

一种新颖的快速水平集初始化方法

刘涛¹⁾ 张大龙¹⁾ 周秦武¹⁾ 曹铁生²⁾ 卞正中¹⁾

¹⁾(西安交通大学生命科学与技术学院, 西安 710049) ²⁾(第四军医大学唐都医院, 西安 710061)

摘要 水平集方法是偏微分图像分析的一个重要的数值方法,其最大的问题是计算量大,速度缓慢,特别是需要频繁的初始化。针对这个问题进行深入研究,提出了基于数学形态学的水平集初始化方法。形态学方法分为平滑和重建两个步骤,利用基本的开、闭和膨胀运算来分别平滑数值不精确的距离函数和重建窄带。新的方法不仅具有很高的效率,而且可以适应各种拓扑变化,完全可以替代常规方法,运用于数字图像的实时处理中。

关键词 水平集 初始化 窄带 符号距离函数 数学形态学

中图法分类号: TP391.4 文献标志码: A 文章编号: 1006-8961(2010)05-775-07

A Novel Fast Level Set Initialization Method

LIU Tao¹⁾, ZHANG Dalong¹⁾, ZHOU Qinwu¹⁾, CAO Tiesheng²⁾, BIAN Zhengzhong¹⁾

¹⁾(School of Life Science & Technology, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049)

²⁾(Tangdu Hospital, Fourth Military Medical University, Xi'an 710061)

Abstract Level set method is an important numerical scheme to PDE image analysis, while the most serious problem is that level set is accompanied with high computation cost, slow speed, and especially frequent re-initialization. The paper carefully researches the disadvantages and presents a new initialization method based on mathematical morphology. The new method includes two schemes, i. e. smoothing scheme and reconstruction scheme, which perform two operations of smoothing inaccurate distance function and rebuilding narrow band separately using open, close and expansion operations. The proposed method is not only of high efficiency, but also can deal with the topology variations adaptively. This method can replace the conventional methods successfully and can also be applied in the real-time image processing.

Keywords level set, initialization, narrow band, SDF, mathematical morphology

0 引言

自从 Osher 和 Sethian 首次将水平集(level set)方法引入几何 Snake 模型数值求解以来,该方法已经在图像处理,晶体生长,流体模拟等领域得到了广泛的应用^[1-4]。和其他曲线演化的数值方法相比,水平集方法最大的优点是它的稳定性和拓扑无关性,能有效地解决演化过程中几何拓扑的自适应变化问题。然而,由于涉及频繁的迭代计算,水平集方法的主要问题是计算量太大,Adalsteinsson 等人提

出了窄带方法^[5]。这种方法的基本思想是以曲线为中心建立一条窄带,所有的更新都在窄带内完成,当零水平集接近窄带内外边界时,重新建立一条新的窄带进行演化。

重新初始化进行演化是水平集方法,特别是窄带方法的一个关键问题。重新初始化是指当演化曲线到达某一个位置或某一时刻时,停止当前的水平集演化,在计算域内重新生成新的水平集函数。重新初始化时需要先提取前沿的轮廓,再进行水平集函数初始化。但是,由于演化中存在数值误差,简单的依据零水平集无法获取光滑连续的前沿曲线。因

基金项目:国家自然科学基金项目(30870673)

收稿日期:2009-05-02;改回日期:2009-10-15

第一作者简介:刘涛(1976—),男,讲师。2002年于西安交通大学获仪器科学与技术专业硕士学位,在读博士研究生。主要研究方向为基于偏微分方程的水平集图像增强与分割。E-mail: liulang@mail.xjtu.edu.cn

此,重新初始化之前常常要先进行平滑,以消除曲线演化中数值方案的误差。其他的方法,如文献[5-6],虽然可以不提取前沿,但对演化速度有限制,除非每一次迭代后都重建水平集函数。随着水平集方法研究的深入,许多初始化方法陆续被提出,有代表性的如文献[2,6],这些方法仅考虑了轮廓的局部情况,实现困难并且效率不高。同样国内的学者也提出了提高初始化计算速度的方法^[7-8],但是只考虑了计算速度的改进,并没有提出重新初始化之前进行平滑的解决方案。

针对现有的初始化方法存在耗时耗力的问题,提出了一个基于数学形态学的水平集初始化解决方案,它包括平滑和重建两个策略。利用数学形态学中的开、闭运算和膨胀操作,可以简单快速地得到光滑的零水平集曲线,不受演化速度的限制,并能够快速准确地进行窄带的重建。同时,还考虑了演化曲线速度扩展的问题。通过对比演化效率和演化精度,充分说明了本文方法的有效性。最后,通过对合成图像和实际医学血管图像的曲线合并和分裂实验,说明了本文方法的实用性,其同样可以适应各种拓扑形式的变化,完全可以替代传统方法成为水平集演化过程中的初始化方法,并且由于其快速精确的特点,本文方法还可以用于数字图像的实时处理中。

1 问题的提出

1.1 符号距离函数(SDF)的定义

在利用水平集进行曲线演化时,曲线依据下面的偏微分方程(PDE)演化^[9]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = F |\nabla \Phi| \quad (1)$$

式中, F 为速度函数, Φ 是水平集函数,显然式(1)是一个 Hamilton-Jacobi 方程。

Φ 通常定义为符号距离函数,即计算域中的任何一点的水平集函数定义为该点到演化曲线/表面上的最短距离。利用符号来区分点在曲线/曲面外部还是内部,所以水平集函数也称为符号距离函数(SDF)。开始计算之前,水平集函数预先初始化为符号距离函数。在进行迭代计算的时候,应该始终保持 $|\nabla \Phi| = 1$,只有这样, Φ 才能和演化曲线 C 一一对应,并且 Φ 总是可微的,稳定的。

1.2 传统水平集初始化存在的问题

由于水平集的实现是通过差分迭代的方法,所

以无论采用何种数值解决方案,总会产生误差,并且在曲线演化的过程中也会累计误差。误差会使符号距离函数 Φ 不准确,出现歧义点,造成前沿 C 的轮廓提取困难,甚至会使曲线演化失败。所以,在重新初始化提取轮廓之前必须进行平滑,以消除错误的和不合理的点。

为此,Sethian 和 Yang 等人都提出了利用偏微分方程的平滑算法来消除歧义点。但曲线演化过程中,歧义点的种类较多,而且个别歧义点可能同时属于两种或两种以上类型,平滑算法需要考虑的情况较多,问题比较复杂。目前的算法一般是根据歧义点的分类进行寻找,所有歧义点改变类型并作插值处理。这些算法的主要问题是:1) 仅仅考虑了歧义点邻域的局部情况,不能全局分析轮廓,考虑的情况多,算法复杂;2) 处理结果常与算法起始点位置和处理步骤有关,算法复杂度也和曲线的轮廓,歧义点的多少相关;3) 算法执行一次常得不到合理的结果,需多次迭代才能完成。因此这些算法的效率不高,得到的轮廓也不一定光滑。

2 基于数学形态学的平滑和轮廓提取

由于前述的平滑算法存在计算量较大,考虑情况较多的问题,本文试图找到一种简便易行的方法来改进水平集的平滑与轮廓提取。通过比较,发现按照以前的方法直接处理网格上3种类型(曲线内,曲线外,曲线上)的点较为复杂,不如改为处理区域。曲线内部区域应该是一个连通的区域,如果将它平滑并提取出来,实际上也就确定了曲线轮廓。为此提出了基于数学形态学的平滑算法,其基本思想是将曲线演化网格上所有的内部点,外部点和边界点看成一幅二值图像,孤立点看成图像上的噪声点。噪声点通过形态学滤波消除,不合理的点可通过形态学方法修饰。所有的操作都是针对内部区域进行的,最后从内部区域提取曲线轮廓,大大简化了处理问题的过程。新的算法适合各种曲线拓扑变化,这一点在后面的实验中可以看到。其实现步骤具体如下:

1) 网格点数据图像二值化 该方法采用的是二值数学形态学运算,所以第1步应该将曲线演化网格上的数据转化为一幅二值图像 A_1 。转换规则是:将外部点(水平集函数大于0的点)和边界点(水平集函数接近0的点)置为0(黑,即图像背景),

内部点置为1(白色,即图像)。转换后内部和外部、边界区域的孤立点相当于椒盐噪声和歧义点。

2) 对图像 A_1 进行开运算 由形态学的知识^[10]可知,开操作会去除图像上的小黑点(即处于内部区域上的孤立点),同时可以去除突出的小“尖点”,使得内部区域边界变得光滑。

开运算定义^[10]为

$$B_1 = A_1 \circ B = (A_1 \ominus B) \oplus B \quad (2)$$

式中, A_1 是二值化图像, B 是小圆形结构元素, \circ 表示开运算, \ominus 表示腐蚀运算, \oplus 表示膨胀。操作过程如图1所示。

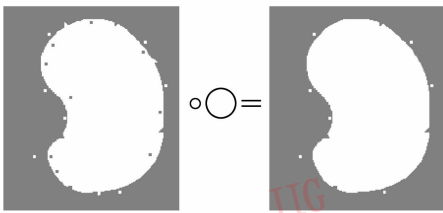


图1 开操作示意图

Fig.1 Sketch map of the open operation

3) 对图像 B_1 做闭运算 对开运算 B 的结果做闭运算,用于消除背景上的小白点(即处于外部区域上的孤立点),同时也修饰图像边界,“抹去”内部区域的小“凹”点,使曲线更为光滑,操作过程如图2所示。闭操作采用和开操作一样的圆形结构元素 B 。

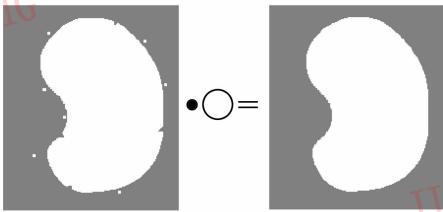


图2 闭操作示意图

Fig.2 Sketch map of the close operation

闭运算定义^[10]如下:

$$C_1 = B_1 \bullet B = (B_1 \oplus B) \ominus B \quad (3)$$

式中, B_1 是开运算结果, \bullet 表示闭运算。

4) 对图像进行膨胀运算,提取轮廓 经过步骤2)、3)的运算,噪声和歧义点已经去除,内部区域变得光滑。从二值图像上看,得到了两种连通的区域,即黑色(0)区域和白色(1)区域。接下来可以用形态学提取边界的方法,从白色区域提取边界,即得到需要的连续光滑的曲线轮廓。提取方法如图3和式(4)所示。

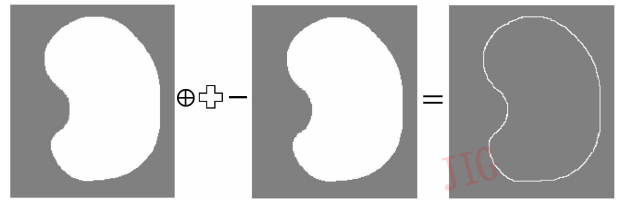


图3 轮廓提取示意图

Fig.3 Sketch map of contour distillation

$$D_1 = C_1 \oplus C - C_1 \quad (4)$$

式中,膨胀结构元素 C 采用 3×3 的强邻接像素结构元素来获取弱连通边界轮廓。

经过上述4个步骤,得到了光滑曲线轮廓的位置,接下来就可以利用曲线轮廓建立新的窄带,重新初始化距离函数,开始下一轮的曲线演化。上述操作不需要多次迭代,也不需要进行插值运算,由于每一步都是标准的数学形态学操作,算法变得更为简单,可以通过图像处理硬件快速实现。可以看出,数学形态学算子简化了平滑问题,具有很高的效率。

值得指出的是结构元素的大小和类型的选择会影响最后的结果。经过实验发现结构元素 B 的选择有两条规律:第一,曲线演化的网格可以取得更密集些以获得亚像素级的分割效果,例如可取图像像素网格的整数倍作为演化网格,这时可选用圆形结构元素来平滑。演化网格越密集结构元素半径可以更大一些,这样取得的轮廓准确且光滑,能很好地过滤掉“尖”点和“凹”点。第二,如果曲线演化网格和图像网格一样,这时选用 2×2 方形结构元素可满足一般需要。每次提取的曲线轮廓因为开闭运算产生误差,轮廓看上去变得“方”一点,但一般不会影响最终的分割结果,而且处理速度会大大加快,这是因为每次提取轮廓后都会重建窄带,误差造成的影响可以在每次重建时消除。

边界提取选择了 3×3 的强邻接像素结构元素来获取单像素宽弱连通边界。由形态学知识可知,可以选择其他的结构元素来获得不同粗细或者强连通的边界,这也是该算法的一个特点。注意,在平滑策略的示意图中给出的是2维情况,平滑策略也可以扩展到3维,这里形态学算子自动地增加1维,例如开、关操作的算子选择一个圆球。

3 窄带重建和速度扩展

3.1 现有的重建方法

重建符号距离函数主要有3种方法,分别是定

义法,快速推进法(fast marching method)^[11]和偏微分方程迭代法。下面简要地介绍一下常用的偏微分方程迭代法。

偏微分方程重建的优点是将平滑和重建合为一体。最先由 Sussman 等人提出^[5],首先应构造形如下面的方程:

$$\begin{cases} d_\tau + s(d_0)(|\nabla d| - 1) = 0 \\ d(x, 0) = d_0(x) = \Phi(x, t) \end{cases} \quad (5)$$

式中, d 是距离函数, $s(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + \Delta x^2}}$ 。

该方法无须提取零水平集,计算复杂度为 $O(N)$, N 为窄带中的点数。主要问题是算法和当前的水平集函数 Φ 有关,当 Φ 过于平坦或过于陡峭时,造成计算量增大,甚至会改变距离函数的符号,产生错误。而且,这种方法的收敛速度也比较缓慢。

为此, Peng 等人修正式(5)为^[6]

$$\begin{cases} d_\tau + s(d)(|\nabla d| - 1) = 0 \\ d(x, 0) = d_0(x) = \Phi(x, t) \end{cases} \quad (6)$$

式中, $s(d) = \frac{d}{\sqrt{d^2 + |D_d|^2 \Delta x^2}}$, $D_d = \frac{d_{i+1} - d_i}{\Delta x}$ 。

Peng 的方法的主要问题是速度函数的大小受到限制,除非每一个时间步骤都初始化一次。

3.2 基于数学形态学的自适应重建

由于传统的偏微分迭代法受水平集函数 Φ 的影响较大,并且迭代速度较慢。本文仍然考虑用数学形态学中的操作进行重建。利用数学形态学中的膨胀运算可以直接用来重建窄带。膨胀运算定义为

$$E_1 = D_1 \oplus D \quad (7)$$

式中, D_1 为通过平滑策略获得的前沿图形,图 4 为生成窄带示意图, D 为结构元素。

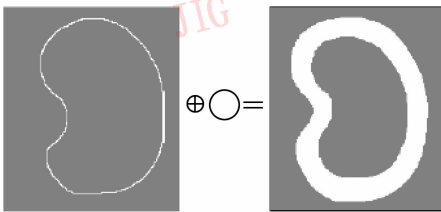


图 4 膨胀生成窄带示意图

Fig. 4 Sketch map of expansion operation

选用圆形的结构元素 D 对当前曲线进行膨胀, D 的大小直接对应窄带的宽度,可以依据需要预先进行设置。膨胀过程中结构元素中心到前沿的距离总是已知的,膨胀过程中应该保存这些数值,这些数

值就是符号距离函数值。这个方法的理论依据是:膨胀运算实际相当于求解一个偏微分方程^[6]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sup_{\theta} \{r(\theta) \cdot \nabla u\} \quad (8)$$

容易得到不同的结构元素用于膨胀时,有以下速度:

$$\sup_{\theta} \{r(\theta) \cdot \nabla u\} = \begin{cases} \|\nabla u\| & D = \text{圆形} \\ \max\{|u_x|, |u_y|\} & D = \text{菱形} \\ |u_x| + |u_y| & D = \text{方形} \end{cases}$$

显然,如果结构元素 D 是圆形,相当于以速度 1 演化曲线,得到的恰好是距离函数。式(7)提出的重建方法的主要优点是:第一,不要求解偏微分方程,将复杂的浮点和迭代算法简化为形态学基本运算;第二,可以直接在离散网格中实现;第三,快速高效,可以用于实时处理中。

在具体实现中,预先初始化结构元素,即计算结构元素 D 的中心到元素中各个点的距离并保存下来;然后依据膨胀算法用 D 去扫描前沿,扫过点的距离函数设为元素模板上对应点的距离,对于多次扫过的点用最小的距离作为最后的距离,这个距离就是距离函数值。所以,本文方法的思想很像定义法,但提出了更有效的实现方案。这样,算法的复杂度为 $O(N)$, N 为前沿上点的个数,每一步都是简单的坐标比较,不需要复杂运算。

3.3 基于数学形态学的速度扩展

Φ 能否始终保持为符号距离函数依赖于速度函数 F ^[12]。在求解式(1)中,如何将 F 从 C 扩展到整个计算域是至关重要的。一般来说,曲线/曲面 C 上的速度总是有定义的,但其他地方的速度不一定是已知的,要通过速度扩展方法来得到。

在速度函数扩展的过程中,应该保证 $|\nabla \Phi| = 1$,为此,采用如下的推导方法^[1],首先用 $|\nabla \Phi|^2$ 对时间 t 求导:

$$\begin{aligned} \frac{d|\nabla \Phi|^2}{dt} &= \frac{d}{dt}(\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) = 2 \nabla \Phi \cdot \frac{d}{dt}(\nabla \Phi) = \\ &= 2 \nabla \Phi \cdot \nabla F - \nabla \Phi \cdot \nabla |\nabla \Phi| + |\nabla \Phi| F \end{aligned} \quad (9)$$

因为 $|\nabla \Phi| = 1$,式(10)第 2 项为 0,如果能够满足:

$$\nabla \Phi \cdot \nabla F = 0 \quad (10)$$

则式(10)为 0, $|\nabla \Phi|$ 保持不变,即保持初始状态 $|\nabla \Phi| = 1$ 不变。

从式(10)中可以看出, ∇F 和 $\nabla \Phi$ 是正交的,所以

F 在 $\nabla\Phi$ 方向上是不变的。 $\nabla\Phi$ 的方向和曲线 C 的单位法向量方向一致。因此,计算域中一点 m 的速度应该定义为在 C 上和它最近的点 n 的速度,换句话说就是过 C 上一点 n ,并以 n 点的法向量为方向作直线,直线通过的所有点的速度都和点 n 的速度一样。

在具体实现方面,只需要在求解各个点符号距离函数的时候,记录各个点最短符号距离所对应的曲线上的点,把这些曲线上的点作为源点,在进行速度扩展的时候只需要把与源点同一类型点的速度设为源点的速度即可。

4 初始化方法分析和对比

本文给出了基于数学形态学的平滑、重建以及速度扩展方法。这些方法在实现效率、难易程度以及精度等方面都具有一定的优势。下面通过对比本文方法和传统的直接平滑重建策略^[2]以及利用偏微分方程的平滑重建策略^[6],来进一步说明本文方法的优点。

为了更好地评价算法的效率,这里不提供绝对时间上的比较,因为运算时间和算法的实现方法、软硬件条件有关,比较的结果可能不够准确。由于算法复杂度反映了算法的运算量大小,所以可以通过比较算法复杂度来评估各类方法的效率。表 1 给出了传统方法和本文的算法在复杂度方面的对比。

表 1 初始化方法的效率比较

Tab.1 Efficiency comparison of different initialization methods

方法	平滑复杂度	基本操作	重建复杂度	基本操作
直接方法	$? \times O(N)$	插值	$O(M \lg M)$	迭代+浮点
偏微分方法	$n \times O(N)$	迭代	$O(N)$	迭代+浮点
本文方法	$3 \times O(N)$	坐标比较	$O(M)$	坐标比较

M 为前沿上的点数, N 为窄带内(或全部网格)的点数, n 表示多次迭代,? 表示未知次数

表 1 中,直接方法平滑时常常要迭代,所以计算复杂度是 $O(N)$ 的倍数, N 是窄带内或者全部网格(全局方法)里面的点数。重建窄带时直接方法常用快速推进算法,基本操作是解偏微分方程,需要进行浮点迭代计算,有一定的计算量。偏微分方程计算复杂度是 $O(N)$,虽然计算的点数较少,但每一点的计算量较大,而且要迭代多次,实际计算次数是 $O(N)$ 的若干倍,需要花费一定的时间。本文方法平滑时

效率为 $3 \times O(N)$,3 是指开、关和膨胀 3 次形态学运算。重建时只需要扫描前沿,复杂度为 $O(M)$ 。由于本文方法的基本操作是坐标比较,执行非常快捷,所以在效率上具有优势,特别是点数较多的时候。? 表示未知次数,即需要多次迭代才能完成。

通过表 1,可以发现本文方法具有不少优点,可以很好地运用到水平集方法的平滑重建和速度扩展中。通过下面的实验部分也可表明,本文的方法同样可以适应曲线的拓扑变化,应用于多初始化的水平集中。

5 实验结果分析

设计 3 组实验。前两组分别是合成图像的曲线分裂和合并实验,第 3 组是实际医学图像的分割实验。其中,合成图像曲线分裂和合并代表了一般的曲线演化过程;医学分割试验代表了实际图像的分割过程。实验的目的是证明本文的方法在曲线各种演化状态时,平滑和重建策略可以很好地工作,特别是当曲线进行分裂和合并时,以此来证明曲线能够适应各种拓扑变化。为了反映初始化前后的情况,实验中同时显示了前沿和窄带。为了去除速度函数的影响,在实验中所有的速度函数均采用经典的测地线模型^[13]。

第 1 组实验是曲线分裂实验,如图 5 所示。图中 3 个图形代表了一般轮廓的基本形状。其中,圆形代表平滑的边界;方形代表笔直的边界;三角形代表不光滑的具有尖点的边界。实验中,前沿用黑色

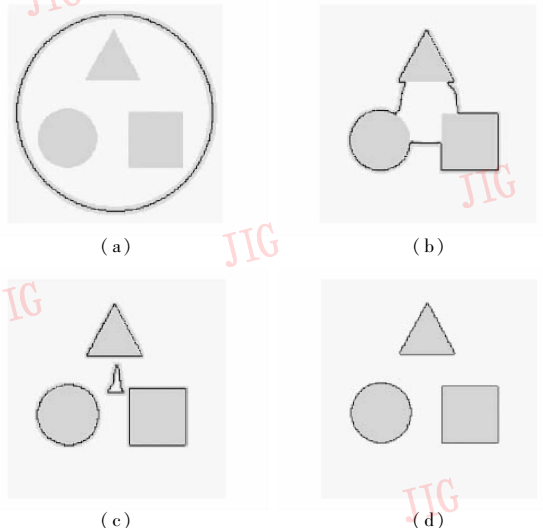


图 5 曲线分裂实验

Fig.5 Curve splitting experiment

表示,窄带用浅色表示。平滑选用 2×2 方形结构元素,曲线演化网格密度和图像数据网格一样。图 5(a) 初始化了一个圆形种子。在测地线模型的驱动下,前沿向目标物体逼近。在演化的过程中,曲线的前沿出现了少许的断裂,经过平滑处理后,轮廓又变得连续和光滑,图 5(b) 是重建后的窄带。遇到物体后,曲线开始分裂。图 5(c) 中曲线分裂成 4 条,前沿到了窄带边缘,有些地方发生断裂。经过重新初始化后,前沿又变得光滑,以前沿为中心生成了新的窄带。图 5(d) 是最后的分割结果。3 条曲线停止在图形边界上,最后一条收缩后消失。为了显示最后的结果,图 5(d) 只给出了前沿的情况,前沿准确地标识出了边界,完成了目标物体的分割。

第 2 组是曲线合并实验,如图 6 所示。图 6(a) 初始化了 3 个种子,对边界进行扩展,扩展中平滑算法依然保持曲线的连续和光滑。由于演化速度较快,图 6(b) 中前沿发生了明显的分裂问题。经过重新初始化后,得到图像图 6(c)。图 6(c) 中的前沿变得连续,同时生成了新的窄带。此时种子相遇、合并,形成一条完整的曲线。从图中也可以看出,由于网格较稀疏,使用了 2×2 方形结构元素,所以图 6(c) 的前沿变得有点“方”。尽管如此,重建窄带后消除了数值误差,不会影响到结果。图 6(d) 中曲线停止在边界上。曲线分裂、合并实验证明了本文的平滑和重建策略能适合各种曲线拓扑变化的要求。

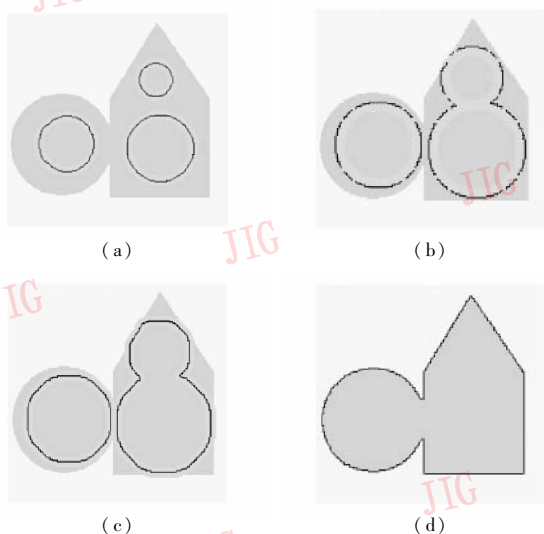


图 6 曲线合并实验

Fig. 6 Curve unitting experiment

第 3 组是医学图像分割实验,如图 7 所示,用这个实验来证明本文的方法同样适合实际的演化。在

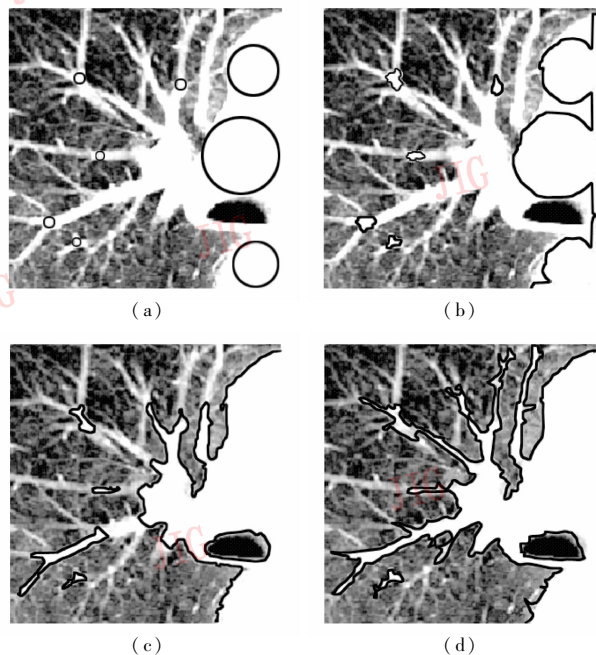


图 7 肺部小血管分割实验

Fig. 7 Pulmonary vessels segmentation experiment

这里,选择了一张具有细小分支的 CT 肺小血管图片,之所以选择血管图片,是因为血管图片的边界比一般的图片更为复杂。原始图像如图 7(a) 所示。由于血管分支非常细小,为了更好地显示前沿的位置,本文忽略了窄带,只显示了前沿曲线。在图 7(a) 中定义了多个种子,然后开始曲线演化。演化中对曲线进行了多次平滑。经过图 7(b)、图 7(c) 的演化和种子点的合并,最后停留在血管边界上,如图 7(d) 所示。实验 3 证明了该算法在实际分割任务中也能很好地工作。

6 结 论

本文提出了基于数学形态学的初始化方法,这个方法包括曲线平滑和重建两个策略。其中,平滑策略能处理不精确的水平集函数 Φ ,得到平滑后的前沿。平滑策略主要有两个优点:第一,不需要分析局部邻域点的情况,而是从轮廓全局出发,提取的轮廓更为理想。第二,将复杂的算法简化为简单的数学形态学基本运算,不需要迭代运算,提高了效率并且易于实现,也适合于多初始化情况。重建策略用来重建符号距离函数(窄带),不需要求解偏微分方程,也不需要浮点和迭代运算。同时,对速度函数没有限制。

总之,重新初始化方法快速高效,可以用于实时处理。本文提供了3组试验,分别代表了曲线的分裂、合并以及实际的医学图像分割。经过实验验证:本文方法在曲线拓扑变化中能够胜任工作,可以进一步应用于实际工作中。

参考文献 (References)

- [1] Osher Stanley, Fedkiw Ron. Level Set Methods and Dynamic Implicit Surfaces [M]. New York, American: Springer Press, 2003.
- [2] Adalsteinsson D, Sethian J A. A fast level set method for propagating interfaces [J]. Journal of Computational Physics, 1995, 118: 267-277.
- [3] Paragios N. Geodesic active contours and level sets for the detection and tracing of moving objects[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2000, 22(3): 266-280.
- [4] Osher Stanley, Paragios Nikos. Geometric Level Set Methods in Imaging, Vision, and Graphics [M]. New York, American: Springer Press, 2003.
- [5] Susman M, Smereka P, Osher S. A level set method for computing solutions to incompressible two-phase flow[J]. Journal of Computational Physics, 1994: 119-146.
- [6] Peng D, Merriman B. A PDE-based fast local level set method[J]. Journal of Computational Physics, 1999, 155(2): 410-438.
- [7] Wang Zheng, Yang Xin, Li Jun, et al. Speed up initialization time for the level set method [J]. Signal Processing, 2002, 18(2): 97-101. [王铮, 杨新, 李俊, 等. 提高水平集方法初始化计算速度的研究[J]. 信号处理, 2002, 18(2): 97-101.]
- [8] Zhang Lifei, Yang Hongbo, Zou Mouyan. A new method for the initialization and reinitialization of level set function[J]. Computer Engineering and Applications, 2003, 10: 26-32. [张丽飞, 杨鸿波, 邹谋炎. 一种新的水平截集函数初始化和重新初始化方法——距离函数光滑法[J]. 计算机工程及应用, 2003, 10: 26-32.]
- [9] Sapiro G. Geometric Partial Differential Equations and Image Analysis [M]. Cambridge, British: Cambridge University Press, 2000.
- [10] Soille P. Morphological Image Analysis (Second Edition) [M]. New York, American: Springer Press, 2003.
- [11] Sethian J A. Level Set Methods and Fast Marching Methods [M]. Cambridge, British: Cambridge University Press, 1999.
- [12] Adalsteinsson D, Sethian J A. The fast construction of extension velocities in level set methods [J]. Journal of Computational Physics, 1999, 148: 2-22.
- [13] Yu Gang. PDE Image Analysis and Its Application to Medical Image Segmentation [D]. Xi'an: Xi'an Jiaotong University, 2006. [喻罡. 偏微分方程图像分析研究及其在医学图像分割中的应用[M]. 西安: 西安交通大学, 2006.]