

保护角点的非线性扩散滤波

姚伟 孙即祥

(国防科学技术大学电子科学与工程学院,长沙 410073)

摘要 基于偏微分方程的非线性扩散滤波可以有效去除噪声,同时很好地保护边缘信息,但角点在其滤波过程中逐渐变得圆滑甚至消失。通过设计扩散系数为梯度模及曲率的函数,提出了一种保护角点的非线性扩散滤波模型。该模型在区域内部为普通的高斯滤波,而在边缘处滤波效果降低,在角点处滤波效果进一步降低,从而在滤波过程中角点信息可以得到较好的保留,还可能出现角点及边缘相对增强的效果。实验结果的视觉效果及数据分析都表明,新模型可以同时保护边缘及角点信息。

关键词 偏微分方程 非线性扩散滤波 角点 曲率

中图法分类号:TP391 文献标志码:A 文章编号:1006-8961(2010)04-577-05

Nonlinear Diffusion Filter with Corner Preserving Characteristics

YAO Wei, SUN Jixiang

(College of Electrical Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073)

Abstract Nonlinear diffusion filters based on partial differential equations can well preserve the edge information while de-noise effectively, but the corners gradually become rounded and vanish while filtering. A corner preserving nonlinear diffusion filter is proposed, whose diffusion coefficient is the function of the gradient and the curvature. The new model behaves as a Gaussian filter inside the regions and smooths less across regions; and the smoothing effect is even decreased in the corner points. These effects ensure better preservation of the corner. Visual effect with data analysis of the experiment result proves simultaneous protection of the edge and corner information.

Keywords partial differential equation, nonlinear diffusion filter, corner, curvature

0 引言

在多数图像处理应用中,去噪是预处理步骤的重要内容,基于偏微分方程(PDE)的非线性扩散滤波在去噪中有很好的应用。1984年,Koenderink将高斯滤波以PDE形式的线性扩散滤波引入到多尺度分析中^[1],是首次将PDE理论引入图像处理。1987年,Perona Malik提出P-M方程,解决了高斯滤波使得边缘模糊且难以定位的缺点^[2]。P-M方程是一种扩散率具有空间自适应性的非线性扩散滤波方

程,它在去除噪声及细小结构的同时,可以保持边缘清晰,这种良好的滤波特性引起了大量研究者的关注。Catté等人修改了扩散系数计算方法,解决了P-M方程理论上解的适定性问题^[3]。Alvarez等人证明了多尺度分析与PDE具有严格的理论联系,提出了平均曲率运动(MCM)模型及具有仿射不变性的多尺度分析方程(AMSS)^[4-5]。Weickert提出了张量扩散系数的各向异性扩散率模型^[6],沿着边缘方向及梯度方向扩散性质不同,可以得到更好的滤波结果。上述方程都是非线性扩散滤波的不同形式,此外,还有与不同理论的结合(如统计估计^[7]、

收稿日期:2009-01-09;改回日期:2009-02-17

第一作者简介:姚伟(1981—),男,国防科学技术大学电子科学与工程学院博士研究生。主要研究方向为计算机视觉与智能信息处理。E-mail: yaowei_arthur@163.com

梯度向量流 (GVF)^[8], 及在不同领域的应用 (如 SAR 图像去斑^[9-10], 医学超声图像去斑^[11-12]) 等诸多相关研究。

这类方程都具有迭代滤波的形式, 滤波过程使得角点逐渐圆滑甚至消失是共有的特点, 在文献[4]、文献[6]中都存在类似的结果, 文献[13]也指出了这个问题。作者提出一种非线性扩散滤波方程, 其扩散系数针对角点进行了特殊的设计, 使得在角点处的扩散进一步减小, 从而得到保护角点的目的。

1 经典模型及分析

考虑图像降质模型

$$\mathbf{u}_0 = \mathbf{u} + n \quad (1)$$

式中, \mathbf{u} 为反应真实场景的清晰图像, \mathbf{u}_0 为 \mathbf{u} 的一个观测 (即降质图像), n 为零均值高斯白噪声。这里列举一些针对模型 (1) 的非线性扩散滤波方程, 它们都具有相同的边界条件 (2) 及初始条件 (3)

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta(\hat{\mathbf{n}})} = 0, (x, y, t) \in \partial \Omega \times [0, T] \quad (2)$$

$$\mathbf{u}(x, y, t) |_{t=0} = \mathbf{u}_0(x, y), (x, y) \in \Omega \quad (3)$$

式中, Ω 为图像区域, $\partial \Omega$ 为图像边界, $\theta(\hat{\mathbf{n}})$ 为边界单位外法向量 $\hat{\mathbf{n}}$ 的方向角度, T 为迭代停止时间。

P-M 方程^[2]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \text{div}(c(|\nabla \mathbf{u}|) \nabla \mathbf{u}), c(s) = \frac{1}{1 + (s/k)^2} \quad (4)$$

式中, $c(\cdot)$ 为扩散系数, k 为正参数。

MCM 方程^[4]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = c(|\nabla \mathbf{u}_\sigma|) |\nabla \mathbf{u}| \text{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right) \quad (5)$$

式中, $\nabla \mathbf{u}_\sigma$ 表示经过方差为 σ 的高斯函数滤波的图像梯度。

Sochen 方程^[14]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \text{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{\sqrt{1 + |\nabla \mathbf{u}|^2}} \right) \quad (6)$$

方程 (4) - (6) 都具有如下形式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \beta \text{div}(\alpha \nabla \mathbf{u}) \quad (7)$$

式中, $\alpha = \alpha(x, y, t)$, $\beta = \beta(x, y, t)$ 为系数。采用有限差分法对式 (7) 进行离散, 对时间导数采用前向差分, 时间步长为 τ , 对空间导数采用中心差分, x, y 方向步长均为 $h=1$, 有

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} = \beta_{i,j}^n \text{div}(\cdot)$$

$\text{div}(\cdot) \triangleq$

$$\alpha_{i+1/2,j}^n (u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n) + \alpha_{i-1/2,j}^n (u_{i-1,j}^n - u_{i,j}^n) + \alpha_{i,j+1/2}^n (u_{i,j+1}^n - u_{i,j}^n) + \alpha_{i,j-1/2}^n (u_{i,j-1}^n - u_{i,j}^n) \quad (8)$$

可以将其整理为卷积的形式

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}^n * \mathbf{U}^n \quad (9)$$

其中 \mathbf{U} 为图像的矩阵表示, $\mathbf{A}^n \in \mathbf{R}^{3 \times 3}$ 有如下的形式

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & a_{12}^n & 0 \\ a_{21}^n & a_{22}^n & a_{23}^n \\ 0 & a_{32}^n & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

为分析其自适应性, 取近似

$$\alpha_{i+1/2,j}^n \doteq \alpha_{i-1/2,j}^n \doteq \alpha_{i,j+1/2}^n \doteq \alpha_{i,j-1/2}^n \doteq \alpha_{i,j}^n \quad (11)$$

则有

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & \tau(\alpha\beta)_{i,j}^n & 0 \\ \tau(\alpha\beta)_{i,j}^n & 1 - 4\tau(\alpha\beta)_{i,j}^n & \tau(\alpha\beta)_{i,j}^n \\ 0 & \tau(\alpha\beta)_{i,j}^n & 0 \end{bmatrix}$$

忽略方程 (4) - (6) 中平滑梯度的区别, 可以得到统一的系数表达式

$$\alpha\beta = \frac{1}{1 + (|\nabla \mathbf{u}|/k)^2} \quad (12)$$

对于方程 (6) 有 $k=1$ 。在区域内部, 梯度模趋于 0, $\alpha\beta \rightarrow 1$, 在边缘附近, 梯度模趋于 $+\infty$, $\alpha\beta \rightarrow 0$ 。而采用这种显式 Euler 方法求解其步长 τ 受到 CFL 条件限制, 如文献[2]中将其限制为 $[0, 0.25]$, 若取 $\tau=0.2$, 则分别有

$$\mathbf{A}^n \rightarrow \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^n \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可以明确地看到, 在梯度较小区域, 趋于 5 点均值平滑, 在边缘附近, 则趋于不进行任何滤波。这就是非线性扩散滤波方程取得保护边缘效果的原因。

2 保护角点的新模型

进一步观察系数式 (13) 发现除了参数 k 外, 其变量只有梯度模 $|\nabla \mathbf{u}|$, 是边缘的简单估计。而梯度在角点处会得到异常的结果, 这也是梯度逐渐圆滑的一个原因。在扩散系数设计中加入角点相关的项, 将得到具有保护角点特性的滤波方程。

由于非线性扩散方程存在迭代过程, 传统角点检测算子的加入会使得算法复杂度太高。角点处具

有的重要特征是高曲率,非角点及平滑区域具有低曲率,可以使用角点处的曲率作为角点特征的简单估计。提出以下非线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{div} (c (|\nabla \mathbf{u}_\sigma|, \kappa) \nabla \mathbf{u})$$

$$c (|\nabla \mathbf{u}_\sigma|, \kappa) = \frac{1}{1 + (|\nabla \mathbf{u}_\sigma|/k_1)^2} \cdot \frac{1}{1 + (\kappa/k_2)^2} \quad (13)$$

其中 κ 为曲率, k_1, k_2 为正参数。上述扩散系数设计使得角点处的扩散进一步降低,角点信息得以更好的保留。

曲率是曲线特有的概念。这里计算图像 \mathbf{u} 中任意一点 (x_0, y_0) 的曲率指的是计算其所在的等值线上这一点的曲率,经过推导可以得到

$$\kappa = \frac{u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + u_x^2 u_{yy}}{(u_x^2 + u_y^2)^{3/2}} = \text{div} \left(\frac{\nabla \mathbf{u}}{|\nabla \mathbf{u}|} \right)$$

在平坦区域中,梯度模 $|\nabla \mathbf{u}|$ 数值小,上式的计算具有数值不稳定性。在实验中取 $\kappa = \kappa \cdot \text{edge}(\mathbf{u})$, 其中 $\text{edge}(\mathbf{u})$ 为 \mathbf{u} 的边缘图,在边缘处值为 1,其余为 0。由于迭代的原因,边缘图同样不能采用传统方法如 Canny 算子,实验中采用简单的阈值比较

$$\text{edge}(\mathbf{u}) = \begin{cases} 1 & |\nabla \mathbf{u}| / \max |\nabla \mathbf{u}| > \text{thres} \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

3 数值计算

第 2 部分的分析与显式数值实现很类似,可采用其离散化的设置,但在实现中不能采用如式(11)的近似,在对式(13)离散后,应对系数 c 采用更精确的近似方法,如下

$$c_{i \pm 1/2, j}^n \doteq (c_{i \pm 1, j}^n + c_{i, j}^n) / 2$$

$$c_{i, j \pm 1/2}^n \doteq (c_{i, j \pm 1}^n + c_{i, j}^n) / 2$$

这样即可得到显式计算方法

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n}{\tau} = \mathbf{C}^n * \mathbf{U}^n$$

式中 \mathbf{C}^n 为与 \mathbf{A}^n 类似的卷积核。显示计算方法的优点是简单易懂,且每一步迭代计算非常快,但由于步长限制,需要较多迭代次数才能得到较好效果。还存在半隐式计算方法及其快速 AOS (additive operator splitting) 算法^[15-16],半隐式算法的优点是对任意步长都会得到稳定结果,采用 AOS 算法的半隐式方法计算时间也比直接计算大大缩短,但随着步长的增加,其精度逐渐变差,且在步长较小情况下,其

运算时间相比显式方法没有显著减少,在综合考虑运算精度及时间等因素下,实验采用显式方法计算。

4 对比实验及结果分析

4.1 图像对比评价函数

除了采用(放大)观察的主观方法外,还采用了均方差(MSE)及结构相似度^[17](SSIM)的客观图像质量评价标准,通常将恢复图像 \mathbf{u} 与清晰图像 \mathbf{u}_c 进行对比

$$MSE = \frac{1}{MN} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_c\|_2^2$$

$$SSIM = \frac{(2\mu_c \mu_u + C_1)(2\sigma_{cu} + C_2)}{(\mu_c^2 + \mu_u^2 + C_1)(\sigma_c^2 + \sigma_u^2 + C_2)}$$

其中 M, N 为图像行列数, μ_c, μ_u 为两图像的灰度均值, σ_c, σ_u 为灰度标准差, σ_{cu} 为两图像协方差, C_1, C_2 是为了防止数值计算不稳定而加入的正常数,应取值很小。

均方差比较方法计算简单,而且比较有效,在图像质量评价中仍然常用。结构相似性度量综合了灰度、对比度及结构 3 个因素的差异,其思想借鉴了人眼视觉系统感知模型中有关图像对比的相关内容,是一种优秀的客观评价函数。

4.2 对比实验及结果

本文实验的硬件环境是 P4 2.66 GHz CPU 及 1 GB 内存,软件环境为 WindowsXP SP2, MATLAB 7.4.0。图像灰度范围 $[0, 1]$,黑色像素灰度值为 0,白色像素灰度值为 1。

对比算法为式[3]中的 CLMC 算法

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \text{div} (c (|\nabla \mathbf{u}_\sigma|) \nabla \mathbf{u})$$

其中,系数 c 的取法同方程(4)。

对一幅合成图像及光学图像做了对比实验,如图 1、图 2 所示。合成图像大小为 256×256 ,其中加入了方差为 0.7 的高斯白噪声,实验迭代次数为 150,本文算法与对比算法计算时间分别为 18.20 s, 12.86 s。光学图像大小 364×366 ,其中加入了方差为 0.03 的高斯白噪声,实验迭代次数为 50,本文算法与对比算法计算时间分别为 10.66 s, 8.53 s。不同算法对两幅图像的处理结果评价对比如表 1、表 2 所示。

由上述对比可以看出,CLMC 算法已经得到了很好的滤波效果,但由于本文算法在扩散系数计算中加入了角点相关的信息,其结果角点特征更加明

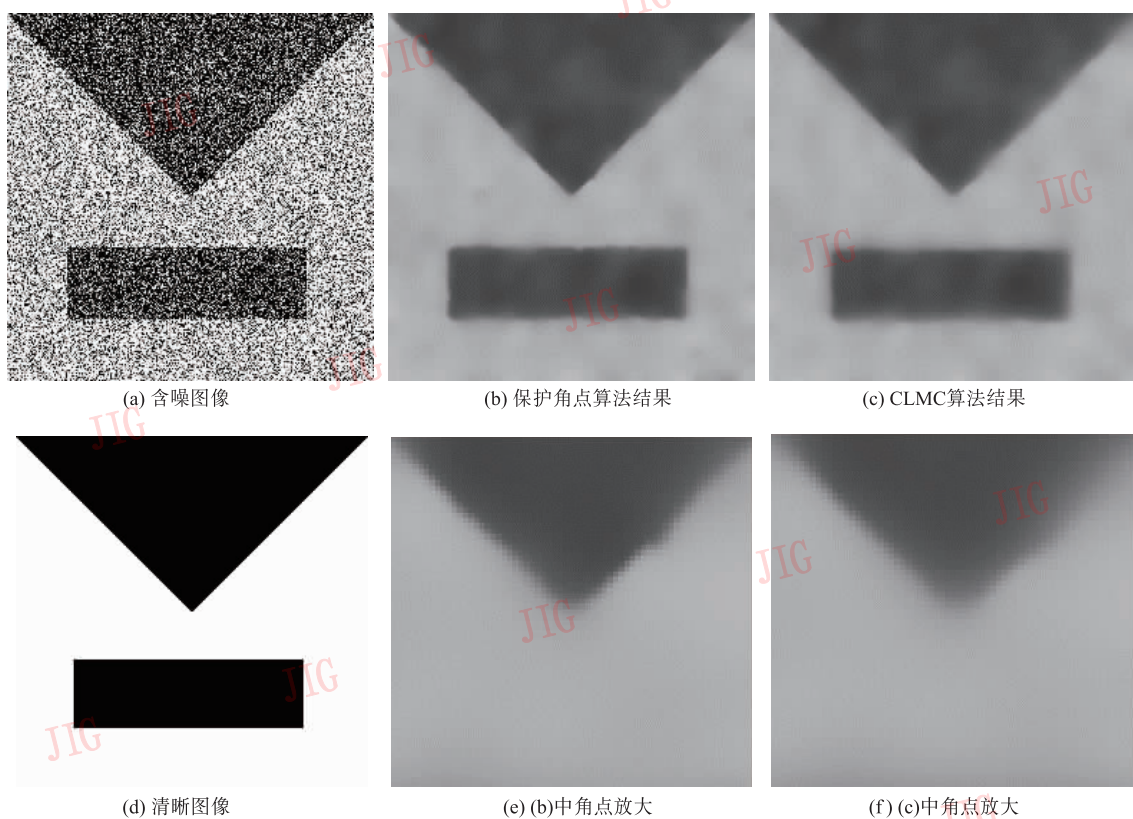


图 1 对合成图像的处理结果对比

Fig. 1 Result comparison between our algorithm and CLMC on a synthetic image

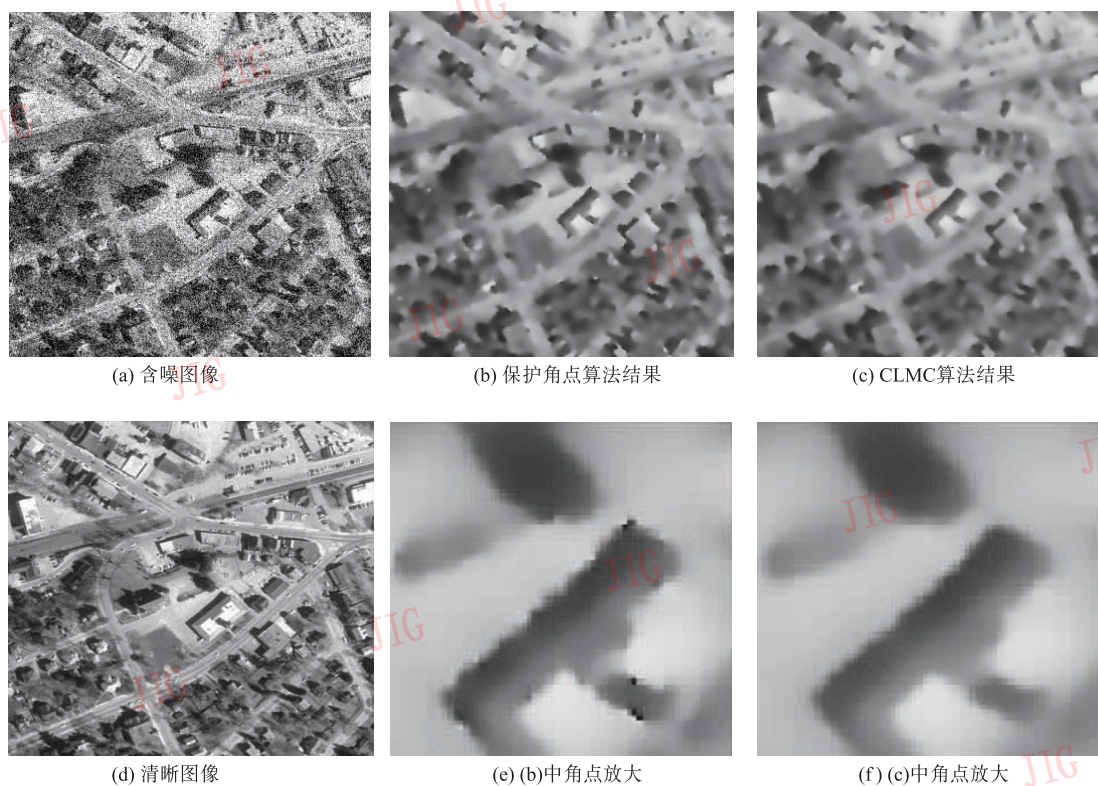


图 2 对光学图像的处理结果对比

Fig. 2 Result comparison between our algorithm and CLMC on an optical image

表1 图1的质量改善评价参数对比

Tab.1 Image quality improvement comparison of fig.1

	MSE	SSIM
本文算法	0.0917	0.645
CLMC算法	0.0958	0.625

表2 图2的质量改善评价参数对比

Tab.2 Image quality improvement comparison of fig.2

	MSE	SSIM
本文算法	0.0093	0.863
CLMC算法	0.011	0.838

显,图像整体效果更好。

除了迭代次数,上述实验采用了相同的参数,其中步长为0.25, k 为0.04, k_1, k_2 分别为0.04,4, σ 为3,边缘图计算的阈值 $thres$ 为0.4。

5 结论

基于PDE的非线性扩散方程总体效果是平滑图像,但通过自适应的调节在图像不同部分的平滑量,得到视觉效果上增强的图像。对不同的特征进行自适应平滑,就可以得到保护不同特征的图像。本文对角点特征进行了研究,算法效果仍然可以改进,但需设计更复杂的扩散系数,结果是运算时间的进一步增加。

参考文献 (References)

- [1] Koenderink J J. The structure of images [J]. Biological Cybernetics, 1984, 50(5): 363-370.
- [2] Perona P, Malik J. Scale space and edge detection using anisotropic diffusion[C]// Proceedings of IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 1987: 16-22.
- [3] Catté Francine, Lions P L, Morel J M, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion[J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1991, 29(1): 182-193.
- [4] Alvarez L, Guichard F, Lions P-L, et al. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion (II) [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 1992, 29(3): 845-866.

- [5] Alvarez L, Guichard F, Lions P-L, et al. Axioms and fundamental equations in image processing [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1993, 123(3): 199-257.
- [6] Weickert Joachim. Anisotropic Diffusion in Image Processing[D]. Copenhagen: University of Kaiserslautern, 1996.
- [7] Black M J, Sapiro G, Marimont D H, et al. Robust anisotropic diffusion[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 421-432.
- [8] Yu H C, Chua C S. GVF-based anisotropic diffusion models[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2006, 15(6): 1517-1524.
- [9] Tauber C, Batatia H, Ayache A. A robust speckle reducing anisotropic diffusion [C]// Proceedings of the International conference on image processing. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2004: 247-251.
- [10] Sathit Intajag, Vittaya Tipsuwanpon, Fusak Cheevasuwit. Anisotropic diffusion in synthetic aperture radars[C]// Proceedings of Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2005: 277-281.
- [11] Oleg V Michailovich, Allen Tannenbaum. Despeckling of medical ultrasound images [J]. IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency control, 2006, 53(1): 64-78.
- [12] Zhang Fan, Yoo Yang Mo, Zhang Lichen, et al. Multiscale Nonlinear diffusion and shock filter for ultrasound image enhancement [C]// Proceedings of IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 2006: 1972-1977.
- [13] Shah Jayant. Piecewise smooth approximations of functions[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 1994, 2(3): 315-328.
- [14] Sochen N, Kimmel R, Malladi R. A general framework for low level vision[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 310-318.
- [15] Weickert J, Zuiderveld K J, Romeny B M, et al. Parallel implementations of AOS schemes: a fast way of nonlinear diffusion filtering [C]//In: Proceedings of IEEE International Conference on Image Processing, Washington DC, USA: IEEE Computer Society, 1997: 396-399.
- [16] Weickert J, Romeny B M ter Haar, Viergever M A. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 398-410.
- [17] Wang Z, Bovik Alan C, Sheikh Hamid R, et al. Image quality assessment: from error visibility to structural similarity[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2004, 13(4): 600-612.