 t_1 的面积增大, 而顶角 α_2 和 α_1 则保持不变。由于顶点 v_{i+2} 进一步远离顶点 v_i , 因此边矢量 $\mathbf{E}_{i,i+2}$ 对顶点 v_i 的法矢 \mathbf{n}_i 的影响减弱, 即在顶角保持不变, 三角形面积越大时, 该三角面片法矢对 \mathbf{n}_i 的影响越小, 所以当三角形网格模型中各三角面片的面积差异较大时, 方法 3 与方法 4 的计算结果将存在较大的误差。而在实际应用中, 由于离散点分布的不均匀性以及模型的精简都会使得三角网格模型中三角面片的面积差异较大, 所以方法 3 与方法 4 具有一定的局限性。



(a) 原三角网格 (b) 顶点 v_{i+2} 延伸后的三角网格

图 2 三角网格变形

Fig 2 Triangular meshes with different shape

1.3.2 各种方法存在的问题

如图 3 所示, 空间存在具有相同法矢 \mathbf{N}_m 的 4 种不同形状的三角面片, 其中图 3(a)、图 3(c)、图 3(d) 中的三角形面积 A_m 相等, 且与图 3(b) 的三角形面积不等, 同时图 3 中的 $\alpha_1 \neq \alpha_2$ 。

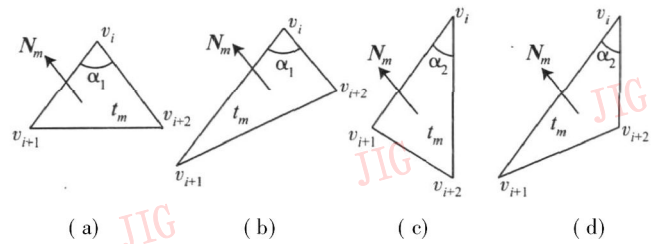


图 3 不同形态的三角形

Fig 3 Triangles with different shape

因为

$$A_i = \frac{1}{2} |\mathbf{E}_{i,i+1}| |\mathbf{E}_{i,i+2}| \sin \alpha_i \quad (7)$$

将式 (7) 代入式 (6), 即得到

$$\mathbf{n}_i = \frac{\sum_{k=1}^k \frac{\sin^2 \alpha_k \mathbf{N}_k}{2A_k}}{\left\| \sum_{k=1}^k \frac{\sin^2 \alpha_k \mathbf{N}_k}{2A_k} \right\|} \quad (8)$$

通过对式 (3) ~ (5) 式 (8) 进行分析可以得知:

1) 虽然图 3(a) 与图 3(b) 三角形的顶角相同, 但是三角形的面积和形状都存在很大差异, 此时式 (3) 无法修正图 3(a) 与图 3(b) 中三角形的差异所引起的 \mathbf{N}_m 对 \mathbf{n}_i 的不同影响;

2) 虽然图 3(a) 与图 3(c) 或图 3(a) 与图 3(d) 的三角形面积相等, 但依赖式 (4) 仍然无法修正由三角形的形状差异所产生的对 \mathbf{n}_i 的不同影响;

3) 图 3(c) 与图 3(d) 的三角形面积和顶角相等, 如果利用式 (5) 或式 (6) 计算, 则图 3(c) 与图 3(d) 中的不同形状的三角形对 \mathbf{n}_i 的影响是等同的,

但也无法修正三角形形状差异对顶点法矢 n_i 的影响。

式 (3) 式 (5) 式 (6) 将顶角作为三角形的形状因素用于法矢估算方法的修正, 但是顶角作为三角形的一个内角并不能完全体现三角形的形状, 这就使得上述算法在理论上存在一定的缺陷。

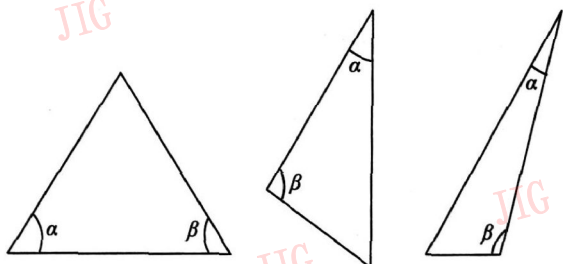
基于上述分析, 本文提出了一种改进的基于三角形形状修正的法矢估算方法, 该方法同时考虑了面积的影响权重。

2 基于三角形形状修正的法矢估算

2.1 三角形形状评价指标

三角形形状评价指标用于对三角形的形状的规整度进行量化评价, Hamann 提出以 3 个内角的余弦和为评价指标^[11]; Guezic 采用面积与边长平方和之比最大来衡量三角形形状的规整程度^[12]; 张必强等人则以最大边长与最小边长的差值与第 3 边长之比来进行评价^[13]。但上述各方法都缺乏理论上的完备性, 至今也没有公认的最好的评价方法^[14]。

因为内角的大小直接反映三角形的不规整程度, 所以采用角度来评价三角形形状更加直观。若三角形 3 个内角中的两个一旦确定, 则三角形的形状便可以确定, 并不需要第 3 个内角。本文提出更为简洁的三角形形状因子 δ 用来量化三角形的不规整程度, $\delta = \frac{1}{2} (\cos\alpha - \cos\beta)$, 其中 α β 分别为三角形的最小和最大内角。如图 4 所示, δ 越大, 说明三角形越不规整, 当 α 趋于 0 时, 则 δ 趋近 1; 当三角形为等边三角形时, 则 δ 取得的最小值为 0 证明如下:



(a) 规整 ($\alpha = \beta = 60^\circ$, $\delta = 0$) (b) 较差 ($\alpha = 40^\circ$, $\beta = 80^\circ$, $\delta = 0.2962$) (c) 更差 ($\alpha = 15^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\delta = 0.7330$)

图 4 三角形不规整程度
Fig 4 Abnormality triangles

因为 α 、 β 分别为三角形的最小和最大内角, 即 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, 设 γ 为第 3 个内角, 如果 $\gamma = \alpha$ 则 β 取得的最大值为 $\pi - 2\alpha$ 如果 $\gamma = \beta$ 则 β 取得的最小值为 $\frac{\pi - \alpha}{2}$, 即

$$\frac{\pi - \alpha}{2} \leq \beta \leq \pi - 2\alpha \quad (9)$$

所以

$$\begin{aligned} \cos(\pi - 2\alpha) \leq \cos\beta \leq \cos\frac{\pi - \alpha}{2} \\ - \cos 2\alpha \leq \cos\beta \leq \sin\frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

则

$$\cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} \leq \cos\alpha - \cos\beta \leq \cos\alpha + \cos 2\alpha$$

令

$$f_{\min} = \cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

$$f_{\max} = \cos\alpha + \cos 2\alpha \quad (12)$$

则

$$\begin{aligned} f_{\min} = \cos\alpha - \sin\frac{\alpha}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \\ = -\left[\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\right]^2 + \frac{9}{8} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_{\max} = \cos\alpha + \cos 2\alpha = \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 \\ = \left[\cos\alpha + \frac{1}{4}\right]^2 - \frac{9}{8} \end{aligned} \quad (14)$$

因为 $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{3}$, 所以对于式 (13), 当取 $\alpha = \frac{\pi}{3}$, f_{\min} 取得的最小值为 0 此时 $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, δ 取得的最小值为 0 对于式 (14), 当 α 趋向 0 时, 则 $\beta = \pi - 2\alpha$ 趋向 π , δ 趋近 1。

2.2 法矢估算修正公式

基于 1.3 节的分析, 本文对三角网格模型的顶点法矢估算进行了改进, 提出以下修正公式:

$$n_i = \frac{\sum_{k=1}^k \frac{(1 - \delta_i) \alpha_i N_k}{A_k}}{\left\| \sum_{k=1}^k \frac{(1 - \delta_i) \alpha_i N_k}{A_k} \right\|} \quad (15)$$

式中, δ_i 为三角形 t_i 的形状因子。

式 (15) 能综合体现顶角、面积及三角形形状对顶点 v_i 的法矢 n_i 的影响。在同等条件下, 如果三角形形状越规整, 那么它对顶点 v_i 的法矢 n_i 的贡献越大。

3 实验

3.1 实验方案设计

为了比较上述各方法估算法矢的准确度以及验证本文改进方法的有效性,分别选取了圆柱面 ($x^2 + y^2 = 1$) 球面 ($x^2 + y^2 + z^2 = 1$)和抛物面 ($x^2 + y^2 = 4z$)作为例子进行了实验比较。定义顶点 v_i 的法矢误差 e 为该点的理论法矢与估算的法矢之间的夹角 ($^\circ$)。考虑到法矢受三角形形状的影响以及各种法矢计算方法的特点,先利用 3 种二次曲面模型来

选取其规则和不规则的三角网格 (如图 5 所示); 然后利用上述 6 种方法分别对各曲面三角网格模型进行顶点法矢估算, 在各种方法得到的计算结果中, 将顶点按其法矢误差从小到大进行排序, 并分别统计分布于各总顶点数比例区间内的顶点的算术平均法矢误差 \bar{e} (表 1), 根据其绘制的顶点法矢误差分布曲线如图 6 所示, 并通过计算顶点法矢误差的标准方差 σ 来衡量估算方法估算结果的稳定性 (如表 1 所示), 图 6 横坐标总顶点数比例表示统计的顶点数占总顶点数的比例。

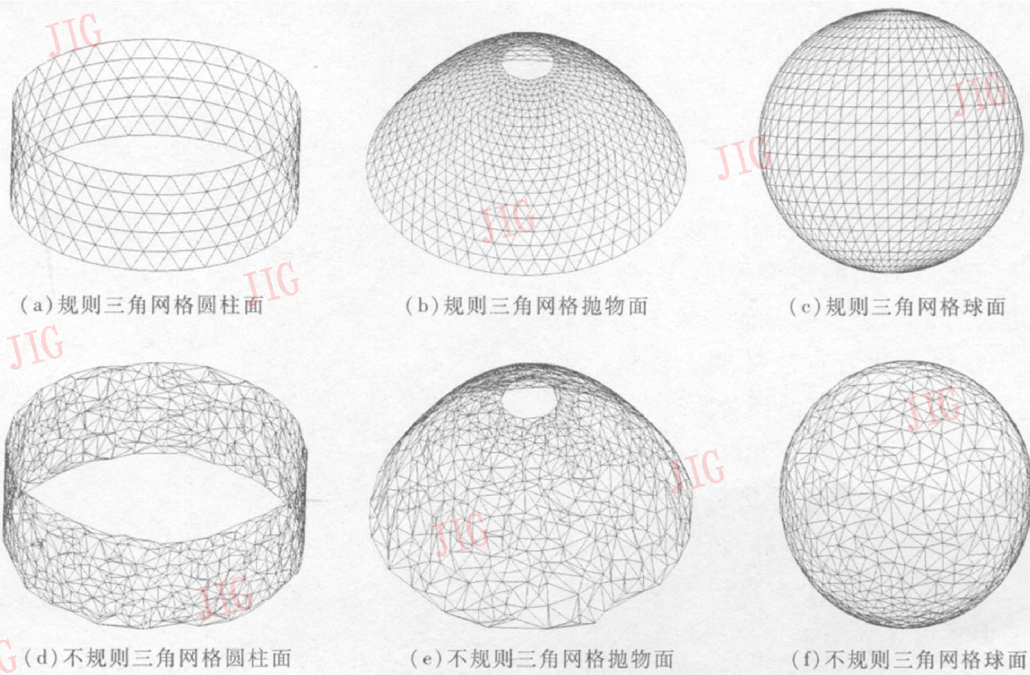


图 5 二次曲面三角网格模型

Fig. 5 Triangular meshes of quadric surfaces

表 1 6 种方法估算的法矢的算术平均误差及标准方差比较

Tab. 1 Comparison of arithmetic mean and standard deviation of angular discrepancy for 6 algorithms

曲面模型			顶点法矢 6 种估算方法					
			方法 1	方法 2	方法 3	方法 4	方法 5	本文方法
圆柱面	顶点数为 216 的规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	0.445 6	0.446 6	0.447 3	0.445 8	0.446 1	0.446 0
		$\sigma/(^\circ)$	0.121 0	0.119 7	0.120 6	0.120 9	0.121 1	0.121 6
	顶点数为 1 000 的不规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	3.837 0	3.799 9	3.985 5	3.931 9	3.634 5	3.612 8
		$\sigma/(^\circ)$	1.449 6	1.796 7	1.371 1	1.300 9	0.817 4	0.802 6
抛物面	顶点数为 538 的规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	2.893 0	2.882 1	2.878 1	2.870 4	2.910 3	2.894 7
		$\sigma/(^\circ)$	1.355 5	1.373 7	1.320 5	1.328 0	1.440 6	1.405 0
	顶点数为 812 的不规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	3.157 1	3.096 2	3.372 9	3.331 7	2.920 1	2.814 0
		$\sigma/(^\circ)$	1.422 6	1.514 7	1.353 0	1.410 6	1.152 6	1.135 2
球面	顶点数为 1 200 的规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	0.830 2	0.799 3	0.910 6	0.819 4	0.796 2	0.791 1
		$\sigma/(^\circ)$	0.133 1	0.168 3	0.185 2	0.157 0	0.174 4	0.172 0
	顶点数为 2 000 的不规则模型	$\bar{e}/(^\circ)$	4.271 7	4.191 3	4.545 3	4.463 7	4.112 2	4.002 8
		$\sigma/(^\circ)$	1.014 0	1.007 5	1.077 7	1.063 5	0.992 8	0.990 1

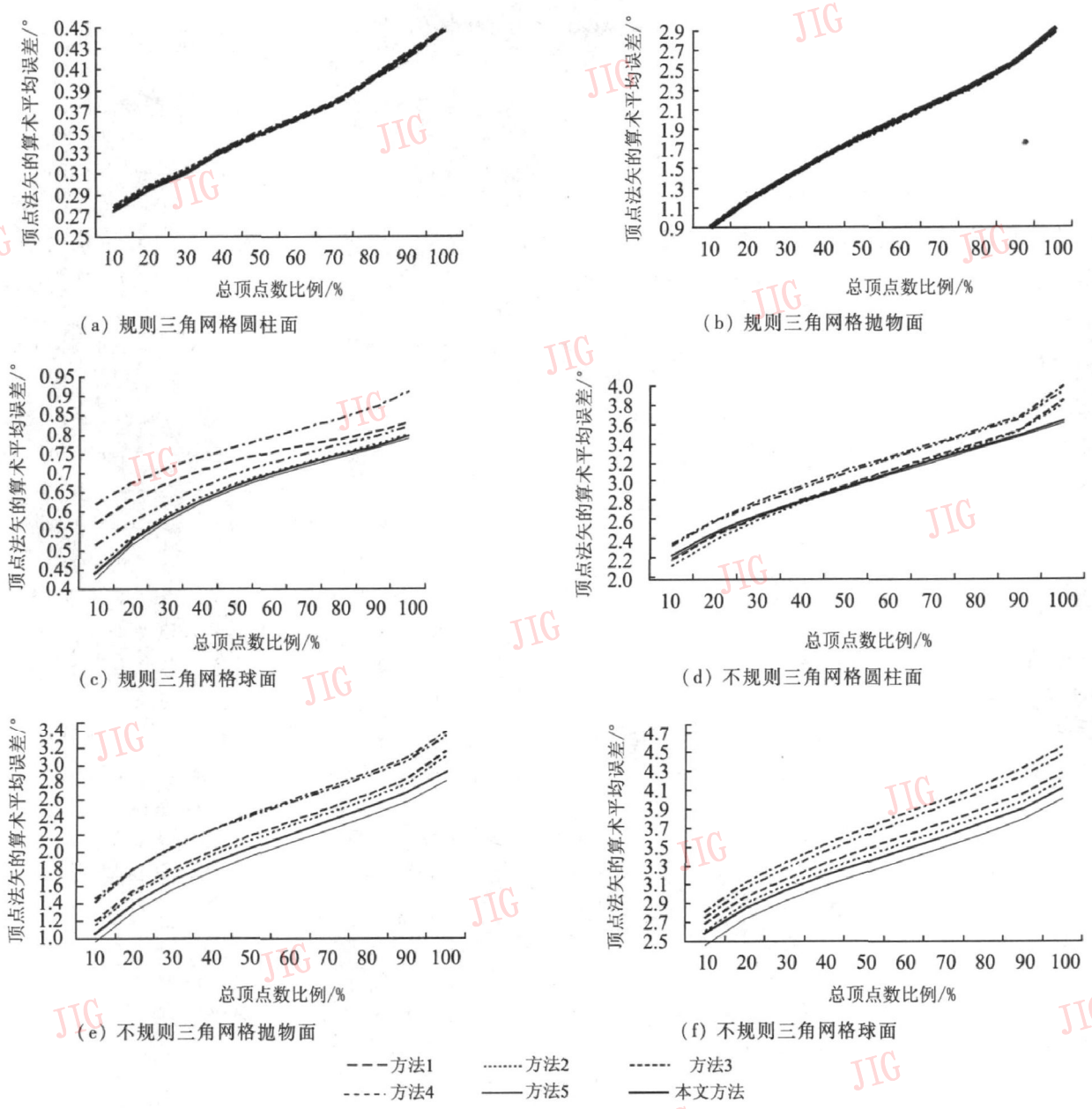


图 6 各算法估算的顶点法矢误差分布比较

Fig 6 Comparison of normal angular discrepancy distribution for the algorithms

3.2 实验分析

1)从图 6(a)~图 6(c)可以看出,对于规则的三角网格曲面模型,与 6 种方法估算结果对应的曲线基本重叠,且曲线终点基本收敛在同一个算术平均法矢误差,各种估算方法估算结果的准确度大致相同;圆柱面规则的三角形为等边三角形,形状规整度最好,各种方法估算得到的顶点法矢误差均较小,方法 1 估算的顶点法矢的准确度最高,全部顶点的平均法矢误差 \bar{e} 为 0.4456° ;球面的三角形形状规整度最差,但利用本文提出的改进方法估算的法矢准确度最好, \bar{e} 为 0.7911° 。

2)对于三角形形状存在较大差异、不规则的曲面模型,从图 6(d)~图 6(f)的曲线和表 1 的统计数

据可以看出,在 3 种曲面模型中,本文所提的法矢估算方法的计算精度最高,其估算的顶点法矢误差的离散程度最低、稳定性最好。而实际应用中,模型的三角网格往往是稀疏不一,且三角形形状存在较大差异的,所以本文所提方法具有较大的实际应用价值。

3)从图 6(a)~图 6(d)的曲线可以看出,方法 5 和本文方法对面积权重的处理能明显提高顶点法矢估算的准确度,比其余 4 种方法要好,这说明了 1.3.1 节权重分析的正确性。

实验表明,本文通过引入用三角形形状因子修正的法矢计算公式,在顶点法矢的计算精度和稳定性方面,都体现出一定的优越性,同时也验证了 1.3 节算法分析的正确性。

4 结 论

通过对代表性的 5 种三角网格模型顶点法矢估算方法的顶角、面积权重进行分析, 提出了一种对离散点的法矢进行估算的改进方法, 该方法能综合体现顶角、面积及三角形形状对顶点法矢的影响, 并对提出的三角形形状因子在理论上给予了证明。通过对 6 种算法估算的顶点法矢进行统计、分析与比较的结果表明, 对于实际应用中那些不规则、三角形面片差异较大的三角网格模型, 本文提出的改进方法其计算精度更高、稳定性更好。

参考文献 (References)

- [1] Dong Chen-shi, Wang Guo-zhao. An algorithm for triangulating unorganized points with normal [J]. Chinese Journal of Computers, 2005, 28(6): 1000~1005 [董辰世, 汪国昭. 一个利用法矢的散乱点三角剖分算法 [J]. 计算机学报, 2005, 28(6): 1000-1005]
- [2] Wang Jun, Zhou Lai-shui, An Lu-ling et al. A new region segmentation algorithm based on mesh model [J]. China Mechanical Engineering, 2005, 16(9): 796-801. [汪俊, 周来水, 安鲁陵, 等. 基于网格模型的一种新的区域分割算法 [J]. 中国机械工程, 2005, 16(9): 796-801.]
- [3] Kerautret B, Braquelaire A. A reversible and statistical method for discrete surfaces smoothing [J]. Computers & Graphics, 2006, 30(1): 54-61.
- [4] Gouraud H. Continuous shading of curved surfaces [J]. IEEE Transactions on Computers, 1971, 20(6): 623-629.
- [5] Thümer G, Wuthrich A. Computing vertex normals from polygonal facets [J]. Journal of Graphics Tools, 1998, 3(1): 43-46.
- [6] Taubin G. Estimating the tensor of curvature of a surface from a polyhedral approximation [C] // Grimson E. Proceedings of the 5th International Conference on Computer Vision. Washington, DC, USA: IEEE Computer Society, 1995: 902-907.
- [7] Shen Hu-fan, Li Jian-hua, Zhou Lai-shui. Estimation of triangular mesh vertex normal vector and discrete curvature [J]. Computer Engineering and Applications, 2005, 41(26): 12-15 [神会存, 李建华, 周来水. 三角网格模型顶点法矢与离散曲率计算 [J]. 计算机工程与应用, 2005, 41(26): 12-15.]
- [8] Max N. Weights for computing vertex normals from facet normals [J]. Journal of Graphics Tools, 1999, 4(2): 1-6.
- [9] Jin S, Lewis R, West D. A comparison of algorithms for vertex normal computation [J]. The Visual Computer, 2005, 21(1/2): 71-82.
- [10] Jiang Shou-shan, Peter Eberhard. Numerical estimation of normal vector at the vertices of polygon and polyhedron [J]. Journal of Computer-aided Design & Computer Graphics, 2002, 14(8): 763-767. [姜寿山, Peter Eberhard. 多边形和多面体顶点法矢的数值估计 [J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(8): 763-767.]
- [11] Hanann B. A data reduction scheme for triangulated surfaces [J]. Computer Aided Geometric Design, 1994, 11(3): 197-214.
- [12] Guezic A. Surface simplification inside a tolerance volume. RC20440[R]. Yorktown Heights, New York, USA, 1996.
- [13] Zhang Bi-qiang, Xing Yuan, Ruan Xue-yu. Mesh simplification based on features preserving [J]. Journal of Shanghai Jiaotong University, 2004, 38(8): 1373-1377. [张必强, 邢渊, 阮雪榆. 基于特征保持和三角形优化的网格模型简化 [J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(8): 1373-1377.]
- [14] Liu Si-yan, Liao Wen-he, Liu Hao. Triangle regularity measurement based on cosine sum of inner angles and mesh optimization [J]. Mechanical Science and Technology, 2007, 26(4): 420-423 [刘泗岩, 廖文和, 刘浩. 基于内角余弦和的三角形正则度评定与网格优化 [J]. 机械科学与技术, 2007, 26(4): 420-423.]