

隐式曲面上两相图像分割的变分水平集方法

李建国 潘振宽 魏伟波 石洁 李华

(青岛大学信息工程学院, 青岛 266071)

摘要 在平面图像分割的 Chan-Vese 模型基础上, 提出隐式曲面上两相图像分割模型。用静态水平集函数的零水平集表达图像所在的闭合曲面, 用另一动态水平集函数的零水平集与静态水平集函数零水平集的交线表达静态曲面上图像分割的动态轮廓线。所研究模型的能量泛函的数据项即为曲面上两分割区域的图像强度与对应区域平均图像强度的差的平方, 其轮廓线长度项为两水平集函数的零水平集交线的长度。为避免动态水平集函数的重新初始化, 在能量泛函中引入水平集函数为符号距离函数的约束惩罚项。通过变分方法得到图像分割空间轮廓线演化的梯度降方程。通过显式差分格式对演化方程进行离散。实验结果表明, 该模型能有效实现复杂封闭曲面上图像的两相分割。

关键词 隐式曲面 图像分割 Chan-Vese 模型 变分水平集

中图法分类号: TP391.41 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)05-808-06

A Variational Level Set Method for Image Segmentation on Implicit Surfaces

LI Jianguo, PAN Zhenkuan, WEI Weibo, SHI Jie, LI Hua

(College of Information Engineering, Qingdao University, Qingdao 266071)

Abstract The classic Chan-Vese model for two-phases segmentation of planar images is extended to image segmentation on implicit surfaces. The zero level set of a static level set function is used to express the surface on which images to be segmented are defined. Its intersection with another zero level set of a dynamic level set function is used to express spatial active contours for image segmentation. The novel energy functional includes three parts, the first one is the sum of square of the difference between pixel intensity and mean values in two regions on the surface. The second one is the length of spatial contour, and the third one is a penalty term to enforce the dynamic level set function to be a signed distance function. The evolution equation of the dynamic level set function is obtained using variation technique and is discretized with a simple explicit finite difference method. Experimental results validate the capacity of the proposed model in two phase image segmentation on implicit surfaces.

Keywords implicit surface, image segmentation, Chan-Vese model, variational level set

0 引言

平面上的图像处理是传统平面图像处理的自然拓展, 但平面上的图像处理必须考虑其所在曲面的

几何特征, 相关数学模型自然要包含图像与其所在曲面的耦合, 从而增加了曲面上图像处理问题的难度。

依据曲面的表达形式, 平面上的图像处理可分为参数平面上的图像处理模型^[1]和以水平集方

基金项目: 教育部新世纪优秀人才支持计划(NCET-05-0601)

收稿日期: 2009-04-20; 改回日期: 2009-07-13

第一作者简介: 李建国(1982—), 男。现为青岛远洋船员学院现代教育技术中心教师, 青岛大学计算机应用技术专业硕士研究生。主要研究方向为图像处理。E-mail: jglee_2004@163.com

法等为基础的隐式曲面上的图像处理模型^[2],由于后者在复杂拓扑结构几何曲面表达方面的优势被用于隐式曲面上的图像扩散、图像修复等研究^[3]。但由于问题的复杂性,隐式曲面上的图像分割方法还未见研究报道。与其相关的研究是 Jin 等人^[4]在用水水平集方法实现基于多视觉图像的 3 维重建的同时实现了曲面上图像的两相分割。为实现曲面上的图像分割,文献[4]采用了 Cheng^[5]提出的用两个水平集函数的零水平集的交线表达空间轮廓线的方法。

曲面上的图像分割能更准确地实现诸如大脑皮层不同区域、3 维地形曲面上山川、植被的分布等量化计算。本文的研究目的是将经典的平面图像分割的变分水平集模型 Chan-Vese 模型^[6]拓展到隐式曲面上的图像分割。

平面图像分割的 Chan-Vese 模型是简化的 Mumford-Shah 模型^[7]的水平集方法^[8]实现,其结果是用分段常值图像表达分割的图像,其分割线即为水平集函数的零等值线。对两相图像分割,Chan-Vese 模型的能量泛函包括用零水平集划分的区域模型能量项和最小轮廓线模型能量项。对于曲面上的两相图像分割,需用空间轮廓线将曲面分成两个不同的区域,当空间曲面用一个水平集函数的零等值面表达时,空间轮廓线可定义为该隐式曲面与另一个动态水平集函数的零等值面的交线^[5]。水平集函数通常可定义为符号距离函数,但随着水平集函数的演化,其符号距离函数特性不再保持,为此,本文在能量泛函中增加水平集函数保持符号距离函数的惩罚项,从而避免传统上水平集函数需重新初始化的问题^[6,9]。

1 Chan-Vese 模型

Chan-Vese 模型^[6]是一种不依赖边缘的活动轮廓线模型。假设图像由两个区域构成,在每个区域里各个像素点的灰度是相同的,这两个区域的边缘为 C_0 。用 u_0 表示图像的平均灰度, C 是任意的一条初始轮廓线, u_1 和 u_2 是依赖于初始轮廓线 C 的常数, u_1 是曲线 C 内部的平均灰度, u_2 是曲线 C 外部的平均灰度,用分段常值去逼近区域的这两个部分得到能量泛函为

$$F(C, u_1, u_2) = \mu \cdot \text{length}(C) + \nu \cdot \text{Area}(\text{inside}(C)) +$$

$$\lambda_1 \int_{\text{inside}(C)} |u_0(x, y) - u_1|^2 dx dy + \lambda_2 \int_{\text{outside}(C)} |u_0(x, y) - u_2|^2 dx dy \quad (1)$$

式中, C 是任一初始轮廓线, $\mu \geq 0, \nu \geq 0, \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 为参数,前两项使曲线 C 保持一定的正则性,后两项使曲线 C 逐渐靠近对象边界。

为用水水平集函数 ϕ 的零水平集表达 C ,引入如下 Heaviside 函数及其导函数 Dirac 函数:

$$H(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha \geq 0 \\ 0 & \alpha < 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\delta(\alpha) = dH(\alpha)/d\alpha \quad (3)$$

由此可计算轮廓线包围的区域的面积和轮廓线的长度:

$$\text{Area}(\phi \geq 0) = \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Length}(\phi = 0) &= \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x, y))| dx dy = \\ &= \int_{\Omega} \delta(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

利用变分方法,由泛函式(1)得到 Chan-Vese 模型的梯度降方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= \delta_{\varepsilon}(\phi) \left(\mu \text{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \lambda_1 |u_0(x, y) - u_1|^2 + \right. \\ &\quad \left. \lambda_2 |u_0(x, y) - u_2|^2 - \nu \right) \end{aligned} \quad (6)$$

通常水平集函数定义为符号距离函数^[6,9],该函数满足特性 $|\nabla \phi| = 1$ 。上述模型中没有该约束,随着水平集函数的演化,上述特性会破坏,因此,必须不断对其进行重新初始化,为避免不断重新初始化,在本文提出的模型中增加与该特性相应的惩罚项。

2 隐式曲面上图像分割的 Chan-Vese 模型

2.1 空间曲线演化方程

Cheng^[5]对空间曲线的表达和空间曲线的运动作了研究。假设 ϕ 和 ψ 分别为两个 4 维的水平集函数, $\phi = 0$ 和 $\psi = 0$ 分别为 ϕ 和 ψ 的零水平集函数,这两个零水平集函数分别表示一个 3 维的闭合曲面,这两个闭合曲面在空间中相交会产生一条空间的交线。对 ϕ 求偏微分方程得到 $\phi_t + \nu \cdot \nabla \phi = 0$,同理,对 ψ 求偏微分方程得到 $\psi_t + \nu \cdot \nabla \psi = 0$ 。将这

两个偏微分方程合到一起,得到空间曲线以速度 ν 运动的偏微分方程。

$$\begin{cases} \phi_t + \nu \cdot \nabla \phi = 0 \\ \psi_t + \nu \cdot \nabla \psi = 0 \end{cases} \quad (7)$$

2.2 隐式曲面上图像分割模型

假设隐式曲面 S 用水平集函数 ψ 的零水平集表示, u_0 是曲面 S 上的图像强度, 曲面上的图像分为两个区域, 每个区域中各点的图像强度是相同的。 ϕ 是一个 4 维的水平集函数, 用 $\phi = 0$ 表示一个闭合曲面, 它和 $\psi = 0$ 表示的闭合曲面 S 相交产生一条空间闭合曲线, 用这条闭合曲线做曲面图像分割的分割线。 u_1 和 u_2 是依赖于初始轮廓线的常数, 用 u_1 和 u_2 分别表示分割线内部和外部的平均图像强度。通过演化水平集函数 ϕ 使分割线在曲面上运动并最终找到曲面图像的两个区域的边界。

本文设计的隐式曲面上图像分割的能量泛函 $E(\phi)$ 包括零水平集表达的轮廓线长度 $E_1(\phi)$ 、区域模型 $E_2(\phi)$ 和演化水平集保持为符号距离函数的惩罚项 $E_3(\phi)$ 。即

$$E(\phi) = E_1(\phi) + E_2(\phi) + E_3(\phi) \quad (8)$$

其中,

$$E_1(\phi) = \gamma \int_{\Omega} |P_{\nabla\psi} \nabla \phi| |\nabla \psi| \delta(\psi) \delta(\phi) dx \quad (9)$$

$$E_2(\phi) = \alpha_1 \int_{\Omega} (u_0 - u_1)^2 |\nabla \psi| \delta(\psi) H(\phi) dx + \alpha_2 \int_{\Omega} (u_0 - u_2)^2 |\nabla \psi| \delta(\psi) (1 - H(\phi)) dx \quad (10)$$

$$E_3(\phi) = (\mu/2) \int_{\Omega} (|P_{\nabla\psi} \nabla \phi| - 1)^2 |\nabla \psi| \delta(\psi) dx \quad (11)$$

$\gamma \geq 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \mu > 0$ 为参数, $P_{\nabla\psi} \nabla \phi$ 为内蕴梯度^[2], 其展开式为

$$P_{\nabla\psi} \nabla \phi = \nabla \phi - \left(\frac{\sum_{m=1}^3 \nabla \psi[m] \cdot \nabla \phi[m]}{\|\nabla \psi\|^2} \right) \cdot \nabla \psi \quad (12)$$

利用变分方法,

$$\frac{\partial E}{\partial u_1} = 0 \Rightarrow \int_{\Omega} (u_1 - u_0) |\nabla \psi| \delta(\psi) H(\phi) dx = 0 \quad (13)$$

$$u_1 = \frac{\int_{\Omega} u_0 |\nabla \psi| \delta(\psi) H(\phi) dx}{\int_{\Omega} |\nabla \psi| \delta(\psi) H(\phi) dx} \quad (14)$$

同理,

$$u_2 = \frac{\int_{\Omega} u_0 |\nabla \psi| \delta(\psi) (1 - H(\phi)) dx}{\int_{\Omega} |\nabla \psi| \delta(\psi) (1 - H(\phi)) dx} \quad (15)$$

由式(8)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial E(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \frac{\partial E_1(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial E_2(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{\partial E_3(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \end{aligned} \quad (16)$$

式中,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_1(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{P_{\nabla\psi} \nabla \phi |\nabla \psi|}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} \right) \delta(\psi) \delta(\phi) \eta dx + \int_{\partial\Omega} \frac{P_{\nabla\psi} \nabla \phi \cdot \mathbf{n}}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} |\nabla \psi| \delta(\psi) \delta(\phi) \eta ds \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_2(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= \delta(\psi) \delta(\phi) (\alpha_1 (u_1 - u_0)^2 |\nabla \psi| - \alpha_2 (u_2 - u_0)^2 |\nabla \psi|) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_3(\phi + \varepsilon \eta)}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} &= - \mu \int_{\Omega} \nabla \cdot \left((|P_{\nabla\psi} \nabla \phi| - 1) \times \frac{P_{\nabla\psi} \nabla \phi}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} |\nabla \psi| \right) \delta(\psi) \eta dx + \mu \int_{\partial\Omega} \frac{(|P_{\nabla\psi} \nabla \phi| - 1) |\nabla \psi| \delta(\psi)}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} \times P_{\nabla\psi} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} \eta ds \end{aligned} \quad (19)$$

由式(17)–(19)可得式(8)的梯度降方程如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta(\psi) \delta(\phi) \left[\gamma \nabla \cdot \left(\frac{P_{\nabla\psi} \nabla \phi}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} |\nabla \psi| \right) + \alpha_2 (u_2 - u_0)^2 |\nabla \psi| - \alpha_1 B (u_1 - u_0)^2 |\nabla \psi| \right] + \mu \nabla \cdot \left((|P_{\nabla\psi} \nabla \phi| - 1) \frac{P_{\nabla\psi} \nabla \phi}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} |\nabla \psi| \right) \delta(\psi) & \text{in } (0, \infty) \times \Omega \\ \frac{|\nabla \psi| \delta(\psi) \delta(\phi)}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} P_{\nabla\psi} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} + \frac{(|P_{\nabla\psi} \nabla \phi| - 1) |\nabla \psi| \delta(\psi)}{|P_{\nabla\psi} \nabla \phi|} P_{\nabla\psi} \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{on } \partial\Omega \\ \phi(0) = \phi_0 & \text{in } \Omega \cup \partial\Omega \end{cases} \quad (20)$$

2.3 演化方程的显式差分迭代格式

设 h 为空间步长, Δt 为时间步长, 对 $P_{\nabla\psi} \nabla \phi$ 沿 x 方向向前差分如下式所示:

$$\Delta_+^x (P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla \phi_{i,j,k}) = \frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{h} - \left(\frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2h} \times \right.$$

$$\frac{\phi_{i+1,j,k} - \phi_{i,j,k}}{h} + \frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2h} \times \frac{\phi_{i,j+1,k} - \phi_{i,j-1,k}}{2h} + \frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2h} \times \frac{\phi_{i,j,k+1} - \phi_{i,j,k-1}}{2h} \left/ \left[\left(\frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2h} \right)^2 \right] \right. \times \frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2h} \quad (21)$$

对 $P_{\nabla\psi} \nabla\phi$ 沿 x 方向向后差分、中心差分以及沿 y, z 方向的差分不再一一列出。

令

$$\begin{aligned} A_1 &= \Delta_+^x P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_2 &= \Delta_+^x P_{\nabla\psi_{i-1,j,k}} \nabla\phi_{i-1,j,k}^n \\ A_3 &= \Delta_0^x P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_4 &= \Delta_0^x P_{\nabla\psi_{i,j-1,k}} \nabla\phi_{i,j-1,k}^n \\ A_5 &= \Delta_0^x P_{\nabla\psi_{i,j,k-1}} \nabla\phi_{i,j,k-1}^n \\ A_6 &= \Delta_+^y P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_7 &= \Delta_+^y P_{\nabla\psi_{i,j-1,k}} \nabla\phi_{i,j-1,k}^n \\ A_8 &= \Delta_0^y P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_9 &= \Delta_0^y P_{\nabla\psi_{i-1,j,k}} \nabla\phi_{i-1,j,k}^n \\ A_{10} &= \Delta_0^y P_{\nabla\psi_{i,j,k-1}} \nabla\phi_{i,j,k-1}^n \\ A_{11} &= \Delta_+^z P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_{12} &= \Delta_+^z P_{\nabla\psi_{i,j,k-1}} \nabla\phi_{i,j,k-1}^n \\ A_{13} &= \Delta_0^z P_{\nabla\psi_{i,j,k}} \nabla\phi_{i,j,k}^n \\ A_{14} &= \Delta_0^z P_{\nabla\psi_{i-1,j,k}} \nabla\phi_{i-1,j,k}^n \\ A_{15} &= \Delta_0^z P_{\nabla\psi_{i,j-1,k}} \nabla\phi_{i,j-1,k}^n \end{aligned}$$

梯度降方程可离散为

$$\frac{\phi_{i,j,k}^{n+1} - \phi_{i,j,k}^n}{\Delta t} = \delta(\psi_{i,j,k}^n) \left[(\gamma\delta(\phi_{i,j,k}^n) - \mu) \times \left(\Delta_-^x \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + A_8^2 + A_{13}^2}} E + \Delta_+^x \frac{A_6}{\sqrt{A_3^2 + A_6^2 + A_{13}^2}} E + \Delta_-^z \frac{A_{11}}{\sqrt{A_3^2 + A_8^2 + A_{11}^2}} E \right) + \alpha_2 \delta(\phi_{i,j,k}^n) (u_2 - u_0)^2 E - \alpha_1 \delta(\phi_{i,j,k}^n) (u_1 - u_0)^2 E + \mu (\Delta_-^x A_1 \cdot E + \Delta_-^y A_6 \cdot E + \Delta_-^z A_{11} \cdot E) \right] \quad (22)$$

其中,

$$E = \left[\left(\frac{\psi_{i+1,j,k} - \psi_{i-1,j,k}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\psi_{i,j+1,k} - \psi_{i,j-1,k}}{2h} \right)^2 + \left(\frac{\psi_{i,j,k+1} - \psi_{i,j,k-1}}{2h} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (23)$$

令

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\sqrt{A_1^2 + A_8^2 + A_{13}^2}} \\ c_2 &= \frac{1}{\sqrt{A_2^2 + A_9^2 + A_{14}^2}} \\ c_3 &= \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + A_6^2 + A_{13}^2}} \\ c_4 &= \frac{1}{\sqrt{A_4^2 + A_7^2 + A_{15}^2}} \\ c_5 &= \frac{1}{\sqrt{A_3^2 + A_8^2 + A_{11}^2}} \\ c_6 &= \frac{1}{\sqrt{A_5^2 + A_{10}^2 + A_{12}^2}} \end{aligned}$$

则式(20)的显式迭代格式为

$$\begin{aligned} \phi_{i,j,k}^{n+1} &= \phi_{i,j,k}^n + \Delta t \delta(\psi_{i,j,k}^n) \left[\frac{(\gamma\delta(\phi_{i,j,k}^n) - \mu)}{h} (c_1 A_1 - c_2 A_2 + c_3 A_6 - c_4 A_7 + c_5 A_{11} - c_6 A_{12}) E + \alpha_2 \delta(\phi_{i,j,k}^n) (u_2 - u_0)^2 E - \delta(\phi_{i,j,k}^n) \alpha_1 (u_1 - u_0)^2 E + \frac{\mu}{h} (A_1 - A_2 + A_6 - A_7 + A_{11} - A_{12}) E \right] \quad (24) \end{aligned}$$

3 数值实验结果及分析

本文实验结果均是在 PC 机 (Intel (R), CPU 2.33 GHz, 内存 2.0 GB) 上采用 Matlab7.0 作为编程工具实现的。实验中的曲面均基于 3 维断层图像采用变分水平集方法分割得到, 曲面上的图像为该曲面与相关 3 维图像的截面。

图 1 显示的是本文模型对圆柱曲面图像的两相图像分割。该实验取参数 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma = 1, \mu = 1$, 时间步长 $\Delta t = 0.1$, 空间步长 $h = 1$ 。

通过图 1 可以看出, 对于曲面上比较简单的两相图像, 本文模型能取得良好的分割效果, 但在迭代的过程中分割线为拓扑结构复杂的空间曲线, 这是因为迭代过程中圆柱表面和零水平集函数 ϕ 表示的球面重合部分过多, 随着迭代次数增加分割线最终演化为要分割对象的轮廓线。

图 2 显示的是对球面上非洲地图的分割结果。该实验取参数 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma = 1, \mu = 1$, 时间步长 $\Delta t = 0.1$, 空间步长 $h = 1$ 。

从图 2 可以看出, 对于光滑的曲面上区域边界比较复杂的图像, 本文模型能取得较好的分割效果, 但该实验初始化位置需要设置得尽量接近边界, 否则分割需要的时间和迭代次数会成倍增加。

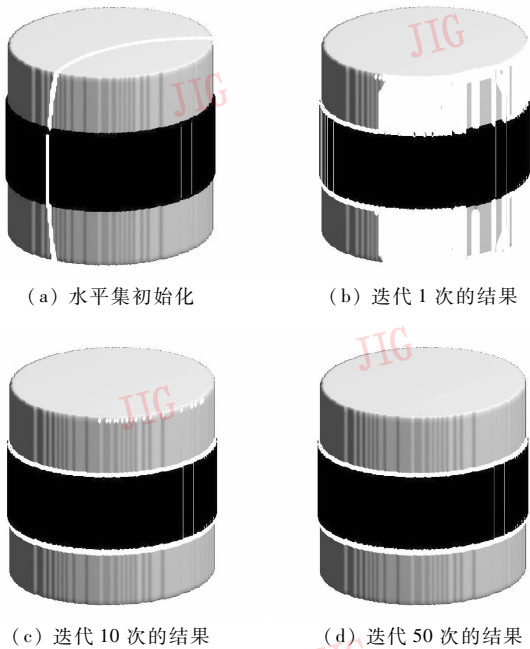


图 1 圆柱曲面的两相图像分割

Fig. 1 Segmentation of 2-phase image on cylinder surface

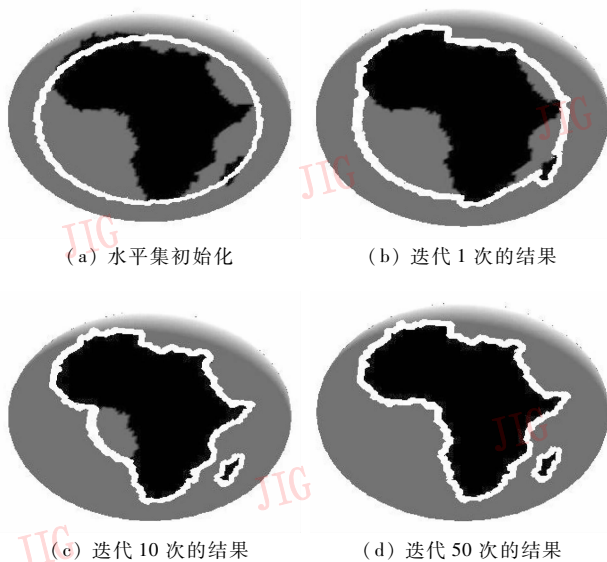


图 2 球面上非洲地图的分割

Fig. 2 Segmentation of Africa map on sphere surface

图 3 显示的是对表面凹凸不平的形状上的图像分割。该实验取参数 $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \gamma = 1, \mu = 1$, 时间步长 $\Delta t = 0.1$, 空间步长 $h = 1$ 。

由图 3 可以看出, 本文模型对于表面凹凸不平的形状上的图像分割仍能取得较好的效果, 并且能用一个水平集完成对分为多个不连通区域的两相图像的分割。

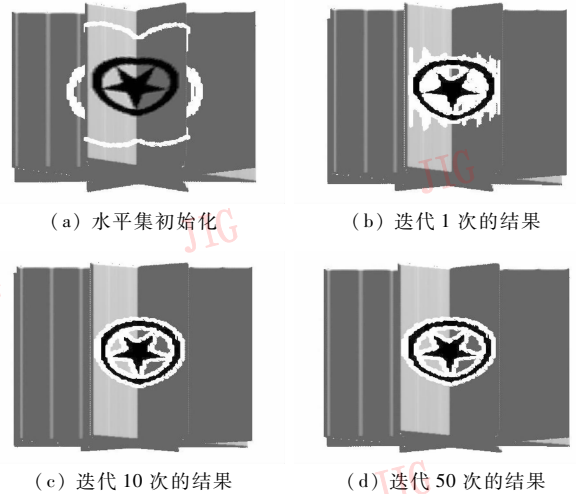


图 3 不规则形状上的图像分割

Fig. 3 Segmentation of image on irregular surface

4 结 论

将经典的平面图像分割的变分水平集模型 Chan-Vese 模型拓展为隐式曲面上两相图像分割的变分水平集模型, 并在能量泛函中增加水平集函数为符号距离函数的惩罚项, 避免了传统模型水平集函数需重新初始化的问题。但在隐式曲面上分段光滑图像的分割、多相图像分割、演化方程的快速计算方法、能量模型轮廓线的初始化等方面还需深入研究。

参考文献 (References)

- [1] Spira A. Geometric Image Evolution on Parametric Surfaces[D]. Haifa: Department of Computer Science, The Technion-Israel Institute of Technology, 2005.
- [2] Bertalmio M, Cheng L T, Osher S, et al. Variational Problems and PDE's on Implicit Surfaces[J]. Journal of Computational Physics, 2001, 174(2): 186-193.
- [3] Wu Chunlin. Image Processing on Implicit Surfaces Based on PDEs[D]. Hefei: University of Science and Technology of China, 2006. [吴春林. 基于 PDEs 的隐式曲面上的图像处理[D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2006.]
- [4] Jin H, Yezzi A J, Soatto S. Mumford-shah on the move: Region-based segmentation on deforming manifolds with application to 3-D reconstruction of shape and appearance from video[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 29(2/3): 219-234.
- [5] Cheng L. The Level Set Method Applied to Geometrically Based Motion, Materials Science, and Image Processing [D]. Los

Angeles; Department of Mathematics. University of California, 2000.

- [6] Chan T F, Vese L A. Active contours without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.
- [7] Mumford D, Shah J. Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42(5): 577-685.

[8] Osher S, Paragios N (Editors). Geometric Level Set Methods in Imaging Vision and Graphics[M]. Berlin:Springer Verlag, 2003.

- [9] Li C, Xu C, Gui C, et al. Level set evolution without re-initialization: A new variational formulation[C]//Proceedings of 2005 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Washington DC USA: IEEE Computer Society, 2005: 430-436.